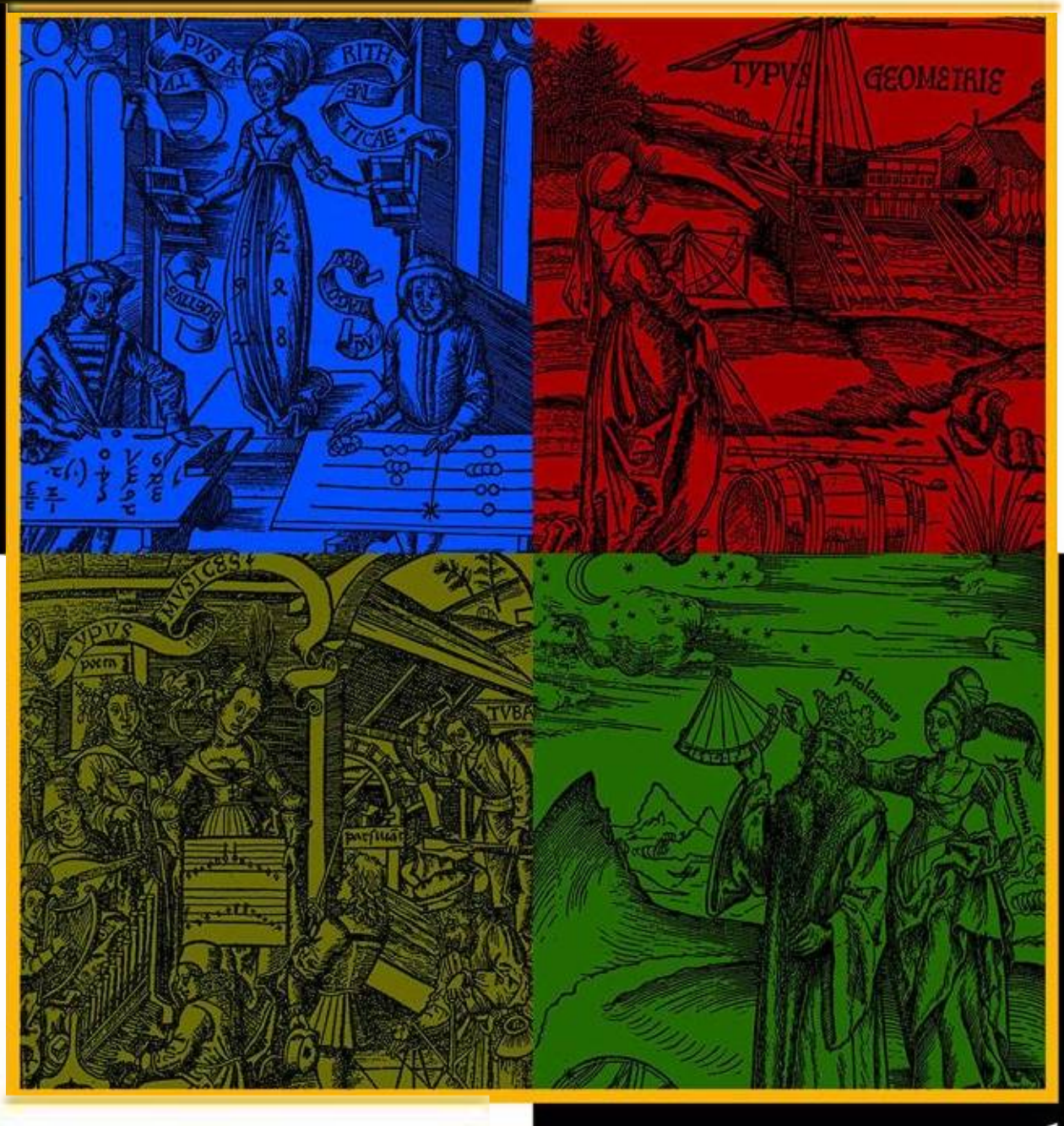
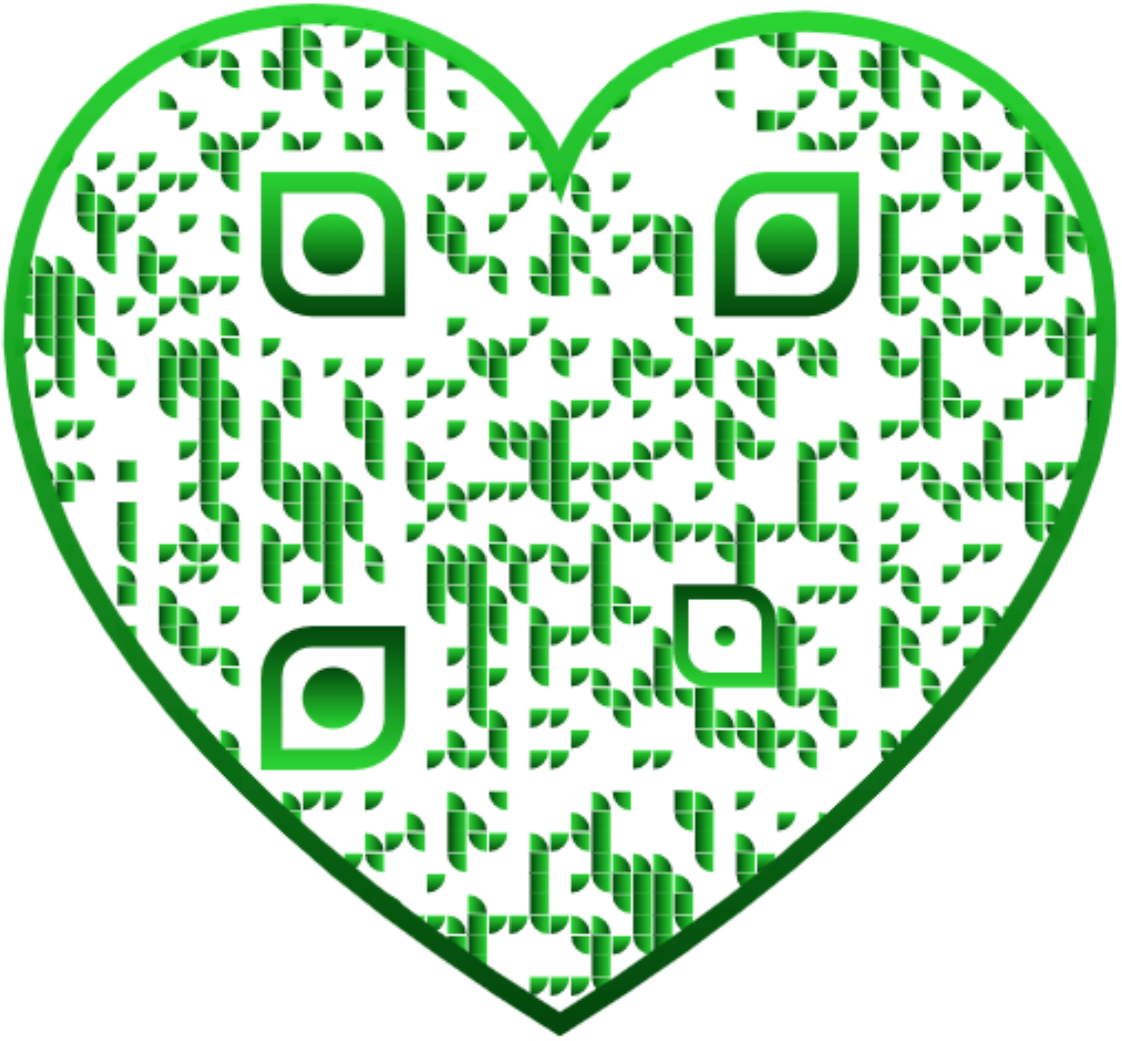
Educação Clássica

QUADRIVIUM

As Quatro Artes Liberais Clássicas da Aritmética, da Geometria, da Música e da Cosmologia



Organizador
John Martineau



A aritmética, a música, a geometria e o estudo dos padrões nos céus são as quatro grandes artes liberais do mundo antigo que lidam com os números inteiros. Essas simples linguagens universais são tão relevantes hoje como sempre o foram, e podem ser encontradas em todas as ciências e culturas conhecidas, sem divergência entre si. Na verdade, é de esperar que qualquer ser razoavelmente inteligente, em qualquer lugar do universo, conheça essas linguagens de forma muito semelhante à que é apresentada neste livro.

Essas quatro ciências integram o *quadrivium* que, junto com o *trivium*, compõe as sete artes liberais clássicas, ou seja, os sete ramos do conhecimento essenciais para iniciar o indivíduo numa vida de aprendizagem (o conceito é do período clássico, mas essa divisão data da Idade Média). O *trivium* inclui os aspectos das artes liberais pertinentes à mente, e o *quadrivium*, aqueles pertinentes à matéria.

Pode-se dizer que o *trivium* da linguagem está estruturado sobre os valores fundamentais e objetivos da Verdade, da Beleza e da Bondade. Seus três temas são: a gramática, que assegura a boa estrutura da linguagem; a lógica, para encontrar a verdade; e a retórica, para o belo uso da linguagem ao expressar a verdade. O *quadrivium*, por sua vez, surge do mais reverenciado de todos os assuntos disponíveis à mente humana: o número. A primeira das disciplinas que o compõem é a aritmética. A segunda é a geometria, ou a ordem do espaço como número no espaço. A terceira é a música, que, para Platão, significava o número no tempo. A quarta é a astronomia, ou o número no espaço e no tempo. Esses sete estudos oferecem uma escada segura e confiável para alcançar os valores simultâneos da Verdade, da Beleza e da Bondade, o que leva ao valor essencial e harmonioso da Totalidade.

Assim, este livro vai tratar do número em suas mais diversas manifestações. Em tudo que nos cerca, tanto nas estruturas criadas pela natureza quanto naquelas recriadas pelo homem, encontramos ordens e simetrias que se repetem de maneira surpreendentemente harmoniosa, revelando uma miríade de simbologias e sentidos. Nas páginas desta obra, veremos o mistério dos números em diversas épocas e civilizações; a perfeição das formas geométricas; as simetrias da natureza; os padrões numéricos nas plantas; as formas arquitetônicas; a seção áurea – ou proporção divina – na natureza e na arte; os padrões vibratórios que geram sons; o pulso e os ritmos; as harmonias musicais transformadas em imagem; a dança dos planetas.

QUER SER MAIS LIVRE

?

Gigantes portais mundiais de compartilhamento de ebooks e artigos científicos, com mais de 2 milhões de documentos

libgen.is/

b-ok.lat/

Grupo no Telegram com mais de 70 mil ebooks em português.

t.me/REVISTAVIRTUALBR

Livro: Contra a Propriedade Intelectual

mises.org.br/Ebook.aspx?id=29

APRENDA A FAZER EBOOKS

- DE LIVRO FÍSICO PARA PDF PESQUISÁVEL
- DE PDF ESCANEADO PARA PDF PESQUISÁVEL
- DE PDF PESQUISÁVEL PARA EPUB PROFISSIONAL
- DE EPUB COM ERROS PARA EPUB PROFISSIONAL

t.me/anonlivros

ANONBOOKS

LBRY

Plataforma descentralizada de reprodução e hospedagem de arquivos garantida por blockchain.

- Prática como YouTube
- Descentralizada e resiliente como torrent
- Facilitadora de transações financeiras como Bitcoin

lbry.tv/

FOTOS DAS PÁGINAS

https://lbry.tv/quadrivium-par

https://lbry.tv/quadrivium-impar

QUADRIVIUM

As Quatro Artes Liberais Clássicas da Aritmética, da Geometria, da Música e da Cosmologia

John Martineau (org.)

Tradução
Jussara Trindade de Almeida

7ª impressão

É Realizações
Editora

Collection copyright © 2010 by Walker & Company. Sacred Number
copyright © 2005 by Miranda Lundy. Sacred Geometry
copyright © 2001 by Miranda Lundy. Platonic & Archimedean Solids
copyright © 2002 by Daud Sutton. Harmonograph
copyright © 2003 by Anthony Ashton.
The Elements of Music copyright © 2008 by Jason Matineau.
A Little Book of Coincidence copyright © 2002 by John Martineau.
Pages from Ruler & Compass © 2009 by Daud Sutton.
Publicado com a permissão de Bloombury Publishing Inc.
Copyright da edição brasileira © 2014 É Realizações
Título original: *Quadrivium: The Four Classical Liberal Arts of Number, Geometry, Music, & Cosmology*

Editor
Edson Manoel de Oliveira Filho

Produção editorial, capa e projeto gráfico
É Realizações Editora

Preparação de texto
Carlos Nougué

Revisão
Renata Gonçalves

Reservados todos os direitos desta obra. Proibida toda e qualquer reprodução desta edição por qualquer meio ou forma, seja ela eletrônica ou mecânica, fotocópia, gravação ou qualquer outro meio de reprodução, sem permissão expressa do editor.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Quadrivium : as quatro artes liberais clássicas da aritmética, da geometria, da música e da cosmologia / John Martineau (org.); tradução Jussara Trindade de Almeida. – São Paulo: É Realizações, 2014. – (Coleção Educação Clássica)

Título original: Quadrivium: the four classical liberal arts of number, geometry, music, & cosmology.
Bibliografia.
ISBN 978-85-8033-162-2

1. Geometria - Miscelânea 2. Matemática - Miscelânea
I. Título. II. Série.

14-02167 CDD-516.22

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática para místicos 516.22

É Realizações Editora, Livraria e Distribuidora Ltda.
Rua França Pinto, 498 São Paulo SP 04016-002
Telefone (5511) 5572 5363
atendimento@erealizacoes.com.br · www.erealizacoes.com.br

Este livro foi impresso pela Gráfica HRosa em julho de 2020. Os tipos são da família Cronos Pro, Fairfield FH e Weiss BT. O papel do miolo é Pólen Soft 80 g, e o da capa, cartão Supremo 300 g.

Sumário

Prefácio 5
Introdução Geral (Keith Critchlow) 7

LIVRO I 11
NÚMERO SAGRADO (Miranda Lundy)

LIVRO II 63
GEOMETRIA SAGRADA (Miranda Lundy)

LIVRO III 131
OS SÓLIDOS PLATÔNICOS
E ARQUIMEDIANOS (Daud Sutton)

LIVRO IV 185
HARMONÓGRAFO (Anthony Ashton)

LIVRO V 241
OS ELEMENTOS DA MÚSICA (Jason Martineau)

LIVRO VI 295
UM PEQUENO LIVRO DA COINCIDÊNCIA
NO SISTEMA SOLAR (John Martineau)

APÊNDICE E ÍNDICE 359

Bibliografia e Leituras Complementares 415

TYPVS ARITHMETICAE

TYPVS GEOMETRIE

TYPVS MVSICES
TVBA

Ptolemaus

Prefácio

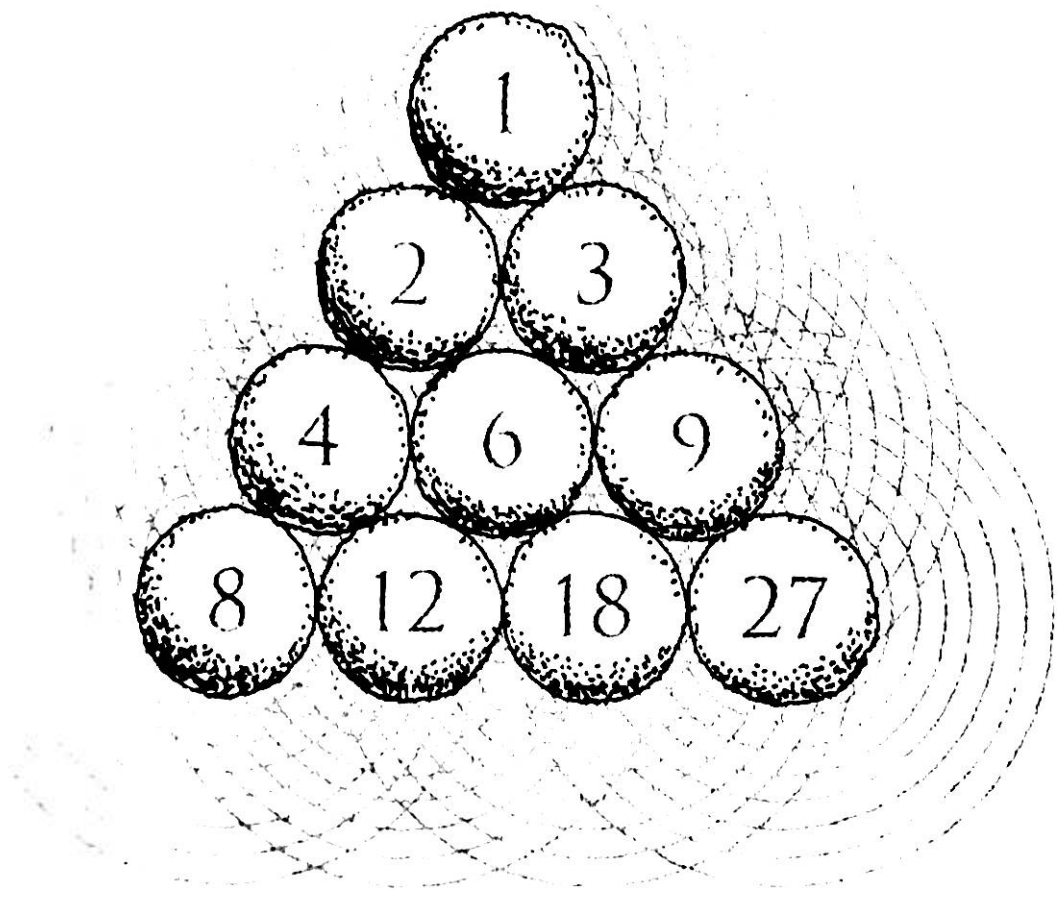
O volume que você tem nas mãos é um raro tesouro de coisas antigas, outrora secretas, e sempre úteis. Também é imortal – nunca vai sair de moda. Em terceiro lugar, é universal – um passaporte mágico entre culturas, entre o sagrado e o científico, o provinciano e o estrangeiro, o antigo e o moderno.

Seis livros da série "Wooden Books" foram combinados para produzir o *Quadrivium*, mais 32 novas páginas que estão em boa medida. Tentamos minimizar a repetição devido à sobreposição nos livros originais, mas alguns casos permanecem aqui e ali.

Um volume desse escopo envolve o trabalho de muitas pessoas. Agradecemos a Sally Pucill, Richard Henry, Adam Tetlow, John Michell, John Neal, Dr. Paul Marchant, Robin Heath, David Wade, Dr. Khaled Azzam, Malcolm Stewart, Polly Napper, Geoff Stray, Dr. Moff Betts, Prof. Scott Olsen, Richard Heath, Matt Tweed, Mark Mills, Prof. Robert Temple, Stephen Parsons, Nathan Williams, Charlie Dancey e Tracey Robinson por sua ajuda e contribuições.

Agradecemos também aos editores da série "Wooden Books": George Gibson da Walker & Bloomsbury, em Nova York, e Daud Sutton, no Cairo. Por fim, agradecemos ao Prof. Keith Critchlow pelo prefácio, e aos próprios autores, Miranda Lundy, Daud Sutton, Anthony Ashton e Dr. Jason Martineau.

John Martineau



O tetraktys dos pitagóricos ampliado pelo lambda *do Timeu. Platão manteve três números escondidos e revelou apenas sete: 1, 2, 3, 4, 8, 9 e 27, em relação aos planetas. Seixos ou* khálix *(forma grega para "cal": resíduos de minerais ou metais após a calcinação) era a norma grega para a matemática.*

Introdução Geral

O *Quadrivium* foi inicialmente formulado e ensinado por Pitágoras como o Tetraktys,[1] por volta de 500 a.C., em uma comunidade em que todos eram iguais, até materialmente e moralmente, e na qual as mulheres possuíam um *status* equivalente ao dos homens. Foi a primeira estrutura de ensino europeia a aprimorar a educação enfocando em sete temas essenciais, depois conhecidos como as sete artes liberais.

Educação vem do latim *educere*,[2] que significa "conduzir para fora",[3] apontando para a doutrina central que Sócrates, sob a pena de Platão, elucidou tão claramente – o conhecimento é parte inerente e intrínseca da estrutura de nossa alma. O *Trivium* da linguagem está estruturado sobre os valores fundamentais e objetivos da Verdade, da Beleza e da Bondade.[4] Seus três temas são: a Gramática, que assegura a boa estrutura da linguagem; a Lógica, para encontrar a verdade; e a Retórica, para o belo uso da linguagem ao expressar a verdade. O *Quadrivium* surge do mais reverenciado de todos os assuntos disponíveis à mente humana: o número. A primeira dessas disciplinas é a Aritmética. A segunda é a Geometria ou a ordem do espaço como número no espaço. A terceira é a Harmonia, que, para Platão, significava o número no tempo. A quarta é a Astronomia ou o número no espaço e no tempo. Todos esses estudos oferecem uma escada segura e confiável para alcançar os valores simultâneos da Verdade, da Beleza e da Bondade. Por sua vez, isso leva ao valor essencial e harmonioso da Totalidade.

A alma humana, que Sócrates provou ser imortal no *Fédon*, vem de uma posição de completo conhecimento antes de nascer no corpo. Recordar[5] – o ponto principal da educação – significa trazer novamente ao coração algo que ficou esquecido. O objetivo de estudar essas disciplinas era ascender de volta à Unidade através de uma simplificação, baseada na compreensão adquirida pela

---

[1] Representação pitagórica em forma de triângulo, denominado "triângulo perfeito". Para os pitagóricos, os números mantinham uma relação direta com a matéria, considerando, por exemplo, o número 1 como um ponto, o 2 como uma reta, o 3 como uma superfície, e o 4 como um sólido. Assumindo que 1 + 2 + 3 + 4 = 10, o número 10 era visto como uma espécie de conjunto de 4 elementos, o alicerce das coisas do mundo. Assim, de acordo com os pitagóricos, o 10 corresponderia a um *tetraktys*. (N. T.)

[2] Verbo composto, formado pelo prefixo *ex* (fora) e pelo verbo *ducere* (conduzir, levar). (N. T.)

[3] Do inglês *lead out*, o verbo, aqui, não se aplica a um movimento físico de direcionamento, mas à ação de preparar um indivíduo para o mundo. (N. T.)

[4] Ver Irmã Miriam Joseph, O Trivium – *As Artes Liberais da Lógica, da Gramática e da Retórica*. São Paulo, É Realizações, 2014.

[5] Do latim, verbo composto pelo prefixo *re* (novamente) e pela palavra *cordis* (coração). (N. T.)

prática em cada área do *Quadrivium*.[6] A finalidade residia em encontrar sua *fonte* (tradicionalmente, este era o único propósito da busca do conhecimento).

Em sua discussão sobre os ideais da educação, Sócrates revela seu modelo de continuidade da consciência. Era como uma "linha" traçada verticalmente, atingindo desde os primórdios do conhecimento consciente em avaliações até o clímax da consciência como *noesis*, que é o entendimento unificado. Para além disso, está o indescritível e o inefável. Há, significativamente, quatro fases (outro *quadrivium* ou *tetraktys*) dadas pela divisão de Sócrates da "linha ontológica". A primeira divisão encontra-se entre o mundo sensorial e o mundo inteligível, que são fundamentais, assim como entre mente e matéria. A seguir, cada um deles é dividido. Esse é o lugar onde as avaliações podem ser distinguidas das opiniões – mesmo as opiniões corretas, porém ainda baseadas na experiência sensorial. Acima da primeira linha divisória, entramos no mundo inteligível da Mente e encontramo-nos no reino que "comporta a verdade" do *Quadrivium*. Este é agora o conhecimento objetivo. A última e mais elevada divisão do inteligível é o *Nous* ou Conhecimento Puro propriamente dito, em que conhecedor, conhecido e conhecimento se tornam Um. Essa é a finalidade e a fonte de todo o conhecimento. Assim, com tempo e sabedoria testados, o *Quadrivium* oferece ao buscador sincero a oportunidade de recuperar a própria compreensão interna da natureza integral do universo e de si mesmo como parte inseparável desse universo.

A aritmética possui três níveis: o materialmente numerado, o número dos matemáticos (indefinido) e o número ideal ou arquetípico completo no dez. A geometria desdobra-se em quatro estágios: o *ponto* não dimensional, que se move para se tornar uma *linha*; a linha move-se para se tornar um *plano*; e, finalmente, o plano alcança a solidez como o *tetraedro*. A harmonia, que é igualmente a natureza da alma, possui quatro "escalas", como a música: a pentatônica,[7] a diatônica,[8] a cromática[9] e a *sbruti*.[10] A palavra *cosmos* foi criada por Pitágoras e

---

[6] É importante lembrar que, para os antigos romanos e gregos, o coração não era a sede dos sentimentos, como hoje pensamos, mas a localização física da mente, do pensamento. Além disso, a mente não estava situada na cabeça ou no cérebro, mas dentro do peito. Por isso, voltar a passar pelo coração significava a mesma coisa que voltar à mente ou retornar ao pensamento. No original em inglês deste texto, o autor utilizou o verbo *remember* (lembrar, relembrar, recordar), associando-o literalmente à reunião de membros separados ou dispersos novamente em uma totalidade. Por essa razão, segue-se a afirmação sobre a subida de volta à Unidade. (N. T.)

[7] Conjunto de todas as escalas formadas por cinco notas ou, em outras palavras, uma escala com cinco notas musicais por oitava. Escalas pentatônicas são muito comuns e podem ser encontradas em todo o mundo. As mais usadas são as *pentatônicas menores* e as *maiores*, que podem ser ouvidas em estilos musicais como o *blues*, o *rock* e a música popular. Muitos músicos chamam-na simplesmente *penta*. (N. T.)

[8] Escala de oito notas, com cinco intervalos de tons e dois intervalos de semitons (menor intervalo utilizado nessa escala) entre as notas. Esse padrão se repete a cada oitava nota, numa sequência tonal de qualquer escala. É típica da música ocidental e concerne à fundação da tradição musical europeia. As escalas modernas *maior* e *menor* são diatônicas, assim como todos os sete modos tonais utilizados atualmente. (N. T.)

[9] Escala que contém doze notas com intervalos de semitons entre elas. (N. T.)

[10] Termo sânscrito utilizado em diversos contextos ao longo da história da música indiana. Literalmente, significa "aquilo que é ouvido" e representa o menor intervalo de altura do som que o ouvido pode detectar. (N. T.)

significa "ordem" e "ornamento". Esta última era a forma com que os gregos descreviam o céu que podemos ver como um "ornamento" dos princípios puros, o número dos planetas visíveis relacionado aos princípios da harmonia proporcional. O estudo da "perfeição" do céu servia como uma forma de aperfeiçoar os movimentos da própria alma.

Dentre os estudantes do *Quadrivium* estão: Cassiodonus, Filolau (de Crotona), Timeu, Arquitas (de Tarento), Platão, Aristóteles, Eudemus, Euclides, Cícero, Fílon, o Judeu (de Alexandria), Nicômaco, Clemente de Alexandria, Orígenes, Plotino, Jâmblico, Macróbio, Capella (a versão mais divertida disponível), Dionísio Areopagita, Beda (o Venerável), Alcuíno, Al-Khwarizmi, Al-Kindi, Eurigena, Gerbert d'Aurillac (Papa Silvestre II), os Irmãos da Pureza, Fulbert, Ibn Sina (Avicena), Hugo de São Vitor, Bernardo Silvestre, Bernardo de Claraval, Hildegard von Bingen, Alanus ab Insulis (Alain de Lilles), Joaquim de Fiore, Ibn Arabi, Robert Grosseteste (o grande cientista inglês), Roger Bacon, Tomás de Aquino, Dante e Kepler.

Terminemos com uma citação dos pitagóricos, dos *Versos Dourados*: "E saberás que a lei [...] estabeleceu a natureza interna de todas as coisas de modo idêntico"; e com outra de Jâmblico: "Não foi por tua causa que o mundo (cosmos) foi gerado, mas foste tu que nasceste para o bem dele".

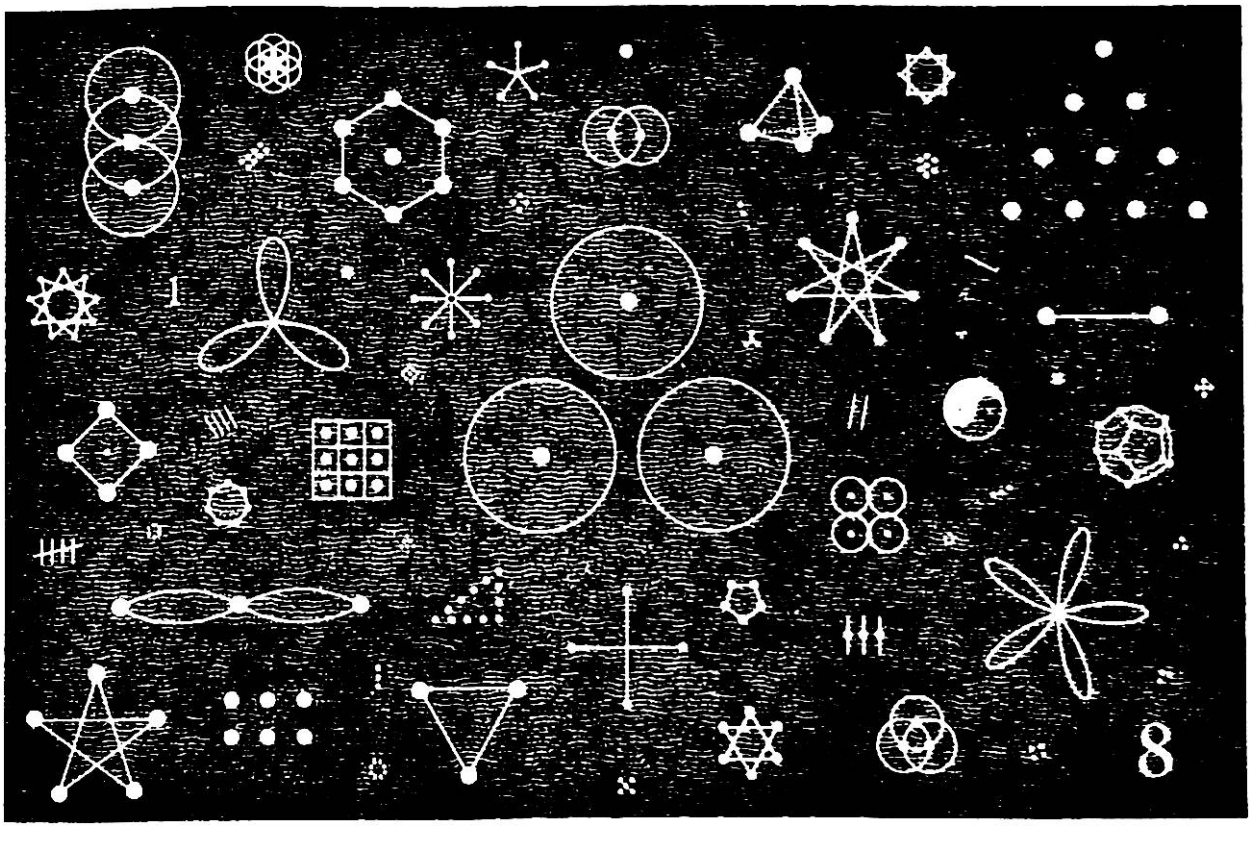
Keith Critchlow

Gravura do século XVI, de Gregor Reisch, que mostra Pitágoras usando uma prancha de contagem medieval para formar os números 1.241 e 82 (direita), enquanto Boécio faz cálculos usando os numerais indianos com que estamos familiarizados hoje em dia (esquerda). No centro está Aritmética, com as duas progressões geométricas 1-2-4-8 e 1-3-9-27 aparecendo em seu vestido.

L I V R O I

NÚMERO SAGRADO

As Qualidades Secretas das Quantidades



Miranda Lundy

Material adicional de Adam Tetlow e Richard Henry

Introdução

O que é o número? Como distinguimos um de muitos ou, por exemplo, o número dois do três? Um corvo, perturbado por quatro homens com armas de fogo indo esconder-se debaixo de sua árvore, voará para longe e cuidadosamente os contará à distância, antes de retornar a salvo para o ninho, enquanto eles voltam para casa novamente, um por um, cansados e famintos. Mas e se fossem cinco homens? Os corvos perdem a conta no número cinco.

Todos nós sabemos certas coisas sobre determinados números: que seis círculos cabem em torno de um; que há sete notas em uma escala musical; que contamos em dezenas; que três pernas fazem um banquinho ou cinco pétalas formam uma flor. Algumas dessas descobertas elementares são realmente as primeiras verdades universais com que deparamos, tão simples que nos esquecemos delas. Crianças em planetas distantes estão provavelmente tendo as mesmas experiências com essas quantidades elementares.

A ciência do número, e seu estudo, é das mais antigas na Terra, com sua origem perdida nas brumas do tempo. Culturas primitivas inscreviam números em cerâmica, em padrões de tecelagem, em ossos entalhados, em nós e monumentos de pedra, e associavam números aos seus deuses. Sistemas posteriores integraram os mistérios sob o mágico *Quadrivium* medieval da aritmética, geometria, música e astronomia – as quatro artes liberais necessárias para uma verdadeira compreensão das qualidades do número.

Toda ciência tem sua origem na magia,[1] e, nas escolas antigas, não havia magos sem conhecimento sobre o poder dos números. Nos dias atuais, a ciência do número sagrado foi usurpada por uma maré de números quantitativos, não previstos nestas páginas. O Livro I do *Quadrivium* é um guia para iniciantes sobre a aritmologia[2] mística, uma pequena tentativa de desvendar alguns dos muitos segredos e qualidades essenciais do número contido na Unidade.

A MÔNADA

Uma unidade

Unidade. O Uno. Deus. O Grande Espírito. Espelho de maravilhas. A eternidade imóvel. Permanência. Há incontáveis nomes para descrevê-lo.

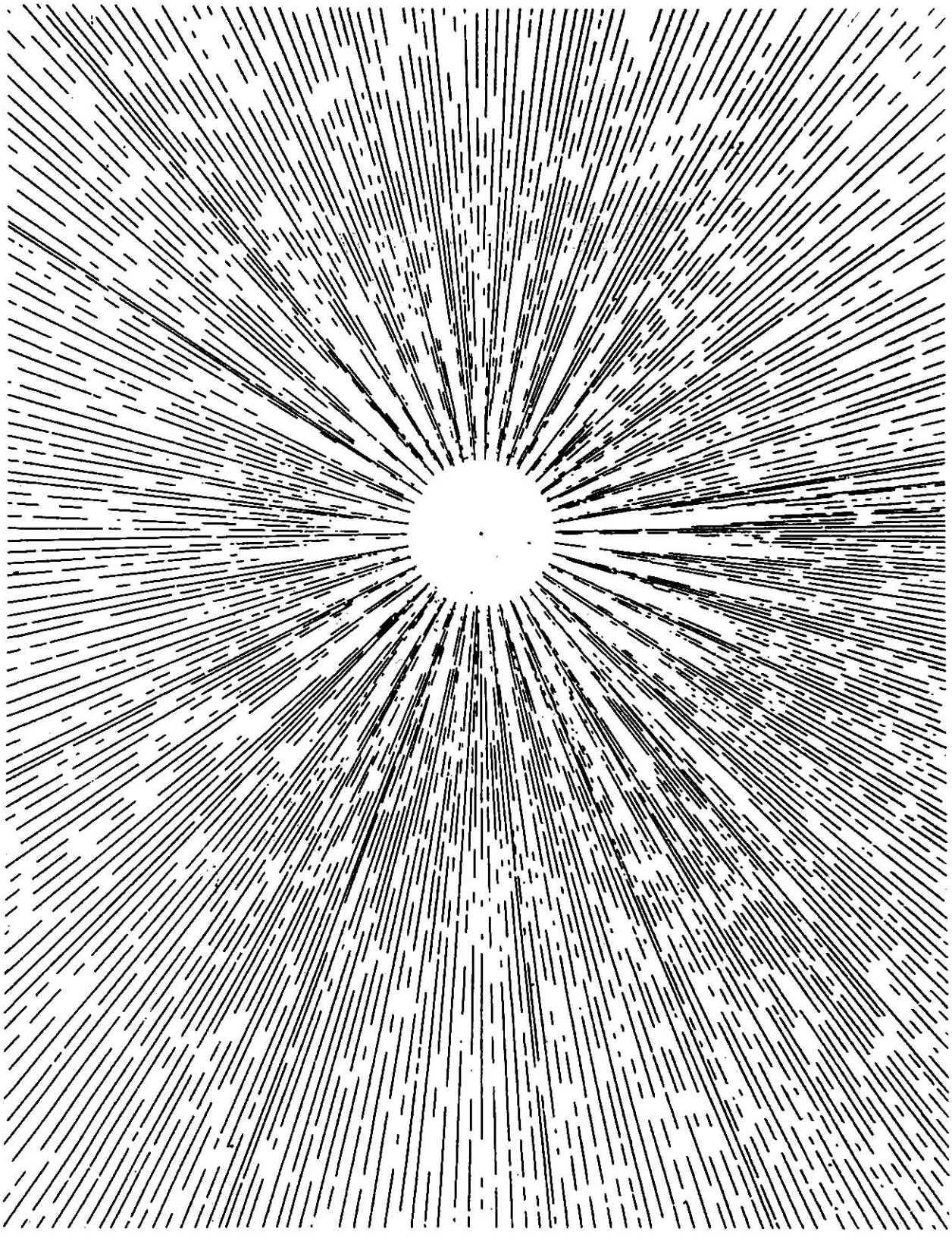
De acordo com certa perspectiva, não se pode realmente falar do Uno, porque falar dele é tomá-lo um objeto, o que implica estar separado dele, deturpando, assim, a essência da unidade desde o princípio – que é um enigma misterioso.

O Uno é o limite de todas as coisas: o primeiro antes do princípio e o último depois do fim; *alfa* e *ômega*; o molde que dá forma a todas as coisas e a única coisa formada por todos os moldes; a origem a partir da qual o universo emerge; é o próprio universo e o centro para o qual este retorna. É ponto, semente e destino.

O Uno ecoa em todas as coisas e trata a todos da mesma forma. Sua estabilidade entre os números é sem igual, permanecendo ele mesmo quando multiplicado ou dividido por si mesmo; e a unidade de qualquer coisa é unicamente aquela coisa. O Uno é, por si só, um todo, e não pode existir nada que o descreva.

Todas as coisas estão imersas no oceano sem fim da Unidade. A qualidade da unidade a tudo permeia, e, enquanto não há nada sem ela, também não há nada dentro dela – como ocorre até com uma comunicação ou uma ideia que necessita de partes que se relacionem entre si. Como a luz do sol ou a chuva suave, o Uno é incondicional em seu amor, mas sua majestade e mistério permanecem velados e fora do alcance da compreensão, pois somente o Uno pode compreender-se a si mesmo. O Uno é, por si só, um todo, e não pode existir nada que o descreva.

O Uno é simultaneamente círculo, centro e o mais puro som.



DUALIDADE

Opostos

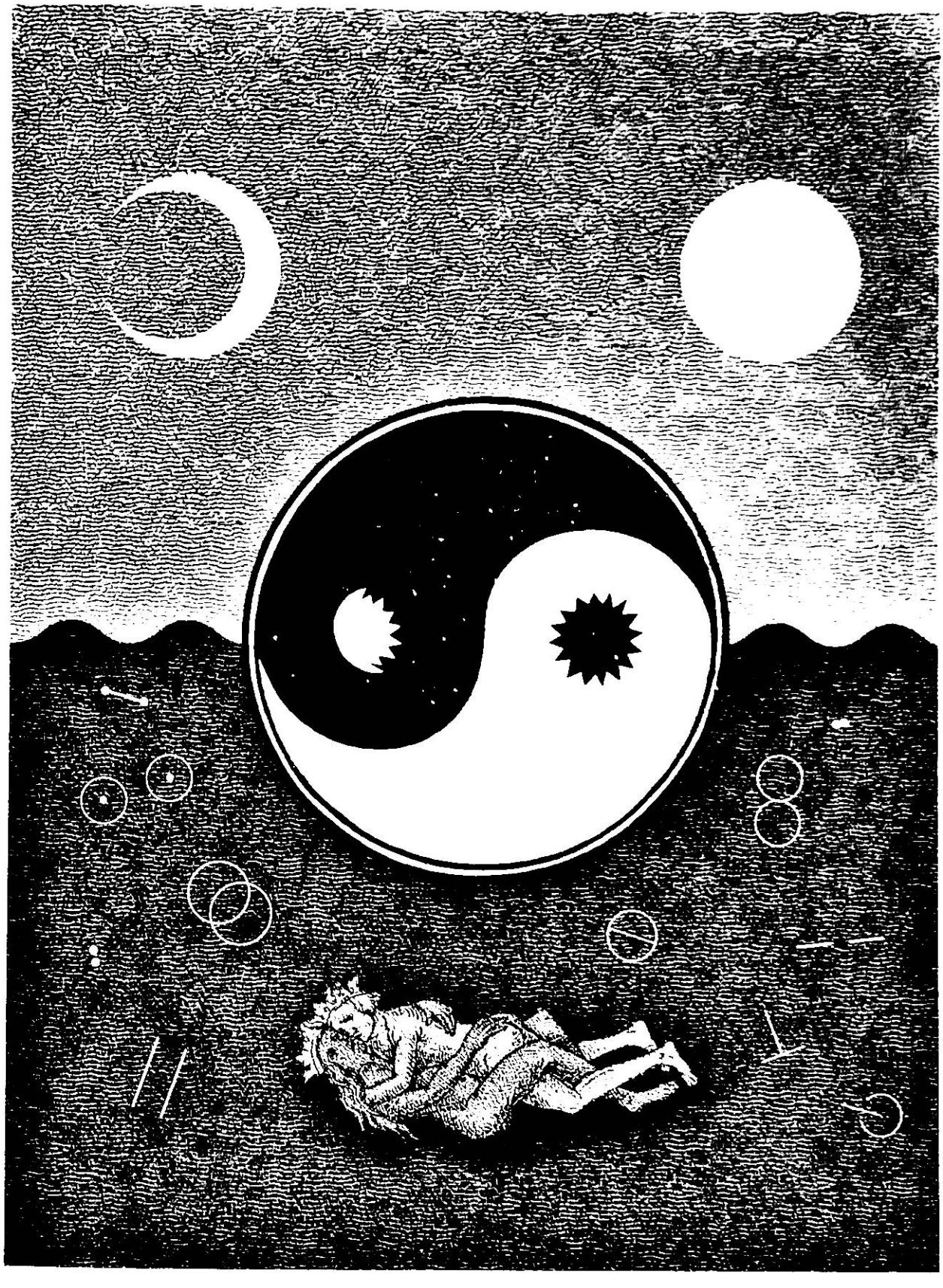
Há dois lados para cada moeda, e o outro lado é onde a díade vive. Dois é a sombra transcendental, oposta, polarizada e objetificada. Está lá, é o outro, aquilo e não isto, e é essencial como base de comparação; é o método através do qual nossa mente conhece as coisas. Há inúmeros nomes para o par divino.

Para os pitagóricos, o *dois* era o primeiro número sexuado, par e feminino. Para desenvolver a sua apreciação pela dualidade, eles contemplavam pares de opostos puros, como limitado e ilimitado, ímpar e par, um e muitos, direita e esquerda, masculino e feminino, repouso e movimento, reto e curvo. Podemos também pensar nas cargas positiva e negativa em eletromagnetismo, e no inspirar e expirar de nossa respiração.

A díade aparece em música como a relação 2:1, quando experimentamos uma nota similar, uma oitava acima ou abaixo, com o dobro ou a metade da altura do som. Em geometria, aparece como uma linha, dois pontos ou dois círculos.

Linguisticamente, quando falamos de ambas as partes de alguma coisa que funcionam como uma unidade, usamos o prefixo *bi*, como em *bicicleta* ou *binário*, mas, quando a qualidade de divisão do número dois é invocada, as palavras começam com o prefixo *di*, como em discórdia ou diversão. A distinção entre "eu" e "não eu" é uma das primeiras e a última que geralmente fazemos.

Se os filósofos modernos pararem para pensar na dualidade, podem chegar um pouco mais longe que os filósofos da Antiguidade. Todos experimentam uma esquerda e uma direita, frente e verso, para cima e para baixo, através de dois olhos e de dois ouvidos. Tanto os homens como as mulheres vivem sob o Sol e a Lua, algumas vezes lembrando quão milagrosamente equilibrados eles parecem, a aparentar o mesmo tamanho no céu, um brilhando de dia e o outro, à noite.



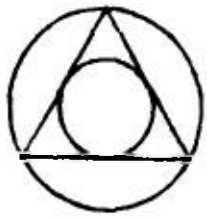
TRÊS
É demais

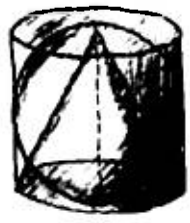
Masculino em algumas culturas, feminino em outras, o três constrói, como uma árvore, uma ponte entre o céu e a terra. A tríade liga dois opostos como seu composto, sua solução ou seu mediador. É a síntese ou o retorno à unidade após a divisão em dois, e tradicionalmente é o primeiro número ímpar.

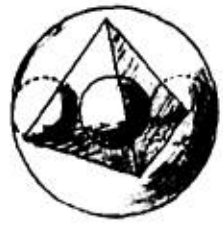
A terceira perna de um banco dá a ele equilíbrio. Sem um terceiro cordão ou fita não se pode amarrar uma trança (os nós só podem ser amarrados em um espaço tridimensional). Histórias, contos de fadas e tradições espirituais são ricos em simbolismo ao redor do prodigioso três, fazendo malabarismos entre passado, presente e futuro, e entre conhecedor, conhecimento e conhecido. Assim como em nascimento, vida e morte, a tríade aparece por toda a parte na natureza, em princípio e forma. O triângulo, o dispositivo mais simples e estrutural da trindade, é o primeiro polígono estável e define nossa primeira superfície.

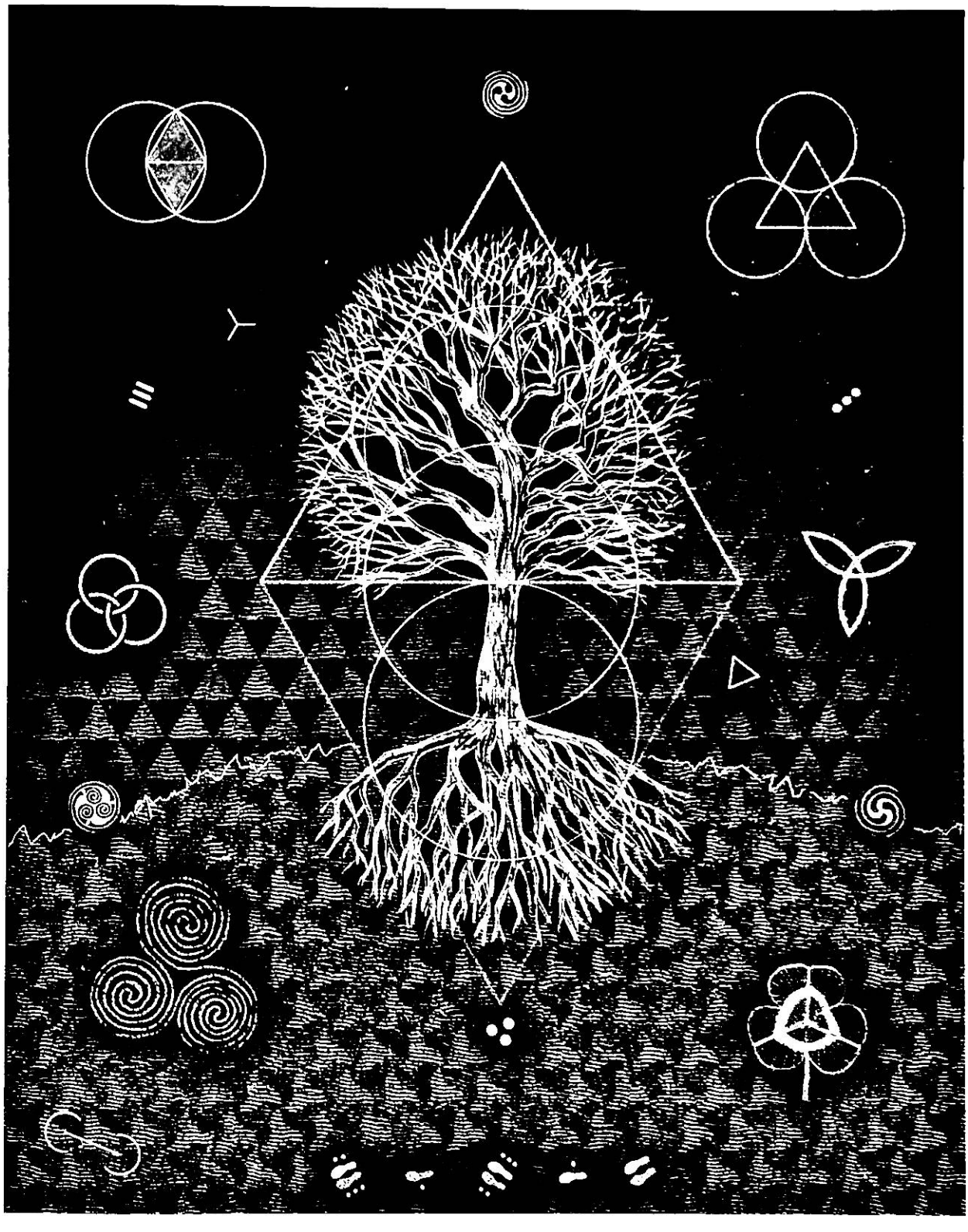
Em música, as relações 3:2 e 3:1 definem os intervalos da quinta[3] e suas oitavas, as mais belas harmonias que podem ser produzidas, além da oitava propriamente dita, e a chave para as afinações na Antiguidade. Três é o primeiro número triangular.

A *vesica piscis*,[4] formada por dois círculos sobrepostos (*canto superior esquerdo, imagem ao lado*), imediatamente invoca triângulos. Um triângulo equilátero dentro de um círculo define a oitava, de forma que a área desse círculo ou anel (*abaixo à esquerda*) é o triplo da área do círculo menor. Abaixo, na figura central, vemos a descoberta favorita de Arquimedes (287–212 a.C.): os volumes do cone, da esfera e do tambor (cilindro) estão na proporção de 1:2:3.









QUATERNIDADE

Dois pares

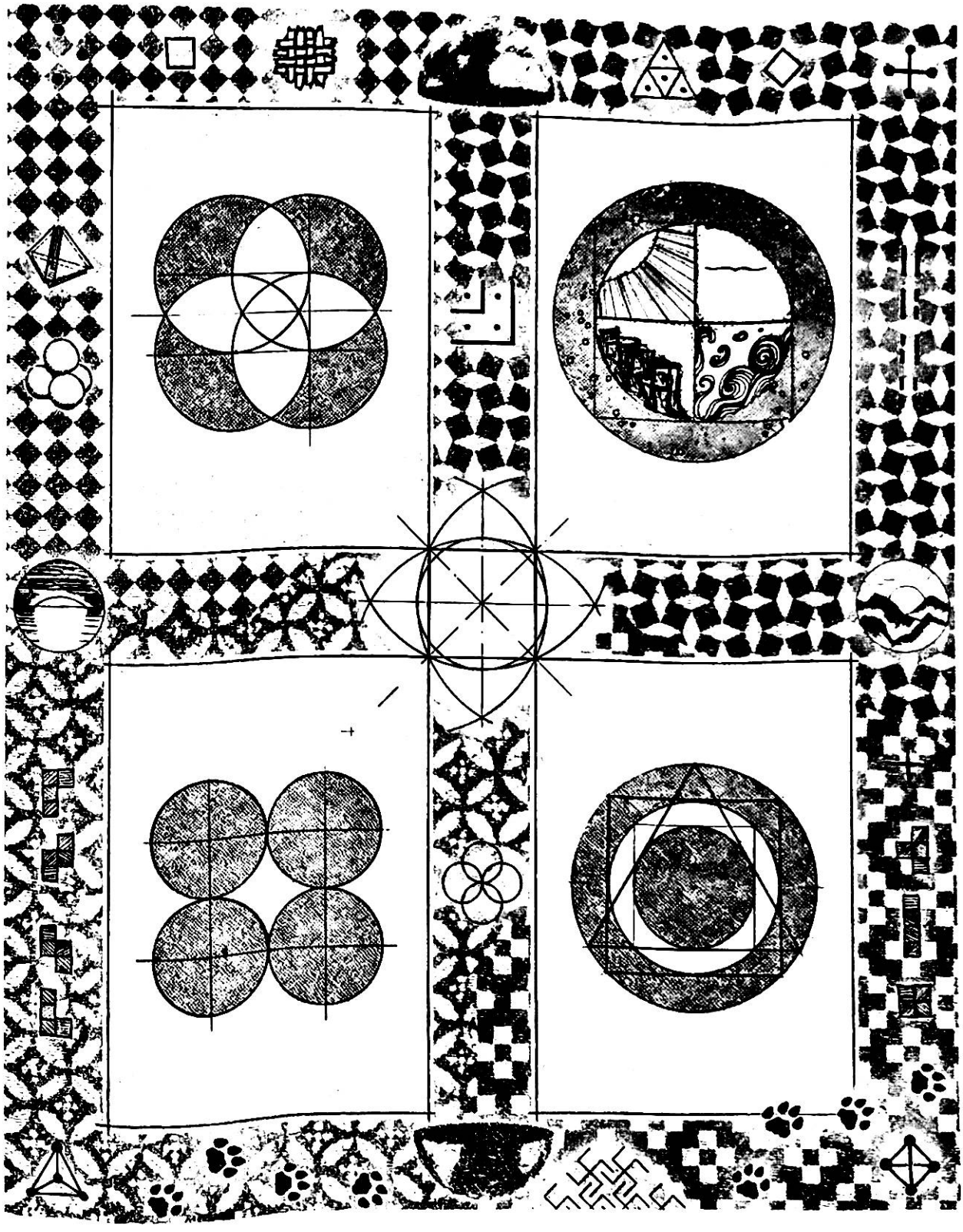
Para além do três, entramos no reino da manifestação. O quatro é a primeira coisa a nascer, o primeiro produto da procriação, dois pares. A tétrade é, portanto, o primeiro número quadrado depois do número um, e um símbolo da Terra e do mundo natural.

O quatro é a base do espaço tridimensional. O sólido simples conhecido como tetraedro, ou "quatro faces", é formado por quatro triângulos, ou quatro pontos ou esferas, e é um elemento fundamental para a estrutura do espaço tridimensional, assim como o triângulo o é para o plano.

O quatro é geralmente associado com os modos materiais de manifestação – fogo, ar, terra e água. Um quadrado ao redor de um círculo define um anel celestial cuja área é igual à do círculo incluso (*canto superior direito da imagem*). Os solstícios e equinócios dividem o ano em quatro partes ou trimestres, os cavalos andam sobre quatro patas, e outras manifestações terrenas do número quatro são abundantes.

Como um quadrado estático, o quatro é repetido pela cruz dinâmica. A interação entre a cruz e o quadrado está codificada no tradicional rito de orientação para a construção de um novo prédio, onde as sombras de um pilar central, provocadas pelo nascer e pelo pôr do sol, indicam o eixo simbólico leste-oeste. O princípio da quadratura é universal, e aparece em textos chineses antigos e nos escritos de Vitrúvio.[5] Sobrevive até os dias de hoje no termo quarteirão (ou quadra), que se refere à divisão urbana em que conjuntos de moradias são cercados por quatro ruas.[6]

Toda a matéria é apropriadamente composta de apenas quatro partículas: prótrons, nêutrons, elétrons e neutrinos. Em música, o quatro aparece como o terceiro sobretom, na relação 4:1, que se forma por duas oitavas, e também na relação 4:3, conhecida como quarta,[7] que é o complemento da quinta dentro de uma oitava.



CINCO

A própria vida

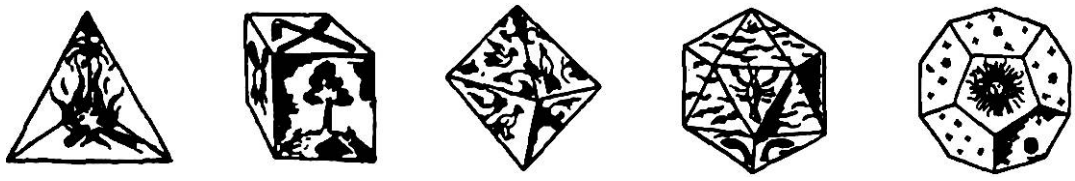
A qualidade do cinco é mágica. As crianças costumam desenhar estrelas de cinco pontas instintivamente, e todos nós pressentimos sua característica energética e expressiva.

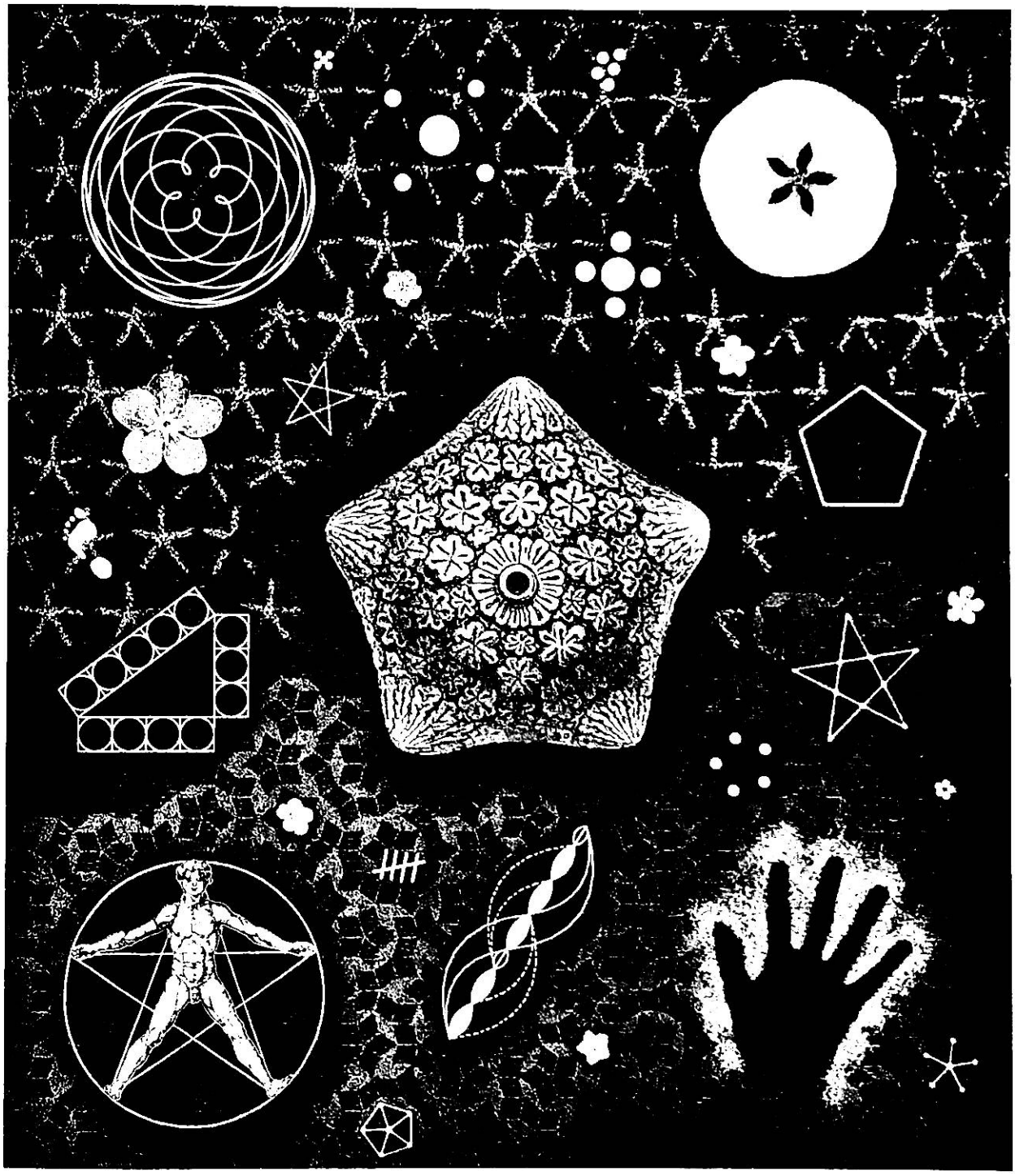
O cinco casa homens e mulheres – como os números dois e três, em algumas culturas, ou três e dois em outras – e, assim, é o número universal da reprodução e da vida biológica. Também é o número da água, com cada uma de suas moléculas sendo o canto de um pentágono. A própria água é uma incrível estrutura de cristal líquido de icosaedros flexíveis, sendo este um dos cinco sólidos platônicos (*abaixo, segundo a partir da direita*), com cinco triângulos encontrando-se em cada vértice. Como tal, a água mostra sua qualidade de fluidez, dinamismo e vida. As coisas secas estão mortas ou estão à espera de água.

O cinco é encontrado em maçãs, flores, mãos e pés. Vênus, o planeta mais próximo da Terra, e que recebeu o nome da deusa romana do amor e da beleza, desenha um lindo padrão quíntuplo ao girar em torno do Sol (*canto superior esquerdo, imagem ao lado*).

A escala musical mais universal, a pentatônica, é formada por cinco notas (as teclas escuras de um piano), agrupadas em dois e três. Na Renascença, a procura de intervalos musicais que envolvessem o número cinco – como a terceira clave maior, que usa a relação 5:4 – produziu a escala musical moderna.

O cinco também é a diagonal de um retângulo de três por quatro. Todavia, ao contrário dos números três e quatro, o cinco despreza o plano, aguardando que a terceira dimensão se encaixe para produzir o quinto elemento.





TODAS AS COISAS EM SEIS

O feitiço

Assim como seu gracioso arauto, o floco de neve, o seis ou sexteto carrega em si a perfeição, a estrutura e a ordem. É o casamento, por multiplicação, do dois com o três, do par e do ímpar, e também é o número da criação – pelo tema comum nas Escrituras bíblicas, segundo o qual o cosmos foi criado em seis dias.[8]

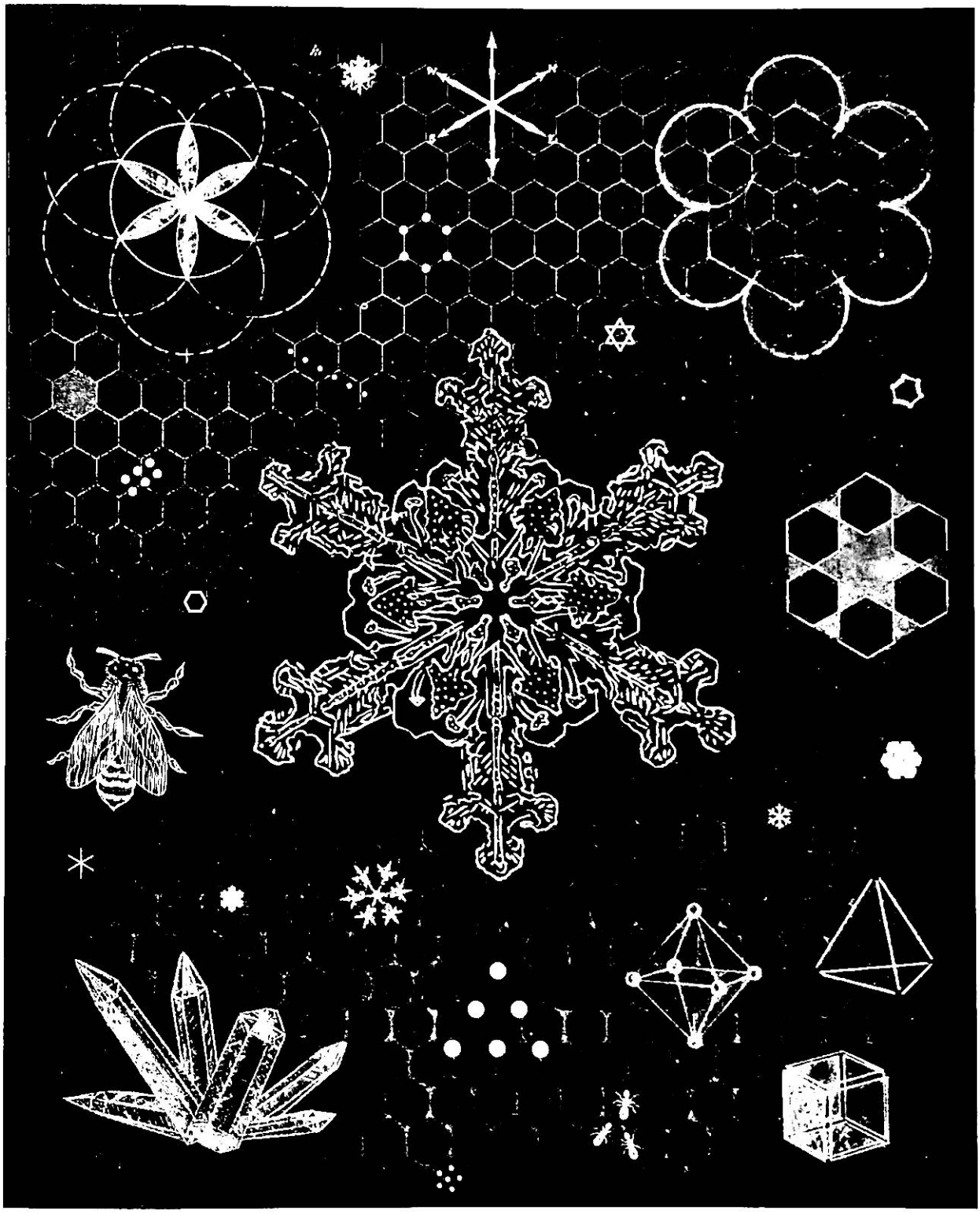
Os números inteiros que dividem outros números são conhecidos como os seus divisores. A maioria dos números possui um conjunto de divisores próprios cuja soma resulta em um número menor que eles, sendo, por isso, conhecidos como números deficientes.[9] O número seis é, de maneira harmoniosa, a soma e o produto dos três primeiros números, e seus divisores também são um, dois e três, que, somados, resultam no próprio número seis, fazendo dele o primeiro número perfeito.

O raio de um círculo pode girar por sua circunferência exatamente em seis arcos idênticos para inscrever um hexágono regular; e seis círculos idênticos encaixam-se perfeitamente ao redor de um círculo central (*canto superior direito, imagem ao lado*). Além do triângulo e do quadrado, o hexágono é o último polígono regular que pode ser perfeitamente colocado lado a lado, com cópias idênticas de si mesmo, para preencher o plano.

As três dimensões contribuem para as seis direções – para a frente, para trás, para a esquerda, para a direita, para cima e para baixo –, e estas estão incorporadas nas seis faces do cubo, nos seis cantos de um octaedro e nas seis arestas de um tetraedro (*canto inferior direito, imagem ao lado*). O seis aparece amplamente em estruturas cristalinas como os flocos de neve, o quartzo e o grafite, e os hexágonos dos átomos de carbono formam a base da química orgânica. Basta adicionar água.

O conhecido triângulo de Pitágoras,[10] com lados 3, 4 e 5, tem uma área[11] e um semiperímetro[12] que equivalem a seis. Em música, o seis também é a oitava pentatônica.

Os insetos movimentam-se ou rastejam em seis pernas, e as abelhas organizam instintivamente sua seca secreção de cera em um favo de mel hexagonal.



SEPTETO

As sete irmãs

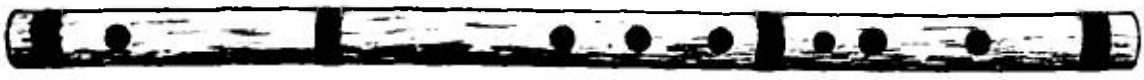
O sete é a Virgem: permanece de pé por si só e tem pouco que ver com qualquer dos outros números simples. Em música, uma escala de sete tons surge tão naturalmente quanto a sua irmã, a escala de cinco tons. São as teclas brancas do piano, que produzem os sete modos da Antiguidade, um padrão universal. Como todos os demais números, o sete incorpora o número que o antecede. Em relação ao espaço, funciona como o centro espiritual do número seis, da mesma forma que seis direções emanam de um ponto no espaço e seis círculos circundam um sétimo que repousa em um plano.

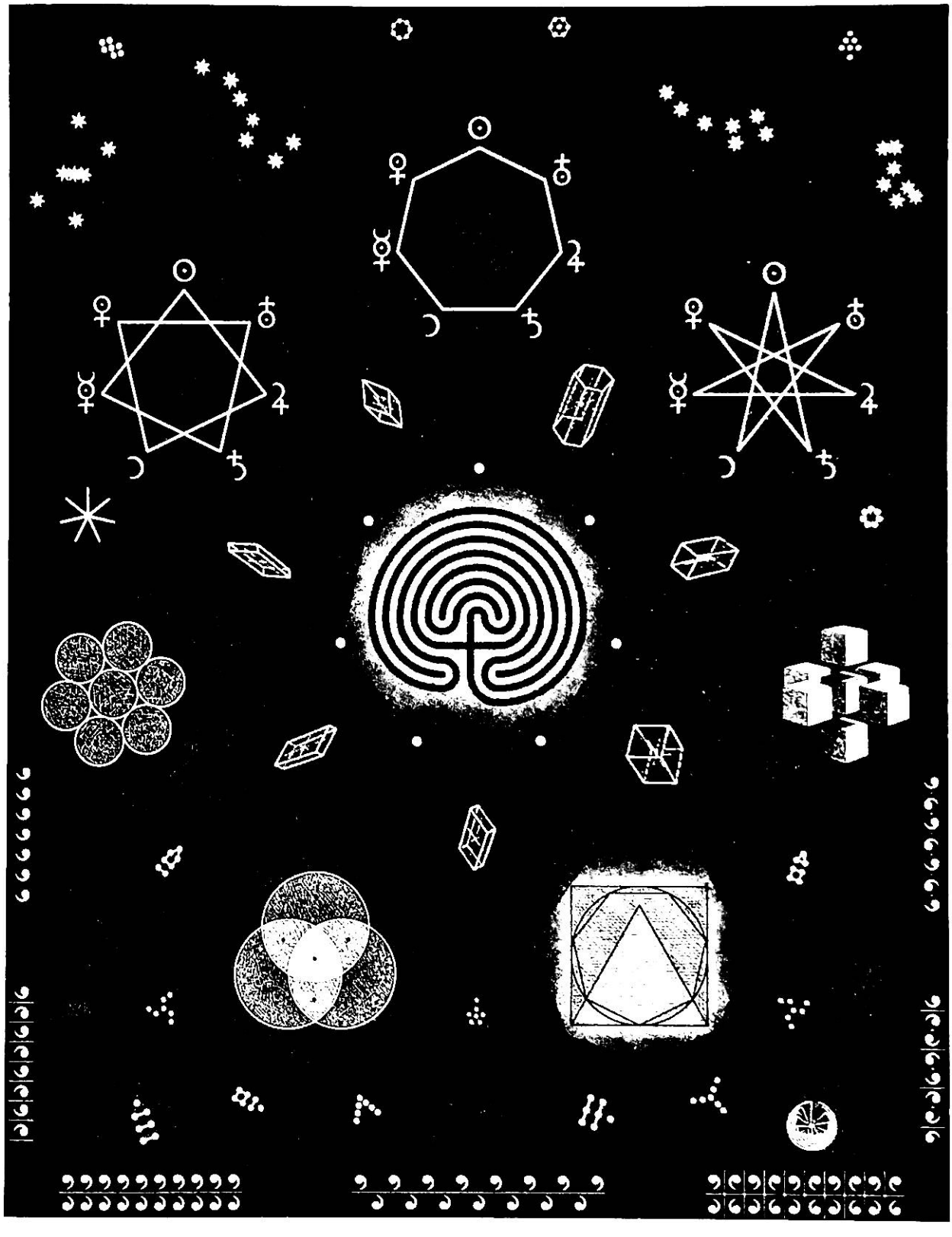
As fases da Lua são amplamente contadas em quatro grupos de sete, com uma misteriosa noite sem lua, ou duas noites, para completar o seu verdadeiro ciclo.

Nossos olhos podem perceber três cores primárias de luz – vermelho, verde e azul – que se combinam para produzir mais quatro cores – amarelo, ciano, magenta e branco. De acordo com os antigos hindus, um arco-íris vertical de sete centros de energia sutil, ou "chacras", sobe por nosso corpo. Hoje em dia, entendemos esses centros como as sete glândulas endócrinas.[13]

Os sete planetas da Antiguidade, organizados segundo a ordem de sua velocidade aparente (*centro superior, imagem ao lado*), fazem surpreendentes conexões com os metais (*canto superior esquerdo, imagem ao lado*) e com os dias da semana (*canto superior direito, imagem ao lado*): Lua – ☽ – prata – segunda-feira, Mercúrio – ☿ – mercúrio – quarta-feira, Vênus – ♀ – cobre – sexta-feira, Sol – ☉ – ouro – domingo, Marte – ♂ – ferro – terça-feira, Júpiter – ♃ – estanho – quinta-feira, Saturno – ♄ – chumbo – sábado (*ver também página 307*).

Há sete tipos de simetria de friso,[14] sete grupos de estruturas de cristal e sete serpentinas, ou espirais, no labirinto tradicional (*todos na imagem ao lado*).





OITO

Um par de quadrados

O oito equivale a dois vezes dois vezes dois e, como tal, é o primeiro número cúbico depois do um. Como o número de vértices do cubo ou faces do octaedro, o oito é completo. No plano molecular, isso é demonstrado pelos átomos, que anseiam por ter um conjunto completo de oito elétrons (oitava) em sua camada mais externa. Um átomo de enxofre possui seis elétrons em sua camada mais externa, de modo que oito átomos desse elemento se juntam para compartilhar elétrons, formando um anel de enxofre octogonal.

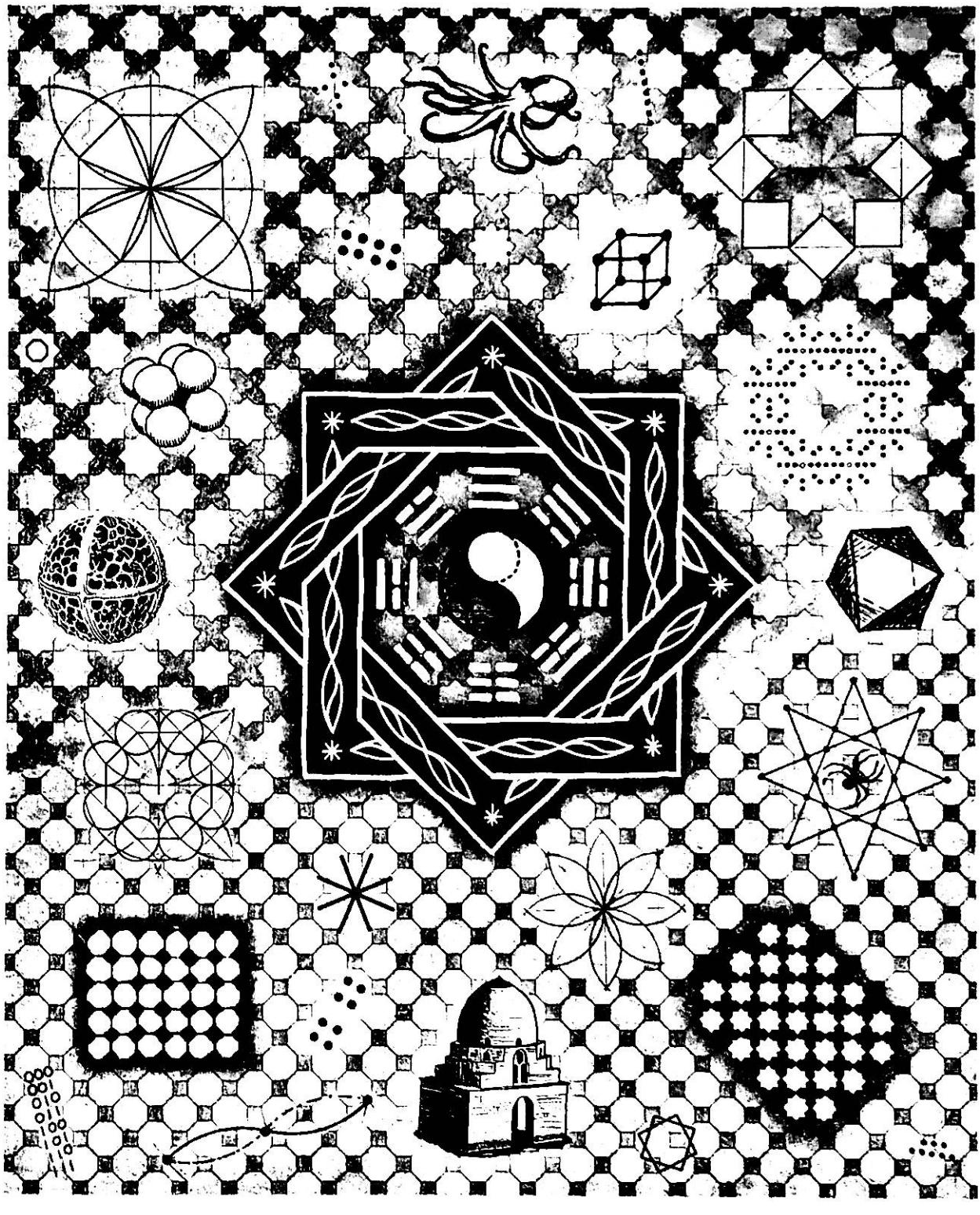
Em arquitetura, o octógono geralmente significa a transição entre o Céu e a Terra, como uma ponte entre o círculo e o quadrado. Uma cúpula esférica frequentemente coroa uma estrutura cúbica por meio de uma bela abóbada octogonal.

O oito é particularmente reverenciado na religião e na mitologia do Oriente. O oráculo chinês antigo conhecido por I Ching está baseado em combinações de oito trigramas, sendo cada um o resultado de uma escolha dupla entre uma linha quebrada ou uma não quebrada, reproduzida três vezes. No centro da imagem ao lado, encontra-se a "Sequência do Céu Anterior", que representa o padrão ideal de transformações no cosmo.[15] Note-se que cada trigrama é o complemento de seu oposto.

No simbolismo religioso, o oitavo passo é frequentemente associado à evolução espiritual ou à salvação. Isso pode resultar do fato de que, em uma escala musical de sete notas, o oitavo tom, que é a oitava, tem o dobro da altura do som da primeira nota, sinalizando o movimento para um novo nível.

No mundo moderno, os computadores "pensam" em encantadoras unidades chamadas *"bytes"*, cada uma delas formada por oito *"bits"* binários (0 ou 1).

As aranhas possuem oito pernas, e os polvos possuem oito tentáculos.



A ENÉADE

Três números três

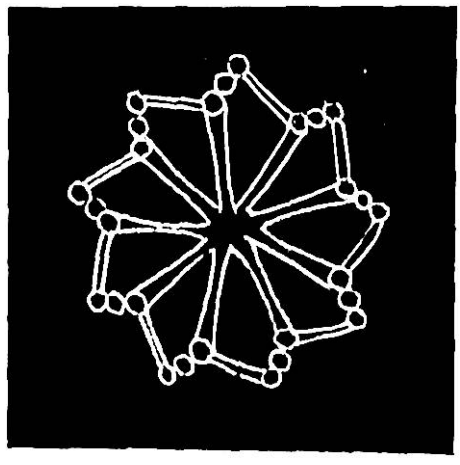
O nove é a tríade das tríades, o primeiro número quadrado ímpar, e, com ele, algo extraordinário acontece: pela primeira vez, nove números podem ser organizados em um quadrado mágico no qual a soma dos três números de cada linha, em qualquer direção, resulta no mesmo total (*centro, imagem ao lado*). Esse antigo padrão numérico foi detectado pela primeira vez há quatro milênios, sobre o casco de uma tartaruga divina que emergia do Rio Lo, na China.

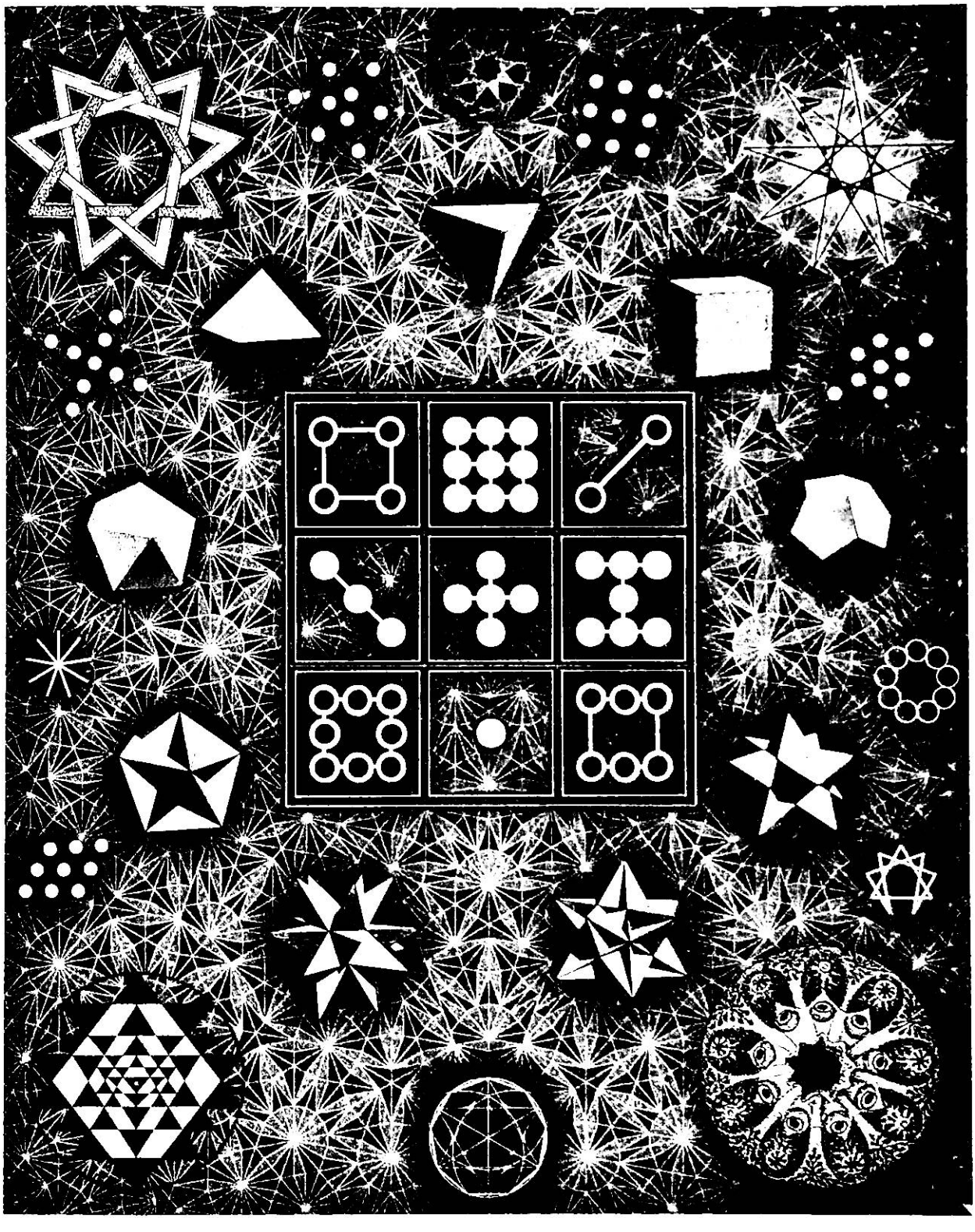
Três vezes três é um número a mais que dois vezes dois vezes dois, e a relação entre nove e oito define o fundamental tom inteiro em música, a semente 9:8 a partir da qual a escala emerge, assim como a diferença entre as duas harmonias mais simples na oitava: a quinta 3:2 e a quarta 4:3.

Existem nove formas tridimensionais regulares: os cinco sólidos platônicos e os quatro poliedros estelares de Kepler-Poinsot (*ver Livro III*).

O nove aparece em nosso corpo como a seção transversal dos cílios tentaculares que movem as coisas ao redor de nossas superfícies, e os feixes de microtubos nos centríolos que são essenciais para a divisão celular (*figura abaixo*).

O nove é o número celestial da ordem, e muitas tradições antigas falam de nove mundos, esferas ou níveis de realidade. Os gatos sabem bem disso, pois têm nove vidas, são cheios de nove-horas, e nove entre dez deles parecem passar a maior parte do tempo nas nuvens, seja lá onde isso for.[16]





DEZ

Dedos e polegares

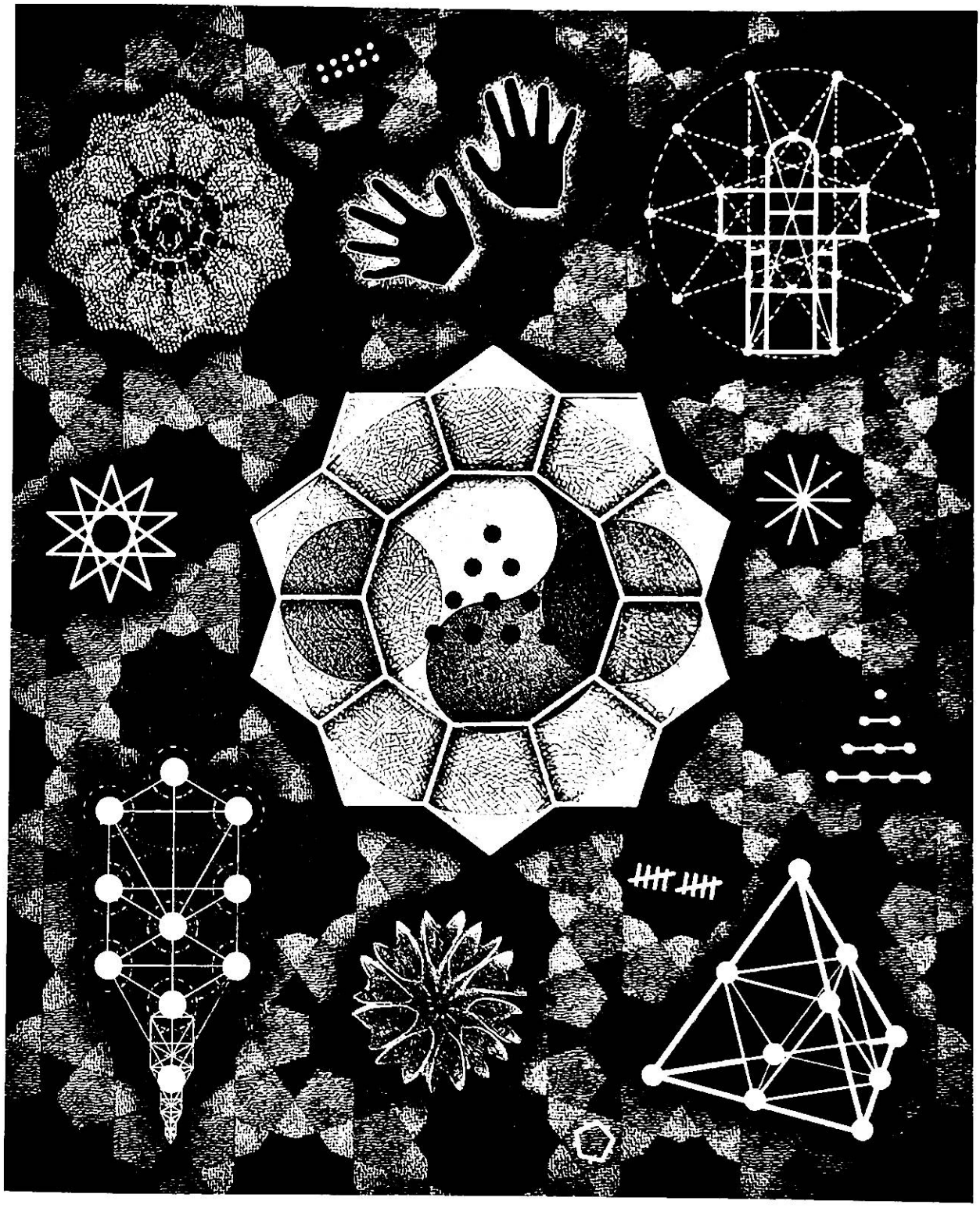
O fato de os humanos terem oito dedos mais dois polegares deve ter operado em favor do dez, pois uma variedade de culturas – como a dos incas, a dos indianos, a dos berberes, a dos hititas e a dos minoicos – adotou esse número como a base de seus sistemas de contagem. Hoje em dia, todos nós usamos a base decimal. O dez é filho do cinco e do dois, e previsivelmente a palavra *dez* deriva do indo-europeu *dekm*, que significa "duas mãos".

O número dez é particularmente formado pela soma dos quatro primeiros números – assim, $1+2+3+4 = 10$ –, fato de profundo significado para os pitagóricos, que o imortalizaram na figura do Tetraktys (*pontos pretos na figura central da imagem*) e o chamaram Universo, Céu e Eternidade. Além de ser o quarto número triangular, o dez também é o terceiro número tetraédrico (*canto inferior direito da imagem*), fato que lhe dá grande importância como um número que simultaneamente constrói formas triangulares bidimensionais e tridimensionais.

O dez é formado por dois pentágonos, e dez pentágonos assentam perfeitamente em torno de um decágono (*centro da imagem*). O DNA, apropriadamente a chave para a reprodução da vida, tem cada uma das voltas de sua dupla hélice composta de dez passos, e por isso aparece, numa seção transversal, como uma roseta com dez pétalas (*canto superior esquerdo da imagem*).

Na Árvore da Vida da cabala judaica há dez *sefirot*[17] (*canto inferior esquerdo da imagem*), e a simetria décupla era frequentemente usada na arquitetura gótica (*canto superior direito da imagem*).

Platão acreditava que a década ou dezena contivesse todos os números, e, para a maioria de nós hoje em dia, realmente contém, já que podemos expressar praticamente qualquer número que pensarmos em termos de apenas dez símbolos simples.



"ONZES"

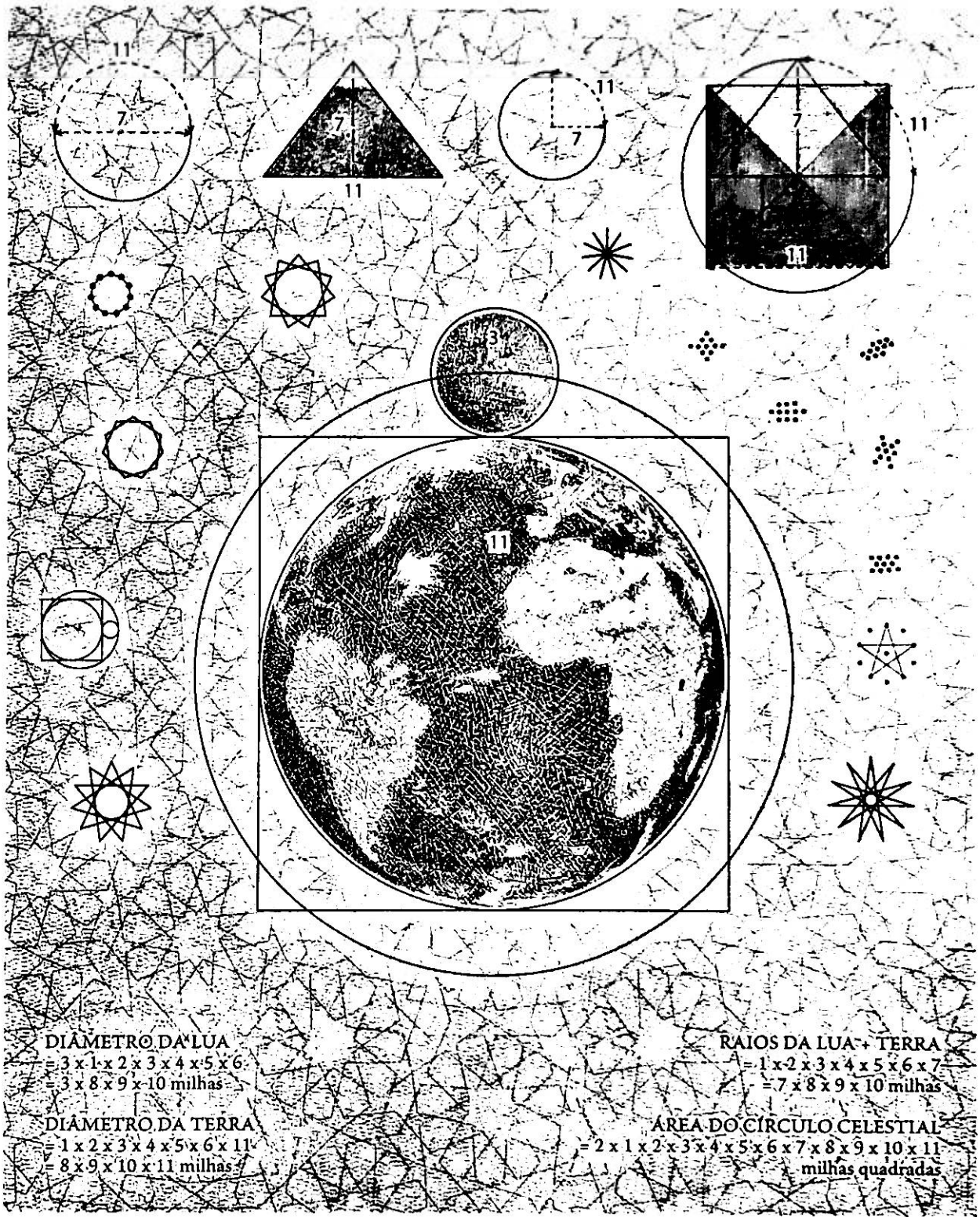
A medida e a Lua

O onze é um número misterioso do submundo – em alemão, atende pelo nome apropriado de *elf*. Um número importante, por ser o primeiro que nos permite começar a compreender a medida de um círculo. Isto porque, por razões práticas, um círculo que meça *sete* de diâmetro terá o onze como metade da medida de sua circunferência (*canto superior esquerdo da imagem*).

Esse relacionamento entre o onze e o sete foi considerado tão profundo pelos antigos egípcios que eles o utilizaram como base para o projeto da Grande Pirâmide. Um círculo traçado ao redor da elevação da Grande Pirâmide tem o mesmo perímetro de sua base quadrada. A conversão planejada de sete por onze vezes entre quadrado e curva é demonstrada por inúmeros estudos.

Os antigos eram obcecados por medidas, e o número onze é central em seu sistema metrológico. A imagem mostra o fato extraordinário de que o tamanho da Lua está relacionado ao tamanho da Terra assim como o três está relacionado ao onze. Isso significa que, se atrairmos a Lua até tocar a superfície da Terra, como apresentado na imagem, então um círculo celestial que passe através da Lua terá uma circunferência com medida igual ao perímetro do quadrado em torno da Terra. Isso é chamado "quadratura do círculo". Jamais saberemos exatamente como os velhos druídas descobriram isso, mas eles obviamente o conseguiram, pois a Lua e a Terra são mais bem medidas em milhas, como mostrado na imagem. De forma mágica, um arco-íris duplo também faz a quadratura do círculo (*ver página 80*).

Onze, sete e três são todos números da sequência Lucas,[18] irmãos dos números da sequência Fibonacci, na qual novos números são sempre formados pela soma dos dois números anteriores. A sequência Fibonacci começa com 1, 1, 2, 3, 5 e 8, enquanto a sequência Lucas começa com 2, 1, 3, 4, 7 e 11.



DIÂMETRO DA LUA
= 3 x 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6
= 3 x 8 x 9 x 10 milhas

RAIOS DA LUA + TERRA
= 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7
= 7 x 8 x 9 x 10 milhas

DIÂMETRO DA TERRA
= 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 11
= 8 x 9 x 10 x 11 milhas

ÁREA DO CÍRCULO CELESTIAL
= 2 x 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11
milhas quadradas

O DOZE

Céu e Terra

Doze é o primeiro *número abundante*, com a soma de seus divisores – um, dois, três, quatro e seis – resultando em um valor maior que ele mesmo. Doze pontos em um círculo podem juntar-se para formar quatro triângulos, três quadrados ou dois hexágonos (*figura central, imagem ao lado*). Como o produto de três e quatro, o doze é também ocasionalmente associado com a soma desses dois números, o sete.

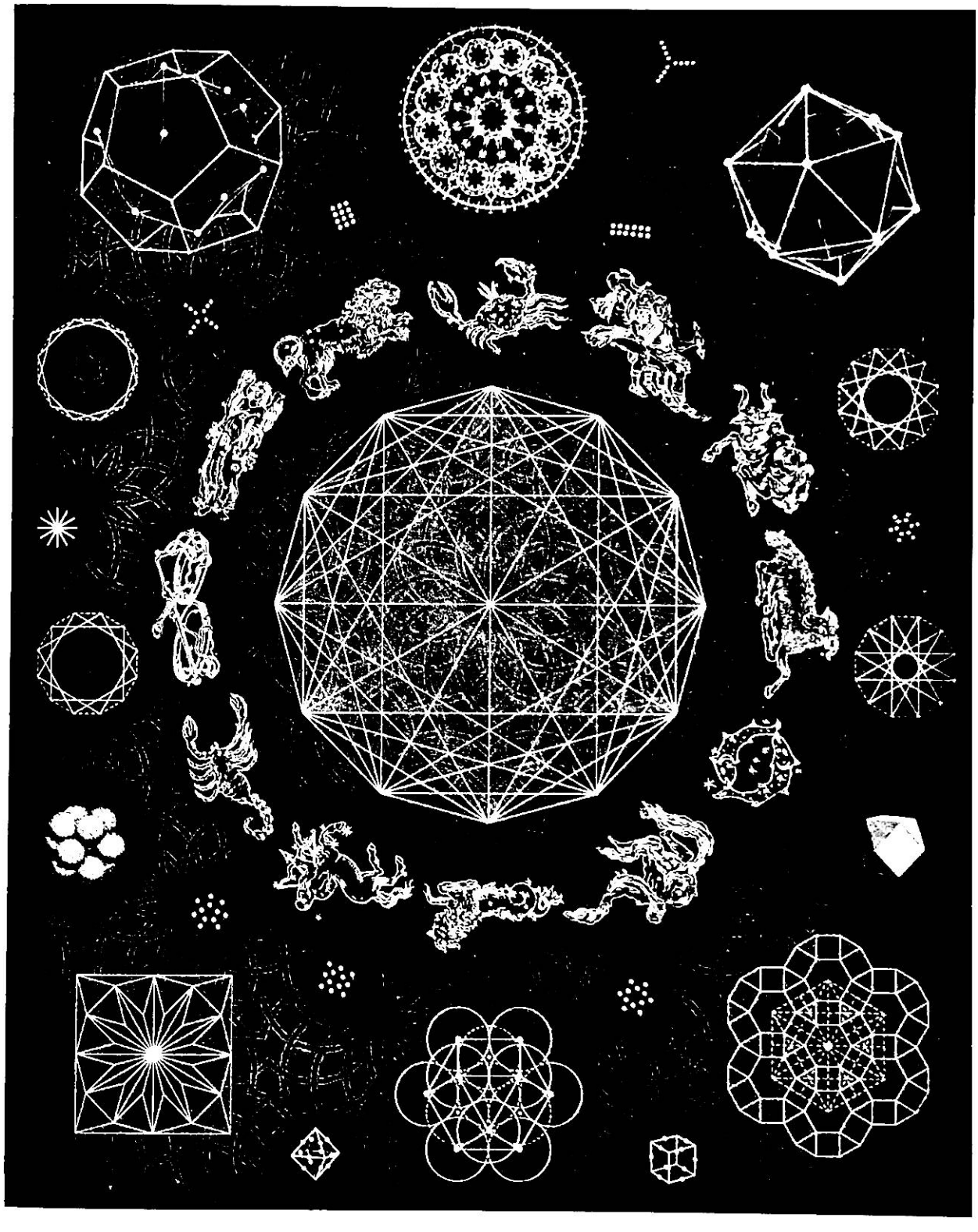
O doze desfruta da terceira dimensão e é o número de arestas tanto do cubo quanto do octaedro. O icosaedro tem doze vértices, e seu dual, o dodecaedro (literalmente, "doze faces"), tem faces que são pentágonos regulares. Doze esferas cabem perfeitamente ao redor de uma décima terceira para definir um cuboctaedro. Encontraremos esses poliedros mais adiante.

Em uma escala de sete notas, as notas crescem como um padrão de cinco tons e dois semitons (*figura abaixo*). Na afinação moderna, os cinco tons são divididos para criar uma escala de doze semitons idênticos, a bem-humorada escala de doze tons que ouvimos todos os dias.

Curiosamente, o triângulo pitagórico mais simples, depois do triângulo com lados três-quatro-cinco, tem lados com unidades de cinco, doze e treze.

Na mitologia, encontramos frequentemente o doze organizado ao redor de um herói solar central, e há muitas nações formadas por doze tribos. Na antiga China, no antigo Egito e na antiga Grécia, as cidades eram amiúde divididas em doze distritos, e geralmente há doze luas cheias em um ano.

Atualmente, o universo material é compreendido como sendo formado por três gerações de quatro partículas fundamentais, doze ao todo.



CONVENÇÕES E CONTAGENS

Em direção a números mais altos

O número treze, o conciliábulo, adorado pelos antigos maias e fundamental para a estrutura de um baralho de cartas, é um número Fibonacci que se manifesta nos movimentos de Vênus, para o qual treze anos equivalem a oito dos nossos. Para que você não ache que é um número de azar, lembre-se de que o mestre de doze discípulos é o décimo terceiro membro do grupo, assim como, em música, o décimo terceiro tom da escala cromática completa a oitava.

O quatorze, como o dobro de sete, e o quinze, como o triplo de cinco, possuem qualidades únicas, mas começam a demonstrar como os números mais altos e não primos tendem a ser percebidos em termos de seus fatores.

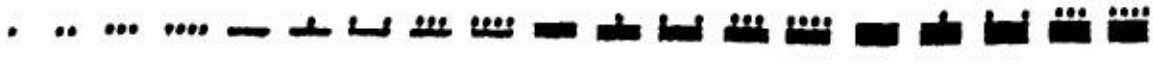
O dezesseis é 2 x 2 x 2 x 2, o quadrado de quatro (ele próprio um quadrado).

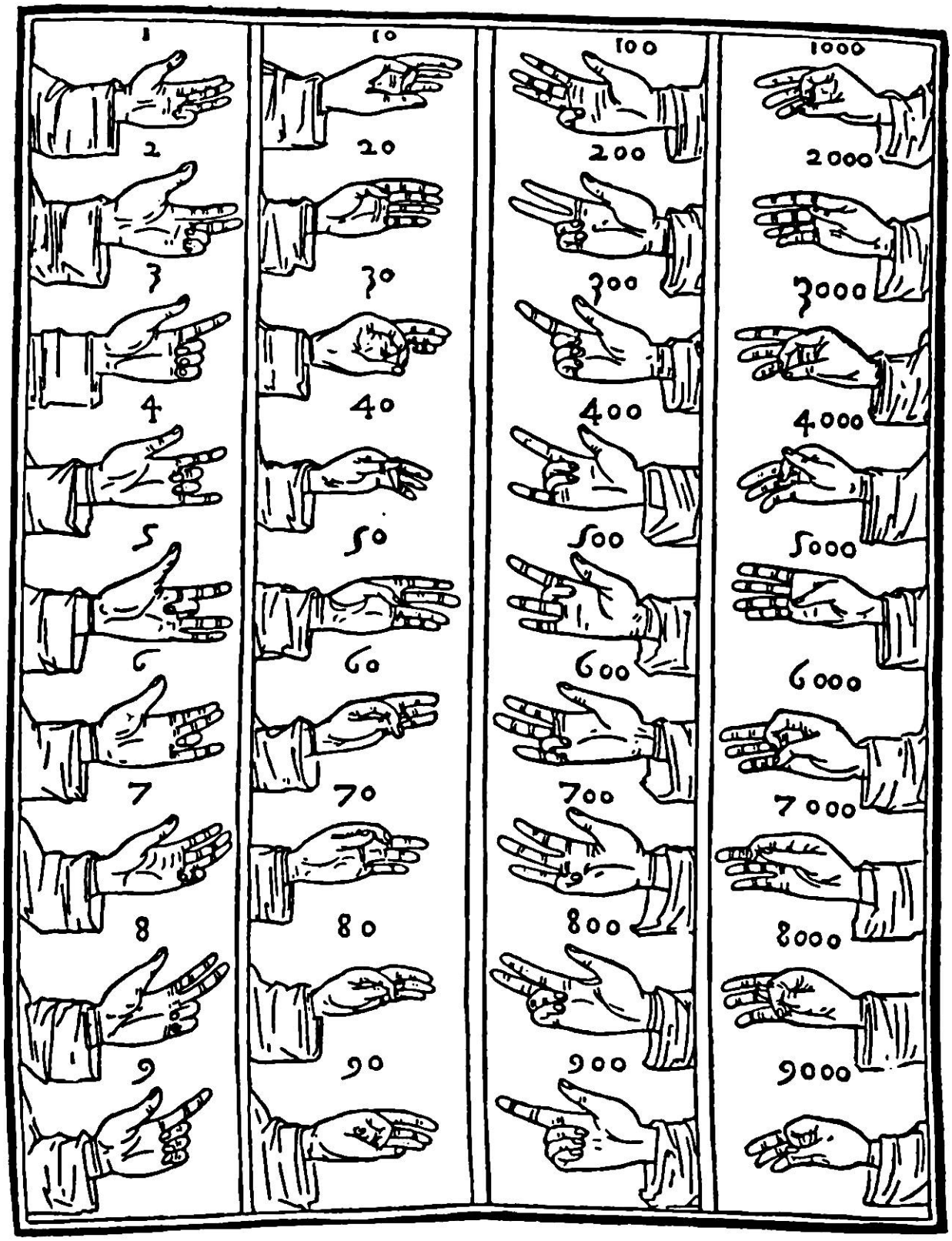
O dezessete guarda muitos segredos. Tanto o haicai[19] japonês como o hexâmetro[20] grego consistem em dezessete sílabas, e os místicos islâmicos frequentemente se referem a este número como particularmente belo.[21]

O dezoito, como o dobro de nove e três vezes seis, e o dezenove, um número primo, possuem forte conexão com a Lua (*ver página 41*).

O vinte, uma contagem que é a soma dos dedos dos pés e mãos, é um suporte em muitas culturas. A contagem de dedos, como no exemplo da imagem ao lado, era muito difundida nos mercados medievais europeus. Em francês, oitenta ainda é chamado *quatre-vingt* (quatro vintes), e os antigos maias usavam um sofisticado sistema de base vinte (*glifos para 1 a 19 mostrados abaixo*).

Não há espaço suficiente aqui para cobrir cada número em detalhe, mas facetas interessantes de números mais altos aparecem no glossário de números no fim do livro (*ver as páginas 369-72*).




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000

O *QUADRIVIUM*

As qualidades dos quanta

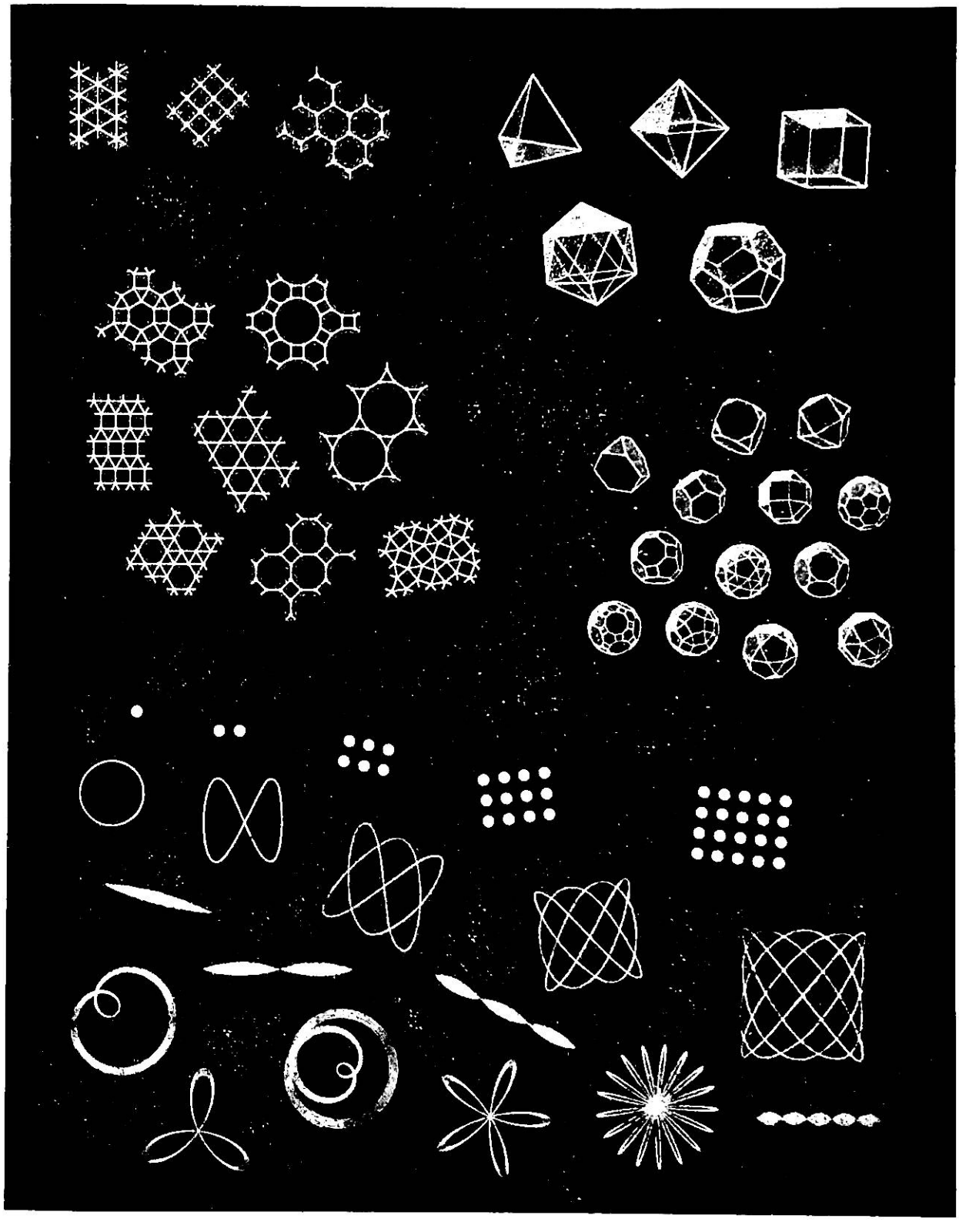
Outra palavra para um número inteiro é *quantum*, e o *Quadrivium* é uma educação no comportamento dos *quanta* simples. O mais puro estudo dos *quanta* lida com fatores, relações, números triangulares, quadrados e cúbicos, números primos e perfeitos, e com o modo como os números aparecem em sequências como a Fibonacci e a Lucas. Encontraremos muitas dessas ideias à medida que avançarmos, mas ao dividir a unidade de espaço e tempo também lançamos luz sobre a natureza dos *quanta* nesses meios.

Por exemplo, na imagem ao lado podemos ver alguns dos limites impostos aos números pelo espaço. Permitindo apenas polígonos perfeitos, há três grades regulares (*canto superior esquerdo*), cinco sólidos regulares (*canto superior direito*), oito grades semirregulares (*centro à esquerda*) e treze sólidos semirregulares (*centro à direita*). Esses números – 3, 5, 8 e 13 – formam um grupo interessante, e ainda os encontraremos novamente neste livro.

Os números da música revelam-se como relações simples entre períodos e frequências (*embaixo na imagem*): 1:1 (uníssono), 2:1 (a oitava), 3:2 (a quinta) e 4:3 (a quarta). A frequência da quinta difere da frequência da quarta como 9:8 (o valor da nota que dá origem à escala).

A maneira como os números se revelam no espaço e no tempo exige que estudemos o cosmo manifesto, e o tema tradicional de estudo aqui será o sistema solar. Todavia, poderíamos acrescentar também a graciosa simplicidade da tabela periódica, o comportamento quântico dos reinos subatômicos ou a organização de outros fenômenos naturais com elementos discretos.

Os fatos numéricos do espaço e do tempo são universais. Podem ou não tocar as mesmas melodias na galáxia mais próxima com vida inteligente, mas eles concordarão conosco em que as quintas têm um som encantador e reconhecerão apenas cinco sólidos simples.

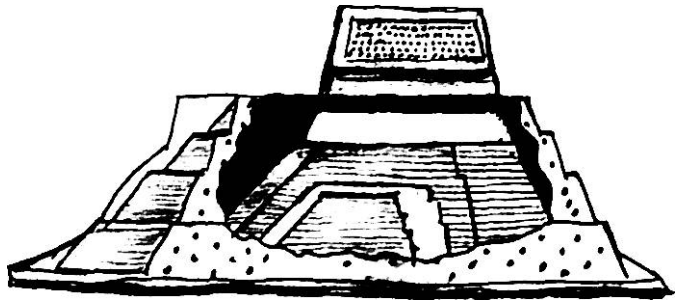


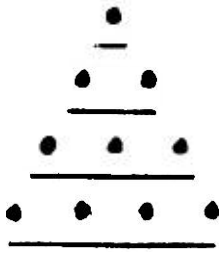
GNÔMONS

Maneiras de crescer

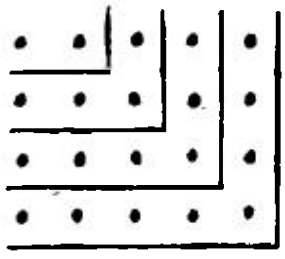
Aristóteles observou que algumas coisas, quando crescem, não sofrem nenhuma outra mudança além da magnitude. Ele estava descrevendo o princípio a que os gregos se referem como "crescimento gnomônico". Originalmente um nome dado a uma ferramenta de carpinteiro, o gnômon é definido como qualquer figura que, quando adicionada a outra figura, deixa a figura resultante similar a original. A contemplação do gnômon leva a uma compreensão de um dos princípios mais comuns da natureza: o crescimento por acréscimo. Todas as estruturas como ossos, dentes, chifres e conchas se desenvolvem dessa maneira.

Os antigos sentiam um fascínio comum por padrões e progressões criados pelas relações entre os números inteiros. Alguns exemplos são os números triangulares, retangulares, quadrados e cúbicos (*topo da imagem ao lado, ver também páginas* 363 *e* 373); também temos o *lambda* de Platão, ou *lambdoma*, que produz toda a gama de relações musicais; e os retângulos proporcionais usados nos projetos gregos onde cada retângulo subsequente é construído na diagonal do precedente (*centro da imagem ao lado*). A sequência Fibonacci é uma descoberta mais recente, mas baseia-se no mesmo princípio de crescimento gnomônico. O desenho abaixo mostra uma seção transversal do templo asteca de Tenayuca, revelando cinco reconstruções gnomônicas, realizadas a cada 52 anos, quando o calendário asteca, herdado dos maias, era reinicializado e todas as construções, renovadas.

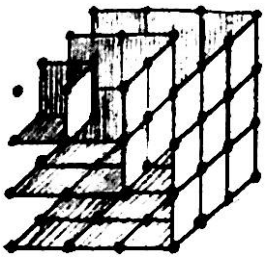




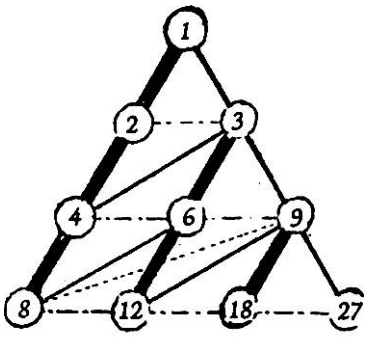
Números TRIANGULARES
Aqui, a sequência 1, 3, 6 e 10 aumenta de forma triangular.



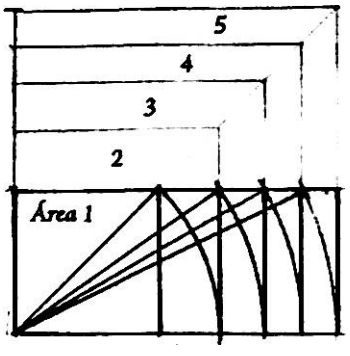
Números RETANGULARES
Aqui, a sequência 2, 6, 12 e 20 aumenta de forma musical.



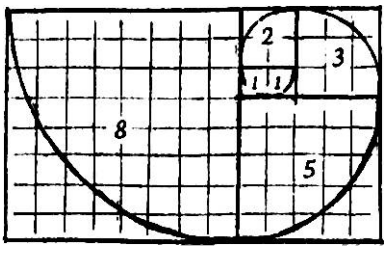
Números QUADRADOS *e* CÚBICOS
Aqui, temos as faces do quadrado 1, 4, 9 e 16, e os cubos 1, 8, 27 e 64.



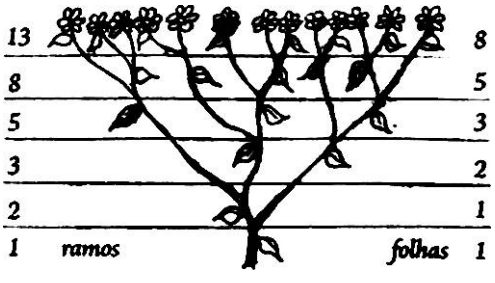
LAMBDOMA
A linha mais pesada mostra a oitava (2:1), enquanto, do outro lado, os números triplicam. Também estão presentes a quinta (3:2), a quarta (4:3) e o tom inteiro (9:8).



RETÂNGULOS PROPORCIONAIS
Começando com um quadrado de área 1, cada retângulo sucessivo é construído na diagonal do precedente, para criar quadrados com áreas iguais a 2, 3, 4 e 5.



ESPIRAL ÁUREA
Começando com um quadrado, construímos novos quadrados para criar uma espiral de quadrados que crescem e crescem pela mágica sequência Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.



OS NÚMEROS DE CRESCIMENTO
A sequência Fibonacci aparece em muitas coisas vivas. Aqui a vemos nos números das folhas e ramos de uma simples margarida-do-campo.

TEMPO E ESPAÇO

A cosmologia e o número manifesto

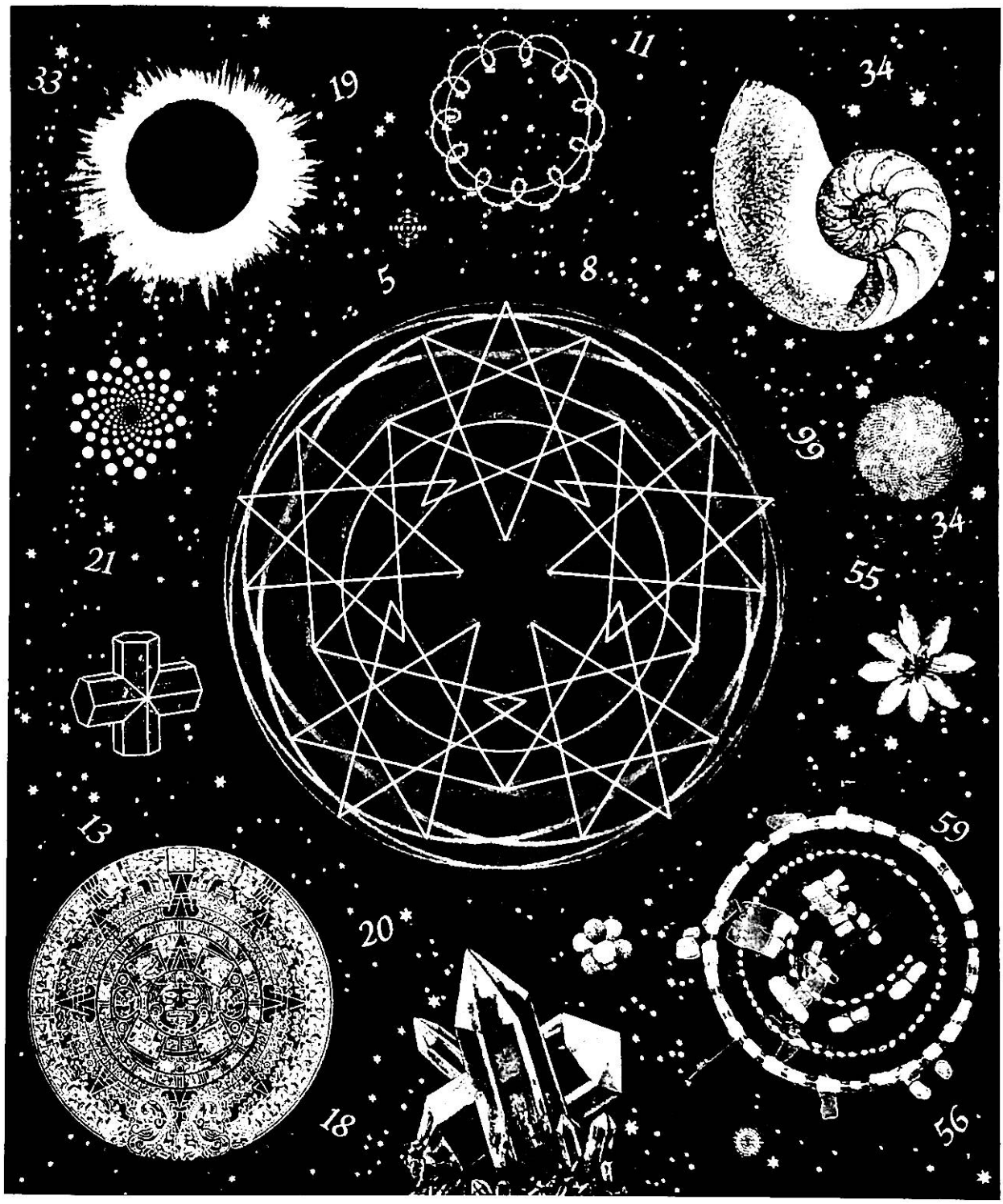
Olhando ao redor, há números que particularmente se manifestam nos céus ao redor da Terra. Isso é tratado em detalhes no Livro VI, mas introduziremos alguns destes números aqui. Por exemplo, há doze luas cheias em um ano solar, mas a décima segunda aparece a onze dias do final do ano, o que significa que um ano de doze luas – como o calendário islâmico – se desloca lentamente em relação ao ano solar, e retorna novamente depois de trinta e três anos, ou três números onze.

Outro par de números que casam Sol e Lua são o dezoito e o dezenove: enquanto os eclipses solares se repetem após dezoito anos, as datas de luas cheias repetem-se após dezenove anos. O monumento de Stonehenge mostra essa relação com as dezenove pedras em sua ferradura interna (*canto inferior direito da imagem*). Duas luas cheias ocorrem a cada cinquenta e nove dias, e Stonehenge registra isso em seu círculo mais externo de trinta pedras, uma das quais com metade da largura das demais, sugerindo vinte e nove dias e meio por lua.

O planeta Vênus desenha um padrão quíntuplo ao redor da Terra a cada oito anos, o que permite desenhar um surpreendente diagrama (*centro da imagem*). Nesse ciclo de oito anos, ocorrem quase exatamente noventa e nove luas cheias, ou nove números onze, que é também o número de nomes ou reflexos de Alá no islã. Já o planeta Júpiter desenha um belo padrão de onze voltas ao redor da Terra (*figura central, topo da imagem*).

Os números de muitos ciclos mais longos, como o do Grande Ano ou a precessão dos equinócios, também são ricos em qualidades secretas. Cada grande mês, como a Era de Peixes ou a de Aquário, dura 2.160 anos, que também é o diâmetro da Lua em milhas. Doze grandes meses ou eras equivalem ao valor ocidental de 25.920 anos para o ciclo completo.

Os antigos maias eram magníficos observadores das estrelas. Seu calendário (*canto inferior esquerdo*) sincronizava não apenas o Sol e a Lua, mas também Vênus e Marte. Eles perceberam que 81 (ou 3 x 3 x 3 x 3) luas cheias ocorriam exatamente a cada 2.392 dias (ou 8 x 13 x 23) – uma engrenagem espantosamente precisa.


33
19
11
34
5
8
99
34
21
55
13
59
20
18
56

BABILÔNIA, SUMÉRIA E EGITO

Primeiros sistemas numéricos

Cerca de 3000 a.C. os sumérios desenvolveram a escrita mais antiga que conhecemos e, com ela, um sistema de numeração de base 60 ou sexagesimal (*ver página 361*). Sendo um número particularmente útil, o sessenta é divisível por um, dois, três, quatro, cinco e seis.[22]

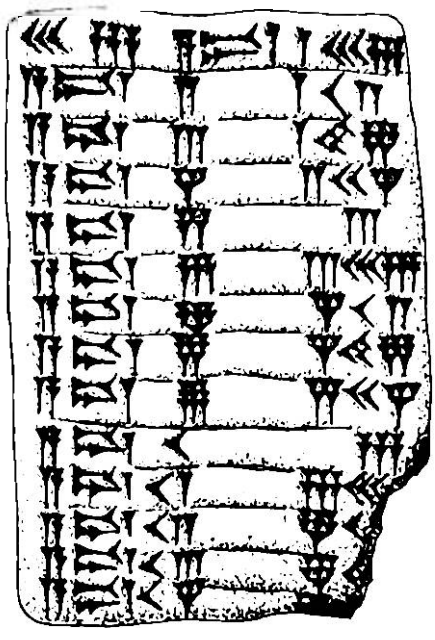
Trabalhar com uma base sexagesimal cria padrões numéricos diferentes do nosso moderno sistema de base decimal. Uma tábua de argila suméria impressa com uma escrita de estilo cuneiforme – "em forma de cunha" – mostra uma tabela de multiplicação para o número 36 na imagem ao lado. O sistema de base sexagesimal sobrevive hoje em nosso cálculo de ciclos e círculos com sessenta segundos em um minuto, sessenta minutos em uma hora, ou grau, e 6 x 60 = 360 graus em um círculo.

A antiga numeração egípcia era feira de caracteres que representavam 1, 10, 100 e assim por diante. Um exemplo da aritmética egípcia é o seu método de multiplicação, que usa duplicação repetida, seguida por adição seletiva, para encontrar a resposta (*canto superior direito, imagem ao lado*).

A visão antiga do número é uma visão musical, em que cada número é invertido no espelho da Unidade: o dois torna-se uma metade, o três torna-se um terço, e assim por diante. Na base sexagesimal, esta reciprocidade é especialmente bela, já que todos os múltiplos de dois, três, quatro, cinco e seis se tornam frações simples. Por exemplo, o número quinze torna-se um quarto. Os babilônios herdaram e usaram esse sistema para invocar seus deuses.

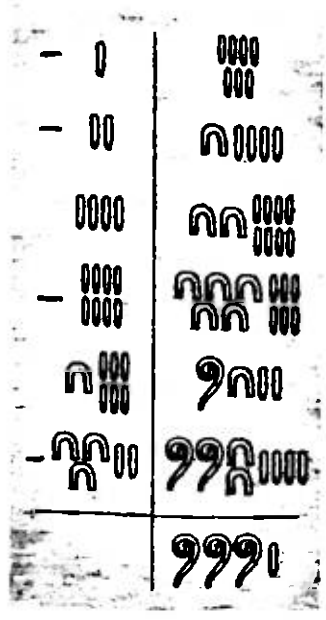
As frações egípcias usavam o hieróglifo de uma boca (*figura abaixo*), enquanto as frações de volume eram representadas pelo Olho de Hórus.

1/5 1/100 1/2 2/3 3/4 1/229



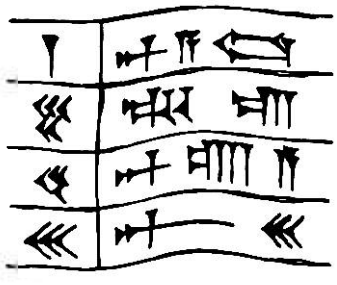
36 x 1	36
36 x 2	72
36 x 3	108
36 x 4	144
36 x 5	180
36 x 6	216
36 x 7	252
36 x 8	288
36 x 9	324
36 x 10	360
36 x 11	396
36 x 12	432
36 x 13	468
36 x 14	504

Tabela de Multiplicação do 36



> 1	7
> 2	14
4	28
> 8	56
16	112
> 32	224
(43 x 7)	301

Multiplicação Egípcia

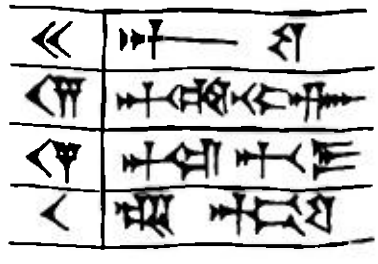


60 – *Anu (Céu)*

50 – *Enlil (Terra)*

40 – *Ea (água)*

30 – *Sin (Lua)*



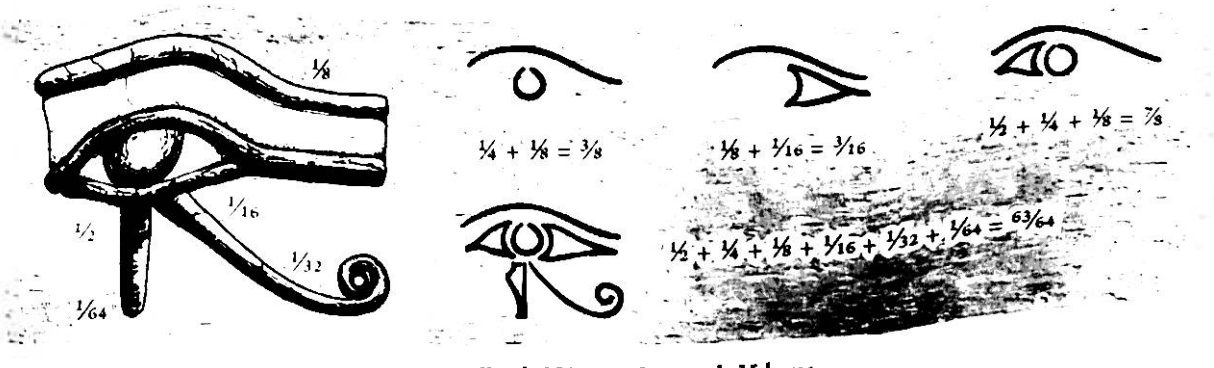
20 – *Shamash (Sol)*

15 – *Ishtar (amor)*

14 – *Nergal (guerra)*

10 – *Marduk (fertilidade)*

Números dos Deuses



O Olho de Hórus – Frações de Volume

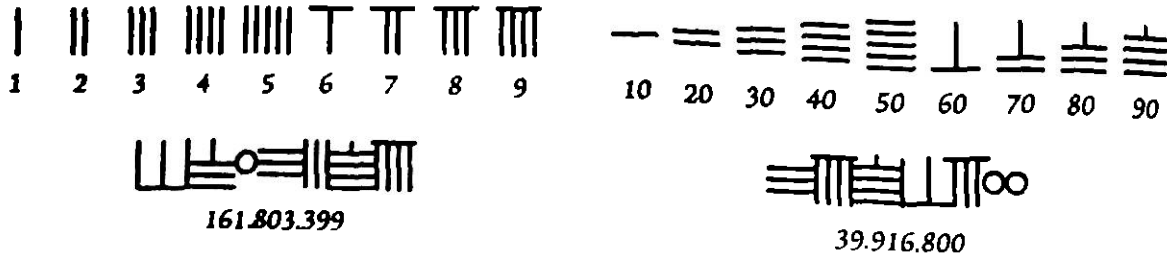
ÁSIA ANTIGA

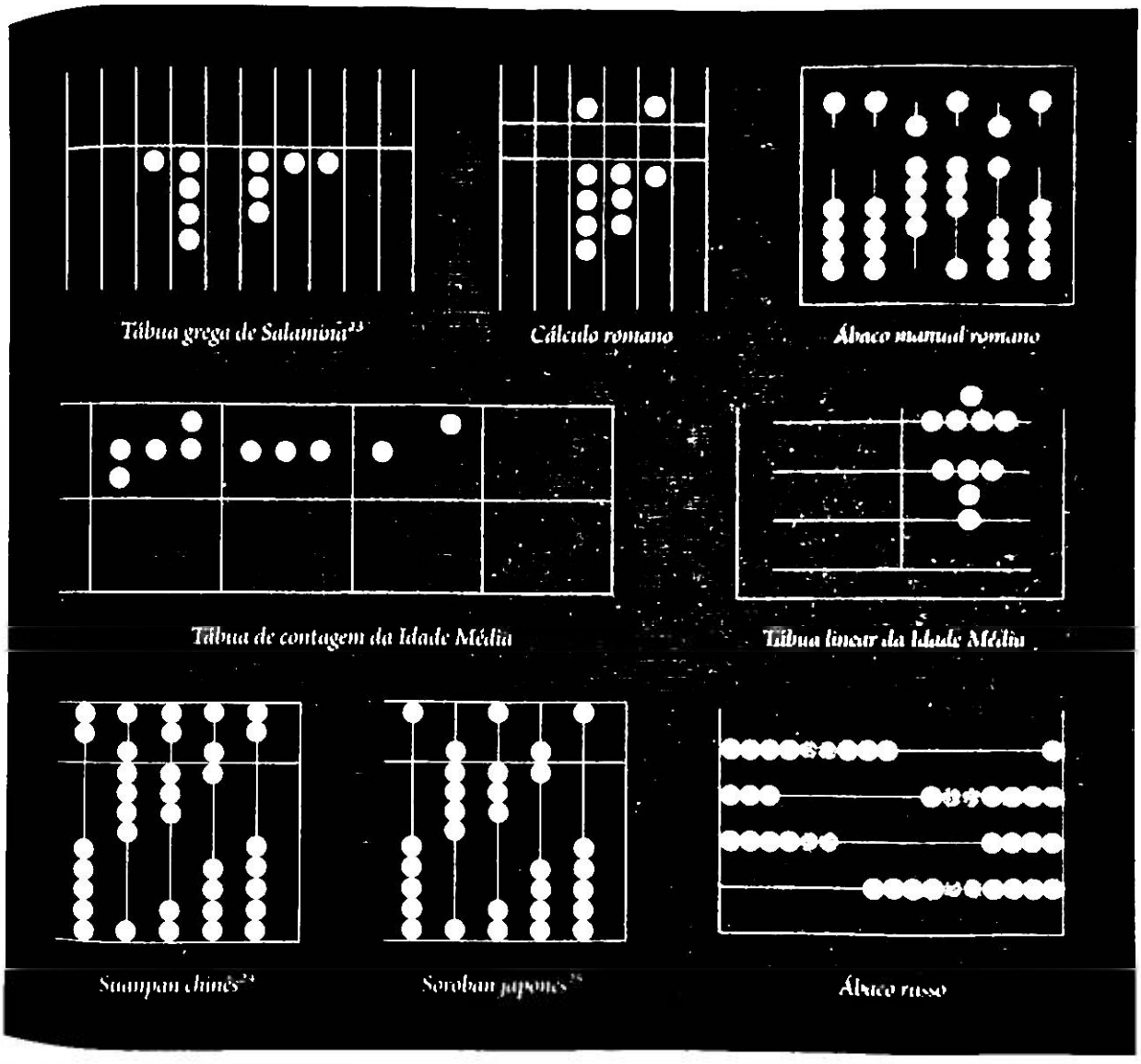
Manipulando dezenas

Na China, um sistema decimal escrito com treze caracteres básicos tem sido utilizado há mais de 3 mil anos (*ver página 361*). Outro meio de escrever números particularmente belo é o sistema de numeração com varetas chamado *suan zi* ou *sangi*, completo, e que conta com um pequeno zero, usado na China, no Japão e na Coreia, de alguma forma, pelo menos desde 200 a.C. (*figura abaixo*). Depois, o famoso ábaco chinês substituiu as tábuas de contagem do sistema de numeração com varetas. A velocidade de seus operadores, em particular no Extremo Oriente, é lendária, e ainda hoje seu uso é muito difundido.

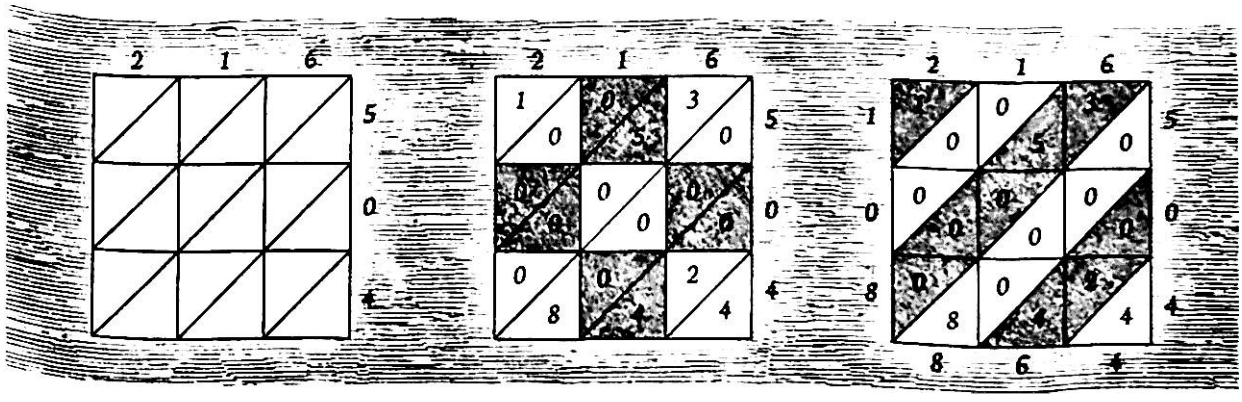
A Índia possui uma tradição numérica muito antiga. A aritmética é proeminente em muitas de suas escrituras, e sua cosmologia utiliza grandes números, rivalizados hoje em dia apenas pelos da física moderna. Os algarismos indianos tiveram origem no sistema de numeração *brahmi*, com 45 caracteres para formar os números de 1 a 90.000. Com o passar do tempo, as especulações dos matemáticos indianos exigiram um novo sistema, que combinava os nomes dos primeiros nove números com potências de dez. Suas técnicas de cálculo rápidas e elegantes, e a descrição de números muito grandes, resultaram em alguns cálculos surpreendentes.

O zero também surgiu para designar, sem confusão, uma potência decimal vazia. Na verdade, é da Índia que recebemos, através dos árabes, o nosso moderno sistema numérico de casas decimais.





O número 9.360 em vários quadros de contagem



Um uso árabe para os numerais indianos – 216 multiplicado por 504 é igual a 108.864

GEMATRIA

Números que falam e códigos secretos

Os fenícios utilizavam um alfabeto muito elegante, composto de 22 consoantes, para codificar os sons de sua língua. Com o tempo, sua escrita foi adotada pelos povos do Mediterrâneo e, através de sua variação latina, tornou-se o alfabeto que usamos hoje.

A gematria usa letras como símbolos numéricos, de forma que a linguagem se torna matemática. Importantes números canônicos, geométricos, musicais, metrológicos e cosmológicos são definidos por muitos termos-chave nos textos antigos. Tendo aparecido inicialmente na Grécia antiga, a gematria foi posteriormente adaptada para o hebraico e também para o árabe, sendo conhecida nessa região como *abjad*. Também existe nessas três línguas um sistema simplificado que usa os mesmos valores sem os zeros.

O exemplo abaixo mostra duas frases relacionadas, conectadas através de somas com resultado idêntico. Isso dá uma ideia da ressonância mágica e simultânea entre palavras e números, que qualquer leitor instruído teria experimentado no passado, uma vez que a gematria, por mais de mil anos, não foi meramente uma especialidade oculta, mas o modo-padrão utilizado para representar os números.

Essa ciência secreta ainda é usada hoje em dia por místicos e feiticeiros que utilizam as conexões entre palavras, frases e números por sua significância mística e seu poder talismânico.

O Espírito Santo				Fonte de Sabedoria
ΤΟ ΑΓΙΟΝ ΠΝΕΥΜΑ			= 1.080 =	ΠΗΓΗ ΣΟΦΙΑΣ
300.70	13.10.70.50	80.50.5.400.40.1		80.8.3.8 200.70.500.10.1.200
370	134	576		99 981

Fenício arcaico		Grego			Hebraico		Árabe			Valor
							Leste	Oeste		
'aleph	𐤀	alpha	Α	α	aleph	א	'alif		ا	
bet	𐤁	beta	Β	β	bet	ב	ba		ب	1
gimmel	𐤂	gamma	Γ	γ	gimmel	ג	jim		ج	2
dalet	𐤃	delta	Δ	δ	dalet	ד	dal		د	3
he	𐤄	epsilon	Ε	ε	he	ה	ha		ه	4
waw	𐤅	digamma	F	ς	vov	ו	waw		و	5
zayin	𐤆	zeta	Z	ζ	zayin	ז	za		ز	6
ḥet	𐤇	eta	Η	η	het	ח	ḥa		ح	7
ṭet	𐤈	theta	Θ	θ	tet	ט	ṭa		ط	8
yod	𐤉	iota	Ι	ι	yod	י	ya		ي	9
kaf	𐤊	kappa	Κ	κ	kof	כ	kaf		ك	10
lamed	𐤋	lambda	Λ	λ	lamed	ל	lam		ل	20
mem	𐤌	mu	Μ	μ	mem	מ	mim		م	30
nun	𐤍	nu	Ν	ν	nun	נ	nun		ن	40
samekh	𐤎	ksi	Ξ	ξ	samekh	ס	sin/ṣad		س	50
'ayin	𐤏	omicron	Ο	ο	ayin	ע	'ayn		ع	60
pe	𐤐	pi	Π	π	pé	פ	fa		ف	70
ṣade	𐤑	qoppa	Ϙ	ϙ	tsade	צ	ṣad/ḍad		ص	80
qof	𐤒	rho	Ρ	ρ	quf	ק	qaf		ق	90
resh	𐤓	sigma	Σ	σ	resh	ר	ra		ر	100
shin	𐤔	tau	Τ	τ	shin	ש	shin/sin		ش	200
taw	𐤕	upsilon	Υ	υ	tav	ת	ta		ت	300
		phi	Φ	φ	kof	ך	tha		ث	400
		chi	Χ	χ	mem	ם	kha		خ	500
		psi	Ψ	ψ	nun	ן	dhal		ذ	600
		omega	Ω	ω	pé	ף	ḍad/ḍha		ض	700
		san	ϡ	ϡ	tsade	ץ	ḍha/ghayn		ظ غ	800
							ghayn/shin		ظ غ ش	900
										1.000

O sistema grego inclui as letras em desuso *digamma* e *qoppa* em sua ordem original e reintroduz a letra em desuso *san* no final. Da mesma forma, o sistema hebraico usa cinco formas literais especiais para o "final de palavras", a fim de chegar ao 900. No sistema árabe, as letras usadas para 60, 90, 300, 800, 900 e 1.000 diferem entre o Ocidente e o Oriente do mundo islâmico.

QUADRADOS MÁGICOS

Quando tudo acrescenta

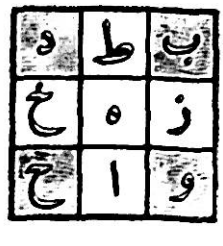
Os quadrados mágicos são uma maneira fascinante de organizar números, e há livros inteiros dedicados a eles e a seus usos secretos. A soma mágica de qualquer quadrado é a mesma seja qual for a linha somada.

Sete quadrados mágicos são tradicionalmente associados com os planetas (*imagem ao lado*). O quadrado de três por três células é associado a Saturno, e os demais quadrados aumentam suas divisões na ordem de 1 à medida que descem através de cada esfera planetária, a fim de alcançar o quadrado lunar de nove por nove. Nesses quadrados, aparecem padrões elegantes de números pares e ímpares (*sombreados nos diagramas*). Cada planeta também está associado a um selo mágico baseado na estrutura do respectivo quadrado – um código útil para os magos.

Um quadrado mágico é um exemplo de permutação, ordenando coisas em conjunto de uma forma particular. Há oito formas possíveis de somar três números entre um e nove cujo resultado seja quinze, e todas as oito formas estão presentes no quadrado mágico de três por três.

Outros totais encontrados em quadrados mágicos valem uma segunda olhada. O povo maia certamente se teria deleitado com o fato de que o quadrado de oito por oito tem a soma mágica de 13 x 20 (260), enquanto o total da linha solar, equivalente a 111,[26] resulta no sinistro 666 como soma do quadrado completo.

Usando a gematria como uma chave mágica adicional, palavras e quadrados mágicos naturalmente se entrelaçam no mundo secreto dos encantamentos e de outras artes talismânicas (*veja o exemplo abaixo*).



Soma do quadrado = ا+ب+خ+د+ه+و+ز+ح+ط = 45

ادم *Adão* = 1 + 4 + 40 = 45 = 7 + 8 + 30 = زحل *zuhal (Saturno)*

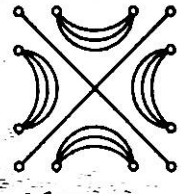
حواء *Hawwa (Eva)* = 8 + 6 + 1 = 15 = *soma mágica*

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Soma mágica 15
Soma do quadrado 45

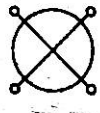
37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Soma mágica 369
Soma do quadrado 3.321



4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Soma mágica 34
Soma do quadrado 136

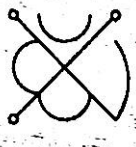


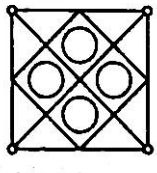
8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Soma mágica 260
Soma do quadrado 2.080

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

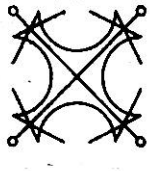
Soma mágica 65
Soma do quadrado 325





6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Soma mágica 111
Soma do quadrado 666



22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Soma mágica 175
Soma do quadrado 1.225

MITO, JOGO E RIMA

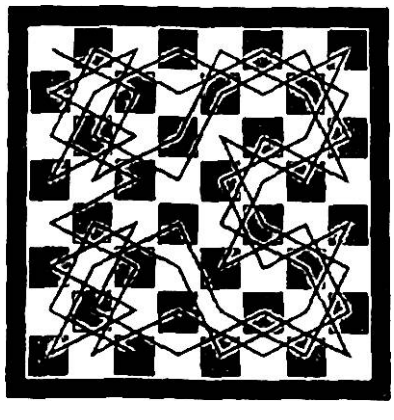
Números junto aos quais crescemos

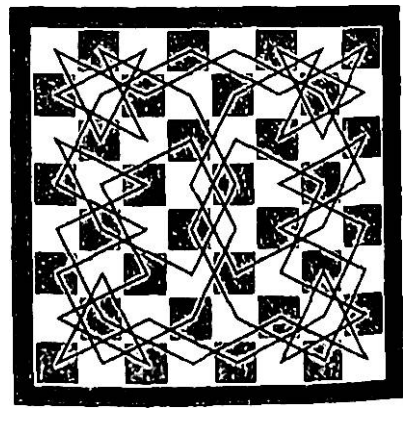
Algumas de nossas primeiras experiências com números ocorrem por meio de jogos, rimas, histórias e mitos culturais, muitos dos quais guardam tesouros de relações numéricas ocultas.

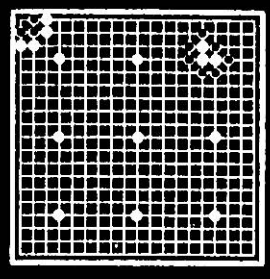
Antigas formas de linguagem tinham regularmente base numérica, e, assim, em poesia, encontramos tercetos (três linhas de verso), quartetos (versos de quatro linhas), pentâmetros (linhas com cinco sílabas tônicas), hexâmetros (linhas com seis sílabas tônicas), e *haicais* (um poema de três linhas com dezessete sílabas: cinco, sete e, depois, cinco – *compare-se com a escala de dezessete notas da página 198*).

Os jogos, assim como os mitos e as histórias, podem armazenar informações. A soma de um maço de cartas do baralho comum, contando o valete, a rainha e o rei como 11, 12 e 13, equivale a 364; com o curinga, resulta em 365, que é o número de dias em um ano. Os números dezoito e dezenove do jogo chinês Go ecoam os ciclos do Sol e da Lua (*ver página 44*). Esses jogos antigos refletem princípios eternos, sugerindo jogos cósmicos mais amplos, também com os números em seu centro.

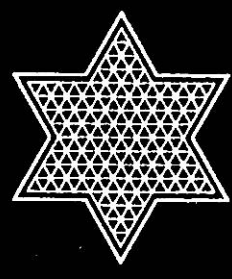
Muitos jogos são dependentes dos números para sua estrutura e regras. Imagine um jogo de pôquer jogado por pessoas que não possam contar além de três! Abaixo estão dois exemplos de movimentos do cavaleiro no tabuleiro de xadrez, os quais produzem quadrados mágicos quando numerados em sequência.



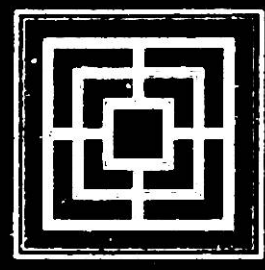




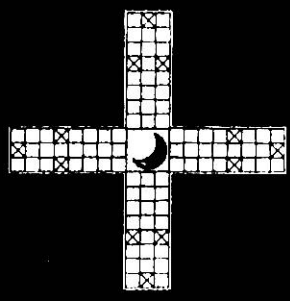
Go[27]



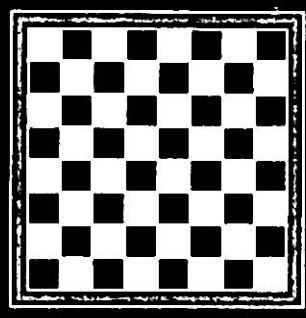
Jogo de damas chinês



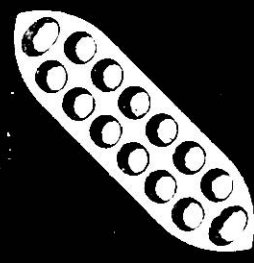
Trilha ou Moinho



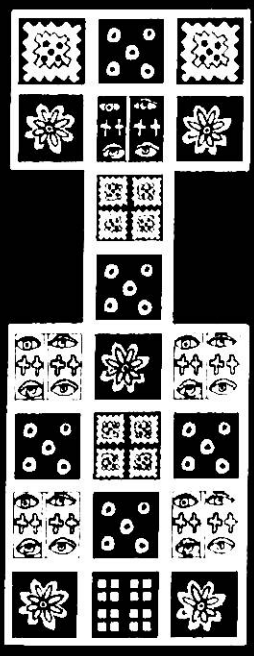
Pachisi ou Ludo



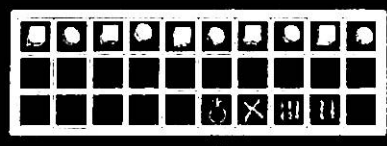
Jogo de Damas e Xadrez



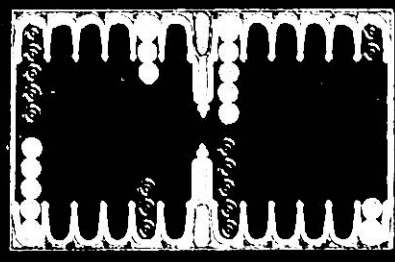
Mancala[28]



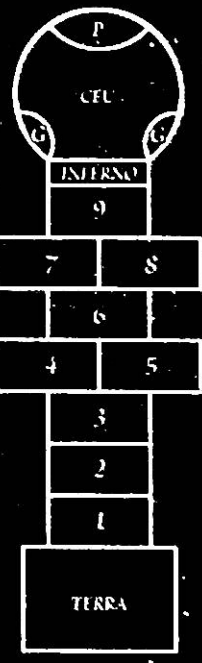
Jogo real de Ur



Senet[29]



Gamão



Amarelinha

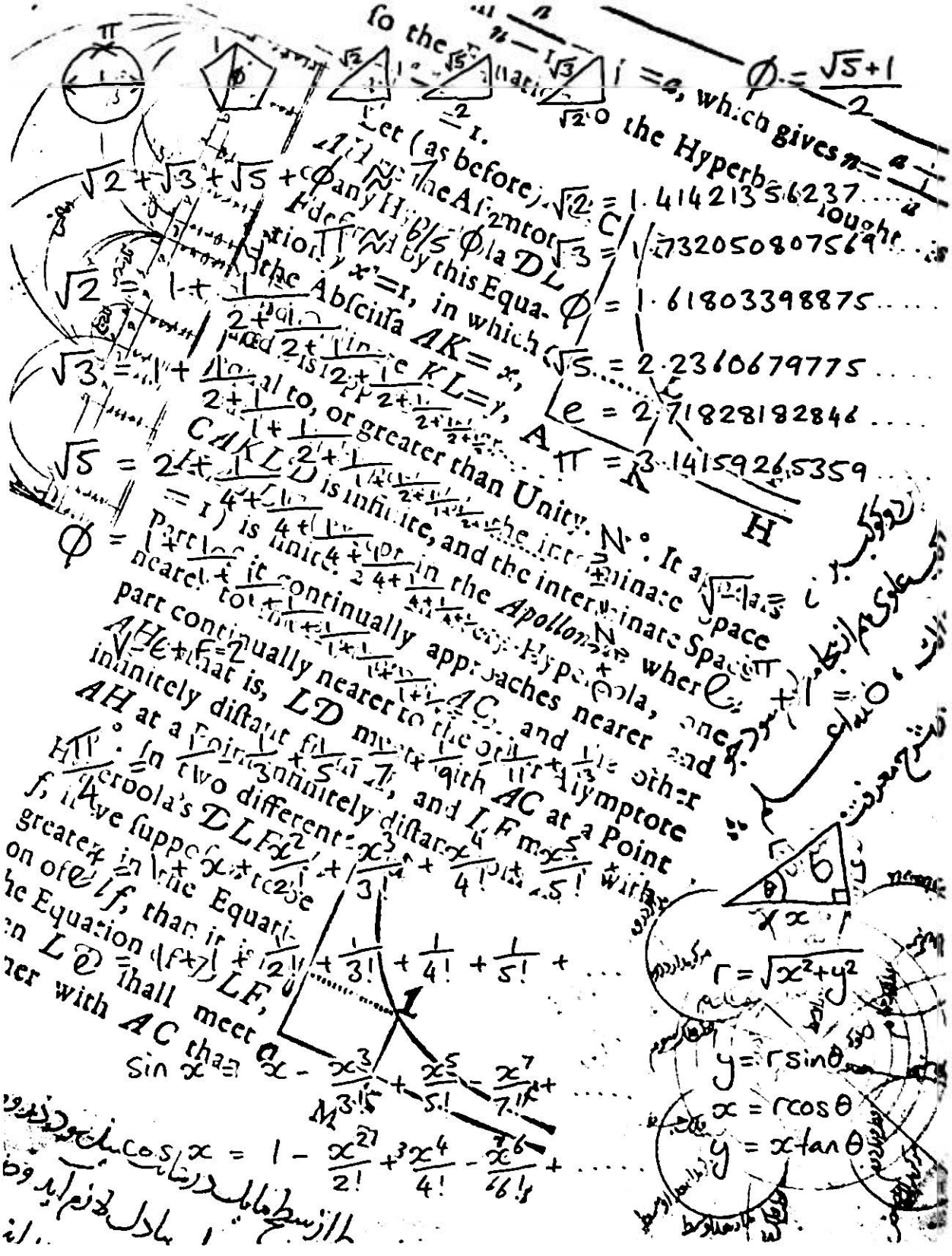
NÚMEROS MODERNOS

A aurora da complexidade

Quando os antigos gregos provaram que as diagonais dos quadrados não podem ser expressas como frações, dizem que isso causou uma crise, um pouco como o terror que muitas pessoas experimentam ainda hoje ao enfrentar o símbolo da raiz quadrada, $\sqrt{}$.

Os últimos quatrocentos anos do pensamento humano transformaram nossa concepção do número. Depois da adoção dos numerais indianos e do zero, o feitiço seguinte foi a invenção dos números *negativos*, que criou uma linhagem de números que desaparecia em duas direções. Os números negativos eram úteis, mas criavam um dilema: um número negativo ao quadrado produz um número positivo – então, o que são as raízes quadradas de números negativos? Os matemáticos perceberam que havia toda uma outra linhagem de números inteiros, de raízes quadradas de números negativos, a que chamaram números *imaginários*, representados atualmente por um i (assim, i é a raiz quadrada de -1). Hoje em dia, os números vivem em um plano numérico, com uma parte real e uma parte complexa. Curiosamente, é o jogo entre os números imaginários e os reais que facilmente produz a bela complexidade dos fractais e da Teoria do Caos,[30] modelos de formas e processos recursivos que encontramos à nossa volta na natureza.

Com o sistema decimal que usamos hoje, podemos descrever com grande precisão números como o π ou *pi*, que é a razão entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro. Contudo, alguns dos mais belos objetos da matemática moderna simplesmente empregam frações repetidas que teriam sido familiares aos povos antigos. Isso captura a complexa essência das raízes quadradas, da *proporção áurea* φ ou Φ, do pi π, e da função exponencial de crescimento e.


$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$\sqrt{2} = 1.4142135623 7\ldots$
$\sqrt{3} = 1.7320508075 69\ldots$
$\phi = 1.61803398875\ldots$
$\sqrt{5} = 2.2360679775\ldots$
$e = 2.71828182846\ldots$
$\pi = 3.1415926535 9\ldots$
$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \phi$
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}}$
$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\ldots}}}}$
$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\ldots}}}}$
$\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\sin\theta$
$x = r\cos\theta$
$y = x\tan\theta$

ZERO

Nada mais a dizer

O zero foi deixado por último porque, em certo sentido, não é realmente um número, apenas uma marca que representa a ausência do número. Talvez seja por essa razão, e pelo terror que muitos teólogos sentiam por ele, que nada levou tanto tempo para emergir como algo reconhecido, e em algumas poucas culturas mais sensíveis isso nunca aconteceu.

Um símbolo para o zero foi inventado, de forma independente, pelo menos três vezes. Em 400 a.C., os babilônios começaram a usar a forma de duas cunhas impressas em argila para representar o sinal de um "lugar vazio" em seus números sexagesimais, indicando "nenhum número nesta coluna". Do outro lado do mundo, e cerca de mil anos depois, os maias adotaram um símbolo em forma de concha para a mesma função.

A forma circular que o "nada" assumiu com os indianos refletia o entalhe deixado na areia quando um seixo, utilizado para a contagem, era removido. Desse modo, o nosso zero moderno, herdado dos indianos, começou como o traço visível de algo que já não estava lá.

Da mesma forma que o um, o zero explora a fronteira entre a ausência e a presença. Os primeiros tratados de matemática indianos referem-se a ele como *sunya*, que significa "vazio", chamando a atenção para o abismo, o incognoscível final, o solo fecundo de todo ser.

Talvez seja apropriado que o nosso zero assuma a forma de um círculo, que é o símbolo da unidade, e que o nosso número um assuma a forma de uma linha curta entre dois pontos. Como reconhecido pela gematria, cada número contém em si a semente de seu sucessor, e os símbolos para o zero e para o um estranhamente se combinam para criar o símbolo áureo φ – um pensamento adequado para encerrar este livro.

Notas da Tradutora

[1] O termo aqui se refere ao conjunto de teorias e práticas que tinham por objetivo desvendar os segredos da natureza, do universo e da própria humanidade.

[2] Do inglês *arithmology*, que dá nome à teoria ou ciência dos números, também chamada *alta aritmética*.

[3] Genericamente, é intervalo de cinco notas nominais consecutivas ou cinco graus diatônicos (compreendendo intervalos de cinco tons inteiros e dois semitons). Também denomina uma das notas ou a combinação harmônica de duas notas nesse intervalo.

[4] Do latim, significa, literalmente, "bexiga de peixe". Também é chamada *mandorla*, que significa "amêndoa" em italiano.

[5] Vitrúvio Polião – ou *Vitruvius Pollio* (latim) – foi um arquiteto e engenheiro romano que viveu no século I a.C. e produziu uma obra em dez volumes chamada *De Architectura*, que é considerada como o único tratado europeu do período greco-romano que sobreviveu até a época atual. Essa obra parece ter servido de inspiração a diversos textos sobre construções desde a época do Renascimento, ou mesmo desde a Idade Média, embora não haja consenso sobre isso. Os padrões de proporção apresentados por Vitrúvio, bem como seus princípios arquiteturais – *utilitas*, *venustas* e *firmitas* (utilidade, beleza e solidez) – são considerados como tendo inaugurado a base da Arquitetura Clássica. Para mais informações, ver: Vitrúvio, *Tratado de Arquitetura*. Portugal, Martins Editora, 2007.

[6] O termo inglês usado pelo autor é *quarters*, que significa "bairro" e se refere, de fato, aos distritos em que uma cidade se divide, e não às *quadras* ou *quarteirões* que compõem um bairro, como é o caso do termo que sobreviveu no português moderno.

[7] Intervalo ascendente ou descendente, de quatro em quatro notas.

[8] Vale lembrar que, na Antiguidade grega, os números tinham tanta importância que lhes eram atribuídas características humanas: por exemplo, os números pares e ímpares eram considerados "masculinos" e "femininos", respectivamente. Daí a ideia de "casamento" entre os números inteiros para formar outros números, como no caso do seis.

[9] Esse é o caso do número 15, por exemplo, cujos divisores 1, 3 e 5, se somados, resultam em 9. Contudo, os números cuja soma de seus divisores (não incluindo o próprio número) é maior que eles (por exemplo, o número 12, cuja soma dos divisores 1, 2, 3, 4 e 6 resulta em 16) são chamados *números abundantes*.

[10] Também chamado *triângulo retângulo*, o triângulo de Pitágoras é aquele que forma um ângulo de 90° (reto) entre os lados menores, chamados *catetos*, e cujo lado maior, a *hipotenusa*, obedece ao famoso teorema enunciado como "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".

[11] A fórmula para o cálculo da área de um triângulo é A (área) = H (altura) x B (base) ÷ 2. No caso do triângulo de Pitágoras, temos: A = 3 x 4 ÷ 2 = 6.

[12] Metade do perímetro, ou seja, metade da soma do respectivo comprimento das arestas.

[13] Essa transposição da teoria hindu dos *chacras*, feita no Ocidente pela medicina moderna, não implica que a ideia dos centros de energia tenha sido "mais bem compreendida" pela medicina ocidental. Na verdade, segundo os hindus, os chacras são distintos de órgãos efetivamente físicos como as glândulas endócrinas. Esse conceito origina-se em textos muito antigos da tradição budista e das tradições hindus do *yoga* e do *tantra*, e refere-se a vórtices (centros) de energia em forma de roda, de acordo com a tradicional medicina indiana. Nessas tradições, acredita-se que os *chacras* realmente existem na superfície do corpo energético ou de matéria sutil que acompanha o corpo físico de todas as pessoas (conhecido como *duplo etérico*). Referências: Mircea Eliade, *Yoga. Imortalidade e Liberdade*. São Paulo, Palas Athena, 1997; Gavin D. Flood, *An Introduction to Hinduism*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996; N. N. Bhattacharyya, *History of the Tantric Religion. An Historical, Ritualistic, and Philosophical Study*. Columbia, South Asia Books, 2006.

[14] Em arquitetura, é a parte plana do *entablamento* (superestrutura de moldes e bandas que repousam horizontalmente sobre colunas), entre a *cornija* (faixa horizontal que se destaca da parede, a fim de acentuar as nervuras nela empregadas) e a *arquitrave* (trave horizontal que se apoia em duas ou mais colunas, cuja origem remonta à arquitetura clássica).

[15] Segundo a tradição chinesa, a sequência de oito trigramas, chamada *baguá*, dispostos dentro de um octógono, representa o momento único e perfeito imediatamente anterior à criação do universo: a ordem arquetípica onde Céu e Terra se encontravam alinhados, o tempo não existia e o ciclo das estações não estava ainda em movimento. Este é o *baguá primordial*, onde os trigramas opostos são complementares. Também existe outra sequência, onde os trigramas opostos não são complementares, chamada "Céu Posterior" ou *baguá manifesto*, referindo-se à ordem da mudança no mundo, depois que o universo foi criado, e incorporando o ciclo de nascimento e morte, o tempo, o dia e a noite, bem como as estações do ano. Para

mais informações: Alfred Huang, *I-Ching: Edição Completa*. Martins Fontes, 2007; Roberto Otsu, *O Caminho do Sábio – Tao Te Ching*. Ágora Editora, 2008.

[16] Neste trecho, o autor brinca com duas expressões da língua inglesa, *dress to the nines* e *cloud nine*, que fazem referência, respectivamente, a uma aparência bem cuidada – ou "nos trinques", como se diz em português – e a um estado de espírito que também costumamos associar a nuvens, chamando "andar nas nuvens". Não há referências ao número nove nas expressões equivalentes em nossa língua, e costumamos dizer que gatos têm *sete vidas*, e não nove, uma lenda que provavelmente surgiu por causa da habilidade que esses felinos possuem para escapar de situações que envolvam risco à sua vida. Por essa razão, mantivemos a primeira expressão como em inglês e adotamos outras que se adaptam ao sentido geral do restante da frase, como, por exemplo, a ideia popular de que os gatos são cheios de melindres (*nove-horas*).

[17] Palavra hebraica, plural de *sefirá*, que significa originalmente *número* ou *categoria*, utilizada para representar as dez emanações divinas que aparecem na Árvore da Vida. Cada *sefirá* é um modo ou um poder específico através do qual Deus governa e sustenta o Universo. Por isso, as *sefirot* podem ser consideradas como "atributos" ou "qualidades" – ou, ainda, "vestimentas" – divinas. Referências: Sylv Karppe, *Étude sur les Origines et la Nature du Zohar, Précédée d'une Étude sur L'histoire de la Kabbale*. Nabu Press, 2010; Isaac Myer, *Qabbalah: The Philosophical Writings of Solomon ben Yehudah Ibn Gebirol, or Avicebron*. 2. ed. Weiser Books, 1970.

[18] Nome dado em homenagem a François Edouard Anatole Lucas (1842–1891), matemático francês que estudou esta segunda sequência de números e o mesmo que nomeou de *Fibonacci* a famosa série de números descrita pelo matemático italiano do século XIII, Leonardo Pisano Bigollo, mais conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci.

[19] Pequena composição poética japonesa em que se cantam as variações da natureza e a sua influência na alma do poeta. Consta de dezessete sílabas, divididas em grupos de cinco, sete e cinco.

[20] Do latim *hexameter* ou *hexametrus*, literalmente "de seis medidas", é uma forma de medida poético-literária que consiste em seis pés métricos por verso, em que os quatro primeiros pés podem ser dátilos ou espondeus, o quinto pé será dátilo, e o sexto, espondeu – como na *Ilíada*. Este tipo de verso foi o padrão do metro épico tanto dos gregos como dos romanos, além de ser usado em outros tipos de composição, como nas sátiras de Horácio e nas *Metamorfoses* de Ovídio.

[21] Número venerado no Islã, soma de oito e nove, relaciona-se ao 72 (que é o produto desses dois números). São dezessete os gestos litúrgicos na tradição muçulmana, assim como são dezessete as palavras que compõem o chamado à prece.

[22] Também é divisível por 10, 12, 15, 20, 30 e, obviamente, 60. O sistema sexagesimal é utilizado nas medidas de ângulos (a medida angular de um grau é dividida em 60 minutos de arco, e cada minuto de arco em 60 segundos de arco), de coordenadas geográficas angulares e de tempo.

[23] Na Grécia antiga, Salamina era uma cidade-Estado na costa leste de Chipre, na foz do Rio Pedieos, 6 km ao norte da moderna Famagusta. Terra natal do poeta trágico Eurípedes (485 a.C.), atualmente é a maior ilha grega no Golfo de Salônica (cerca de 96 km²), localizada ao sul de Pireu, antigo porto de Atenas, e cerca de 16 km a oeste de Atenas. Já não tem a importância econômica ou estratégica de outras eras, e pertence à divisão administrativa da capital grega.

[24] Ábaco de origem chinesa descrito pela primeira vez em um livro da dinastia Han Oriental (190 d.C.). Geralmente, um *suanpan* tem cerca de 20 cm de altura e pode aparecer com larguras diferentes, dependendo da aplicação. Costuma ter mais de sete varas, que podem ser utilizadas para outras funções além da de contagem. Ao contrário da tábua de contagem simples usada em escolas elementares, técnicas muito eficientes de *suanpan* foram desenvolvidas para fazer multiplicação, divisão, adição, subtração, raiz quadrada e cúbica em alta velocidade. Referência: Jean-Claude Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*. Springer-Verlag, 2006.

[25] *Soroban* é o nome dado ao ábaco que foi levado ao Japão pelos chineses por volta do séc. XVII.

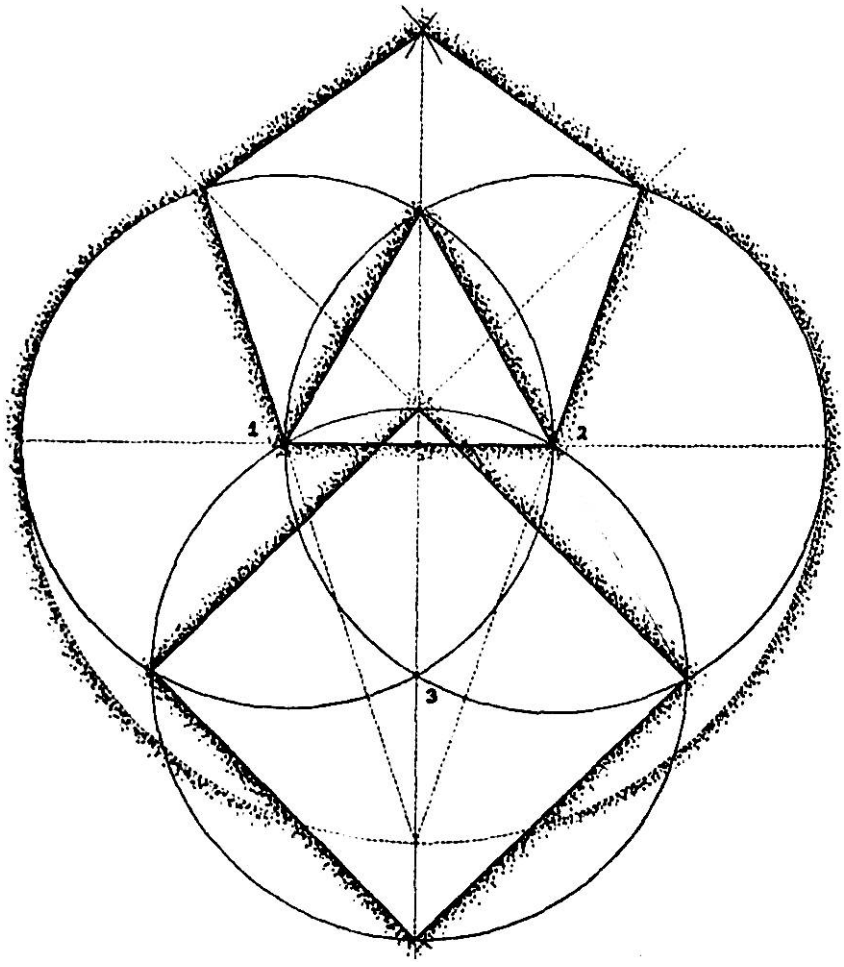
[26] Soma mágica do quadrado de seis por seis células ou algarismos.

[27] Também chamado Weiki ou Baduk.

[28] Também chamado "jogo da semeadura" ou "jogo da contagem e captura".

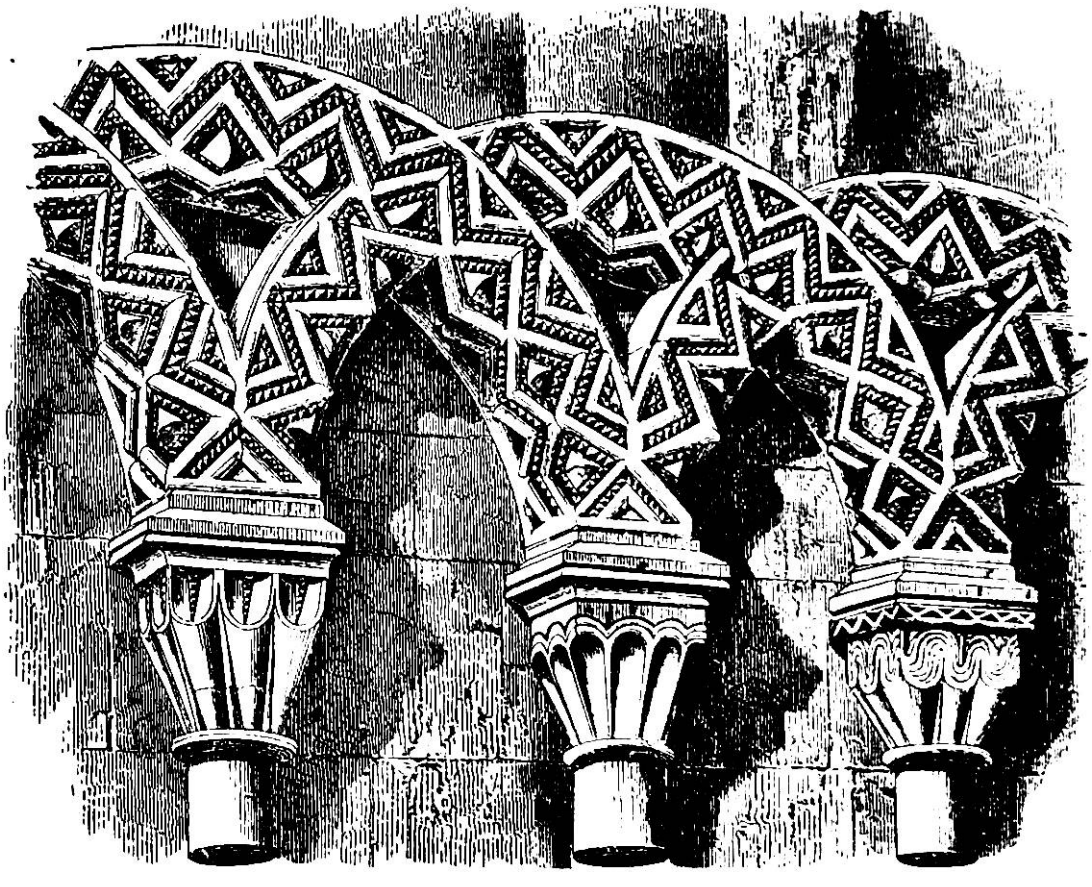
[29] Jogo que remonta ao antigo Egito.

[30] Fenômenos que não podem ser descritos por fórmulas matemáticas, chamados "caóticos", são aqueles nos quais não há previsibilidade, como, por exemplo, o gotejar de uma torneira, pois não é possível formular uma equação que descreva a frequência com que as gotas de água caem. As variações climáticas e as oscilações das bolsas de valores também se encaixam nessa descrição. Com o desenvolvimento da matemática e de outras ciências, a Teoria do Caos surgiu com o objetivo de compreender e dar resposta às flutuações erráticas e irregulares que se encontram na Natureza. Em termos genéricos, essa teoria estabelece que uma pequena mudança ocorrida no início de um evento qualquer pode ter consequências desconhecidas no futuro.


1
2
3

L I V R O I I

GEOMETRIA SAGRADA



Miranda Lundy

Assentos na capela de Norwoods, na igreja Milton, em Kent, Inglaterra.

Introdução

A geometria sagrada mapeia o desdobramento do número no espaço, diferindo da geometria mundana meramente no sentido em que os seus movimentos, conceitos e produtos são considerados como tendo valor e significado simbólicos. Assim, como a boa música, o estudo e a prática da geometria podem facilitar a evolução da alma. Como veremos, a jornada básica parte de um único ponto para a linha, seguindo em direção ao plano, através da terceira dimensão e além dela, para retornar novamente ao ponto e observar o que acontece no caminho.

Estas páginas – o Livro II do *Quadrivium* – cobrem os elementos da geometria bidimensional, a manifestação do número em uma superfície plana. A história da geometria tridimensional é, em seguida, contada no Livro III. Na verdade, este material tem sido utilizado, por longo tempo, como uma introdução à metafísica. Como os elementos de um tema relacionado, a música, a geometria é um aspecto da revelação, um brilhante e incontestável vestígio da Realidade e um mito da criação em si.

A aritmética, a música, a geometria e o estudo dos padrões nos céus são as quatro grandes artes liberais do mundo antigo que lidam com os *quanta* ou os números inteiros. Essas simples linguagens universais são tão relevantes hoje como sempre o foram, e podem ser encontradas em todas as ciências e culturas conhecidas, sem divergência entre si. Na verdade, é de esperar que qualquer ser tridimensional e razoavelmente inteligente, em qualquer lugar do universo, conheça essas linguagens de forma muito semelhante à que é apresentada aqui.

Logo acima da entrada da Academia de Platão, havia uma placa que dizia: "Que nenhum ignorante em geometria entre aqui". Então, vamos fazer alguma pesquisa.

PONTO, LINHA E PLANO

Nenhuma, uma e duas dimensões

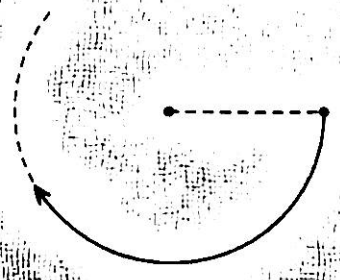
Comece com uma folha de papel. O ponto é a primeira coisa que pode ser feita. É sem dimensão e não se encontra no espaço. Sem um interior ou um exterior, o ponto é a fonte de tudo o que virá a partir de agora. O ponto é representado (*abaixo à esquerda*) como uma pequena marca ou sinal circular.

A primeira dimensão, a linha, surge quando o Uno emerge em dois princípios, ativo e passivo (*abaixo à direita*). O ponto escolhe um lugar fora de si mesmo, uma direção. A separação ocorre, e a linha é criada. A linha não tem espessura, e, algumas vezes, se diz que ela não tem fim.

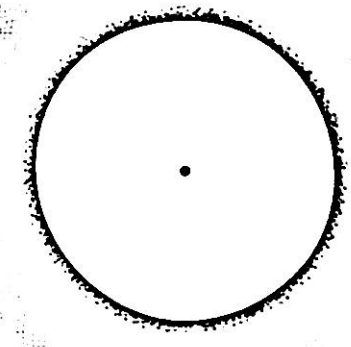
Agora, três "caminhos" tornam-se evidentes (*imagem ao lado*):

1. Com uma extremidade da linha imóvel, ou passiva, a outra é livre para rodar e descrever um círculo, que representa o Céu.
2. O ponto ativo da linha também pode mover-se para uma terceira posição, equidistante das duas outras, descrevendo, assim, um triângulo equilátero.
3. A linha pode produzir outra, que se afasta da primeira até que as distâncias sejam iguais a fim de formar um quadrado, representando a Terra.

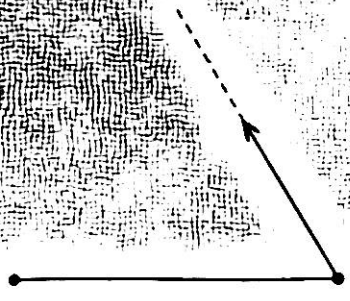
Três formas se manifestaram: círculo, triângulo e quadrado. Todas são ricas em significado. Nossa jornada começou.



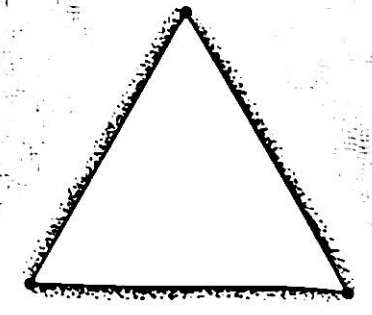
Gire uma linha



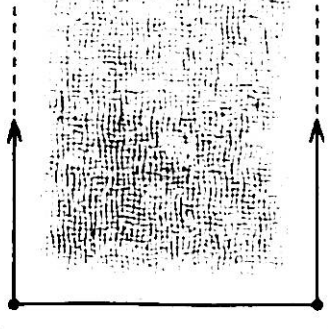
Crie um círculo



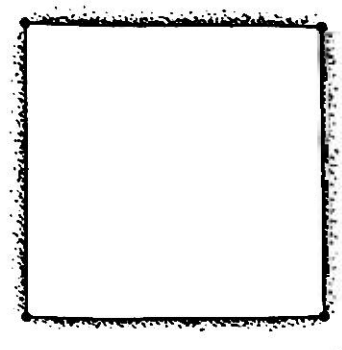
Mova um vértice



Componha um triângulo



Translade uma linha



Produza um quadrado

ESFERA, TETRAEDRO E CUBO

De duas para três dimensões

Embora este livro se preocupe principalmente com o plano, os três "caminhos" da rotação, do movimento de um vértice e do translado de um objeto são levados aqui um passo adiante, em direção a três dimensões (*imagem ao lado*):

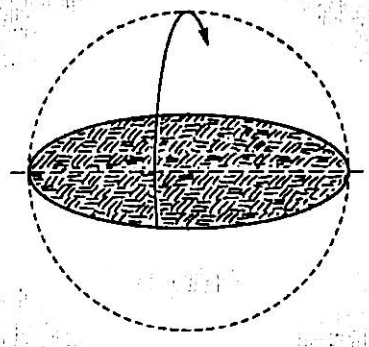
1. O círculo gira para se tornar uma esfera. Algo que era circular permanece essencialmente circular (*linha superior*).
2. O triângulo produz um quarto ponto a uma distância igual dos outros três vértices para compor um tetraedro. Dessa forma, um triângulo equilátero cria mais outros três (*linha central*).
3. O quadrado ergue um segundo quadrado, equidistante de si mesmo, até que se formem outros quatro quadrados e um cubo seja criado (*linha inferior*).

Observe-se como é preservada a divisão essencial em circularidade, triangularidade e perpendicularidade da página anterior.

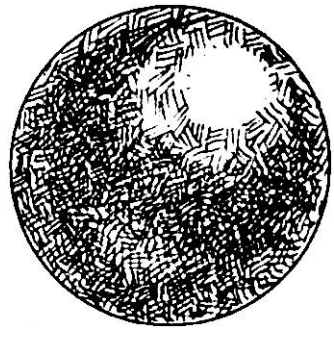
A esfera é um símbolo do cosmos e da totalidade da criação manifesta. Na natureza, coisas muito grandes e muito pequenas tendem a ser esféricas. Einstein descobriu que um ponto em quatro dimensões (ou seja, você aqui e agora) é uma esfera em expansão à velocidade da luz, e tudo o que podemos ver do universo inteiro está dentro de uma esfera de horizonte de eventos. Já o cubo representa a Terra.

Comparada a qualquer outro sólido tridimensional existente, a esfera possui a menor área de superfície possível em relação ao seu volume, enquanto, entre os sólidos regulares, o tetraedro é o oposto.

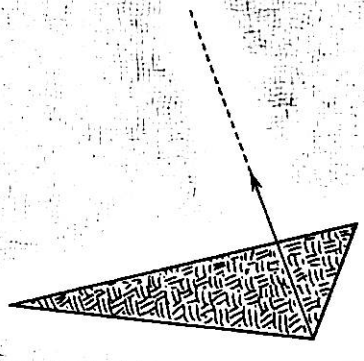
De fato, o tetraedro esconde um cubo: se você desenhar uma única linha diagonal em cada face de um cubo, de forma que elas se juntem nos cantos, terá definido as arestas de um tetraedro. Experimente!



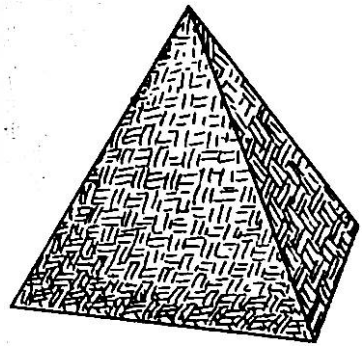
Gire um círculo



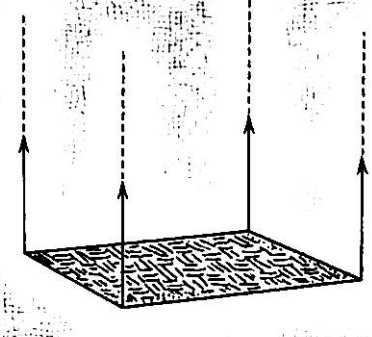
Crie uma esfera



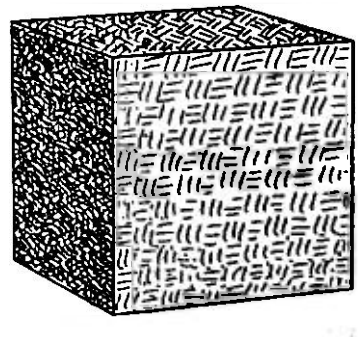
Mova um vértice



Componha um tetraedro



Translade um quadrado



Produza um cubo

UM, DOIS E TRÊS

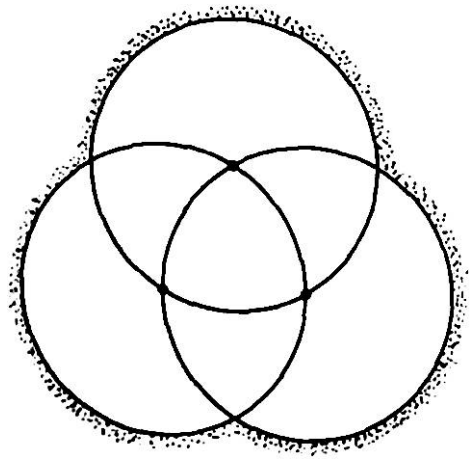
Brincando com círculos

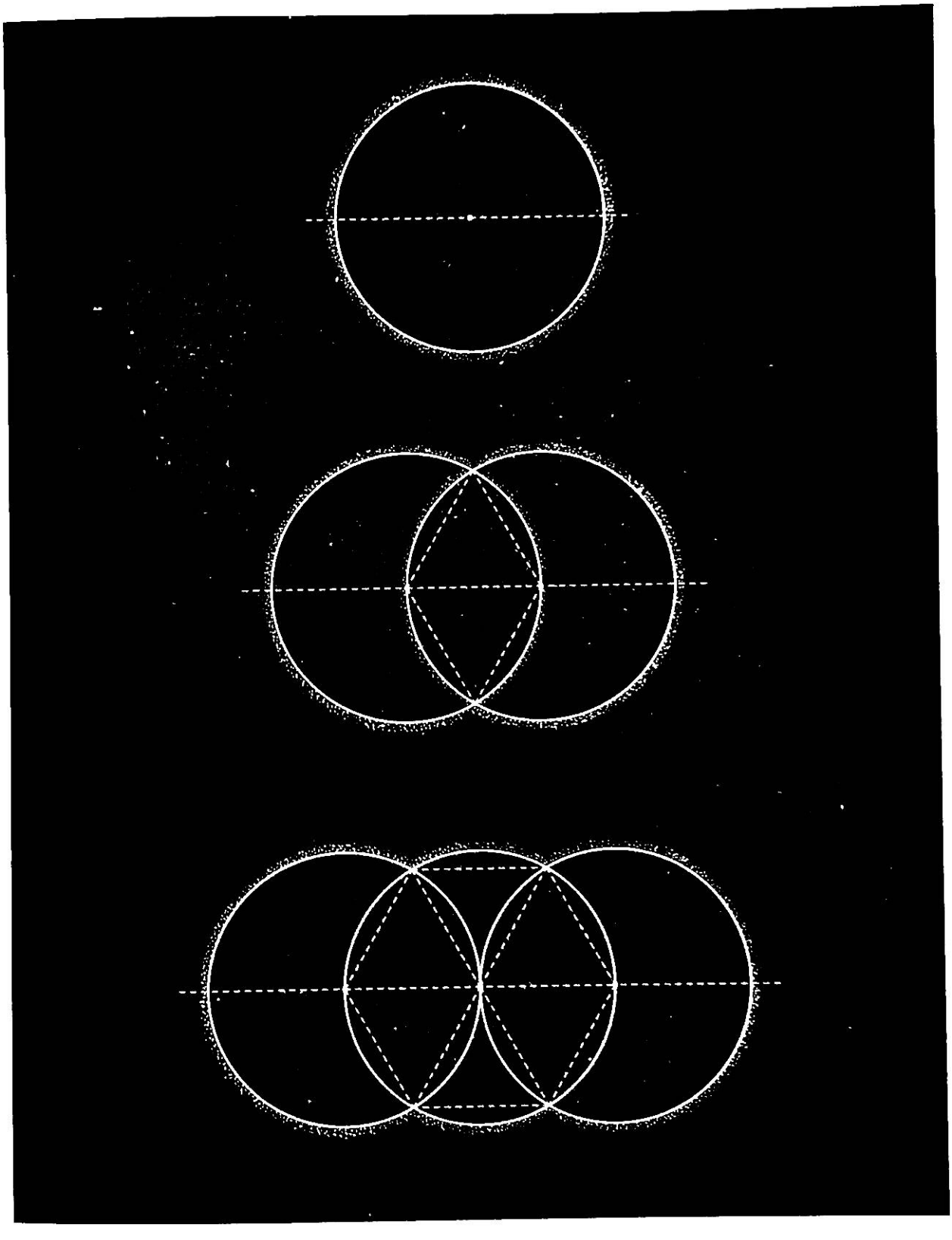
Pegue uma régua, um compasso, algo com o que desenhar. Desenhe uma linha horizontal através da página. Abra o compasso e coloque a ponta sobre a linha. Em seguida, desenhe um círculo (*topo, imagem ao lado*).

Onde o círculo cortar a linha, coloque a ponta do compasso e desenhe outro círculo, deixando o compasso com a mesma abertura anterior. Quando um círculo é desenhado sobre outro círculo dessa forma, de modo que ambos atravessem os centros um do outro, então surge uma importante forma de amêndoa, a *vesica piscis*, que significa literalmente "bexiga de peixe". Esta é uma das primeiras coisas que os círculos podem fazer. Cristo é muitas vezes representado dentro de uma *vesica*. Dois triângulos equiláteros também são definidos dentro dela (*centro, imagem ao lado*).

Como antes, um terceiro círculo pode ser adicionado à linha, normalmente do outro lado do primeiro círculo desenhado, e, com este simples ato, definem-se todos os seis pontos de um hexágono perfeito (*embaixo, imagem ao lado*). De forma alternativa, o terceiro círculo pode ser adicionado como mostrado abaixo, para produzir uma forma triangular elegante.

Assim, os círculos produzem facilmente triângulos e hexágonos perfeitos.





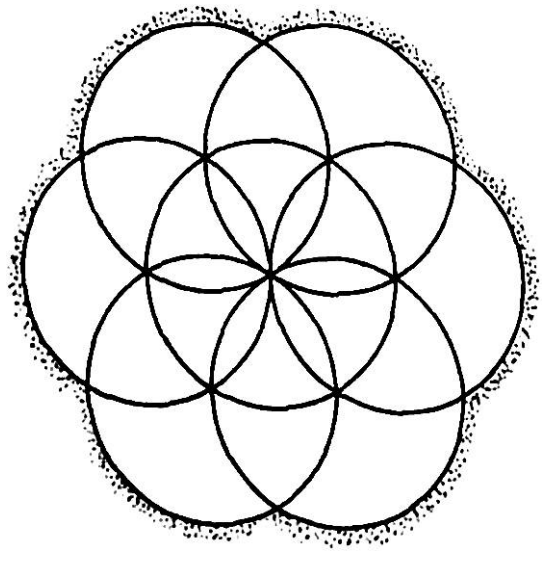
SEIS EM TORNO DE UM

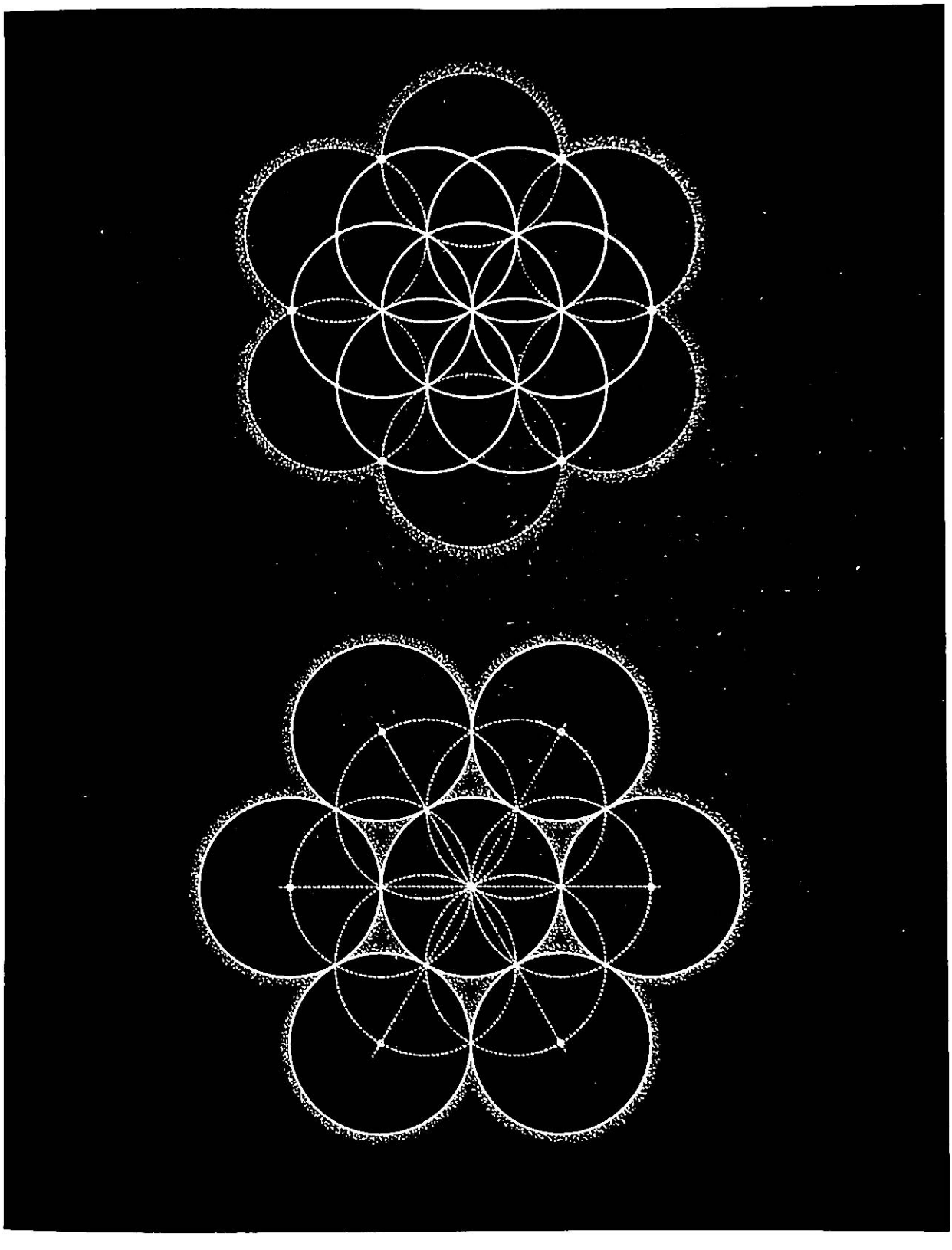
Ou doze, ou mesmo dezoito

Os seis pontos do hexágono dão origem ao padrão floral apresentado abaixo. De forma alternativa, ele pode ser desenhado ao fazermos um círculo "andar" em torno de si mesmo – algo que a maioria das crianças faz na escola, quer sob a instrução de um professor, quer apenas brincando com um compasso.

Estamos agora buscando o diagrama inferior da imagem ao lado, e precisamos dos centros dos seis círculos externos. Uma maneira de conseguir isso é estender a flor, desenhando levemente os seis círculos que aparecem tracejados no diagrama superior da imagem, para encontrarmos os seis centros. Ou, então, podemos desenhar linhas retas, como vemos no diagrama inferior (*imagem ao lado*). Ambas as maneiras funcionam.

Podemos ver agora que seis círculos iguais cabem perfeitamente ao redor de outro idêntico. Podemos usar copos, moedas ou bolas de tênis em conjunto para comprovar essa propriedade; ainda assim, ela é realmente extraordinária. Na Bíblia, o "seis em torno de um" é um tema com que o Antigo Testamento é aberto, com os seis dias de trabalho e o sétimo dia de descanso. De fato, há muito das características do seis nos círculos.





DOZE EM TORNO DE UM

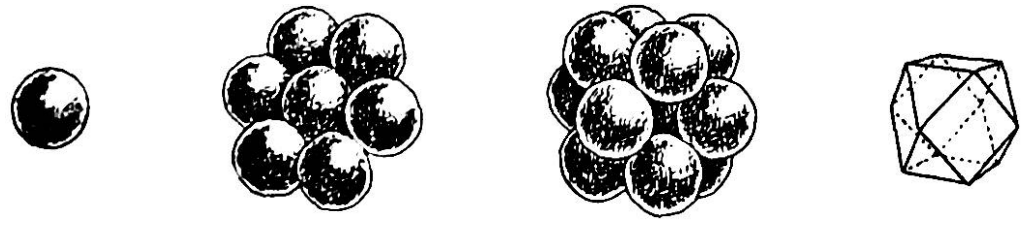
Como desenhar um dodecágono

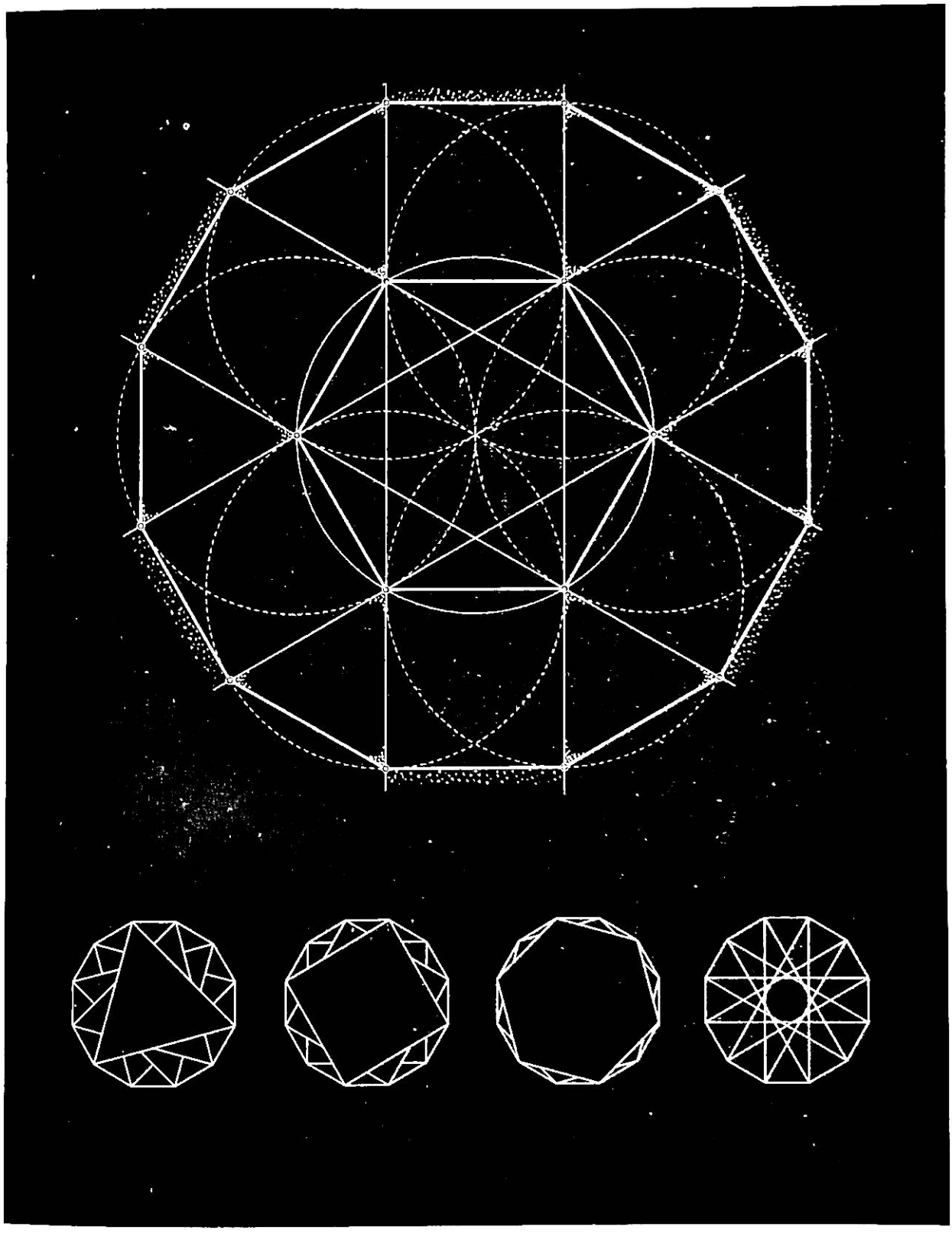
Assim como o um produz o seis, também o seis produz o doze. Aqui, os braços de uma estrela de seis pontas estendem-se da flor para cruzar as margens externas dos seis círculos. De uma bela maneira, consegue-se uma perfeita divisão global do espaço em doze partes (*imagem ao lado*). O polígono de doze lados é chamado dodecágono, que significa, literalmente, "doze faces".

O dodecágono também é formado a partir de seis quadrados e seis triângulos equiláteros ajustados harmoniosamente em torno de um hexágono – consegue vê-los todos na imagem ao lado? Além disso, essa forma se divide em seus fatores – três, quatro e seis – como quatro triângulos, três quadrados e dois hexágonos (*linha inferior, imagem ao lado*).

Abaixo está a versão tridimensional da mesma história. Uma bola naturalmente acomoda doze outras ao redor de si, de modo que cada uma delas toque a bola central e quatro vizinhas. Pode-se observar esse tipo de disposição em maçãs e laranjas em qualquer banca de um mercado. Essa forma é chamada cuboctaedro e está intimamente relacionada ao tetraedro e ao cubo que vimos na página 69. A maioria dos cristais cresce ao longo dessas linhas.

Em três dimensões, o doze é o número que se encaixa em torno do um, da mesma maneira que o seis se encaixa em torno do um em duas dimensões. O Novo Testamento, por exemplo, é uma história de um professor cercado por doze discípulos.





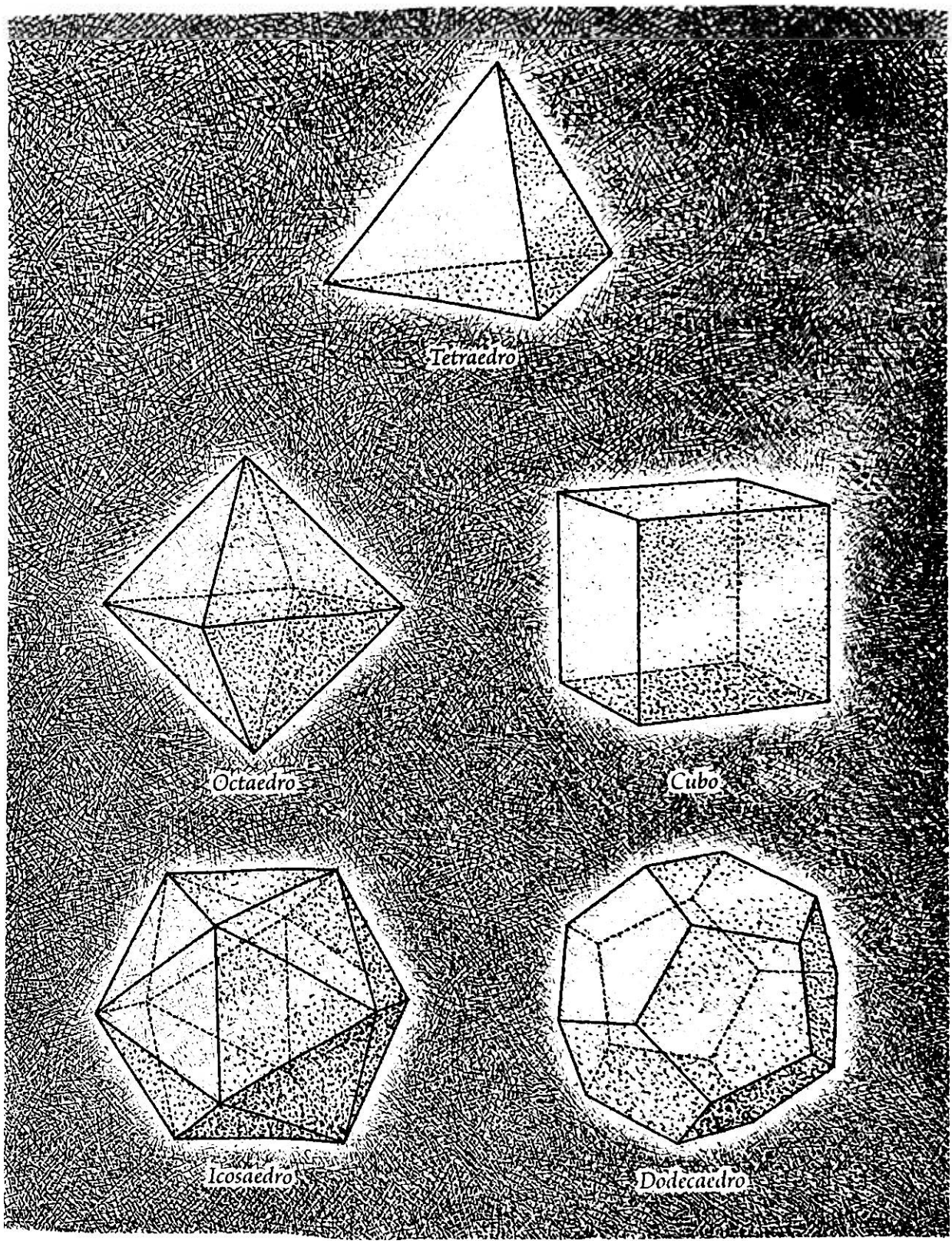
OS CINCO ELEMENTOS

Uma breve incursão na terceira dimensão

Embora abordados em profundidade no Livro III deste volume, vale a pena mencionar aqui que há apenas cinco sólidos tridimensionais regulares. Cada um deles tem arestas iguais, cada face é o mesmo polígono perfeito, e cada vértice está à mesma distância do centro. Conhecidos como os cinco sólidos platônicos, foram identificados nas Ilhas Britânicas 2 mil anos antes de Platão – conjuntos de pedra esculpida de 4 mil anos de idade foram encontrados em círculos em Aberdeenshire, na Escócia (*figura abaixo, de Critchlow*).

O primeiro sólido é o tetraedro, com quatro vértices e quatro faces de triângulos equiláteros, tradicionalmente representando o elemento Fogo. O segundo sólido é o octaedro, criado a partir de seis pontos e oito triângulos equiláteros, representando o Ar. O cubo é o terceiro sólido, com oito vértices e seis faces quadradas, representando a Terra. O quarto é o icosaedro, com doze vértices e vinte faces de triângulos equiláteros, representando o elemento Água. O quinto e último elemento é o dodecaedro, que possui vinte vértices, representando o misterioso quinto elemento, o Éter.

Observe quão belo é o dodecaedro e como é feito de doze pentágonos, formas de cinco lados perfeitas.


Tetraedro
Octaedro
Cubo
Icosaedro
Dodecaedro

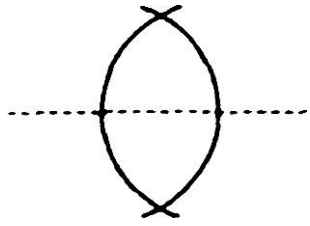
CIRCULANDO O QUADRADO

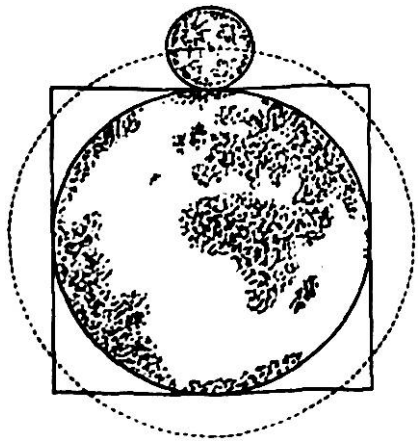
O casamento de Céu e Terra

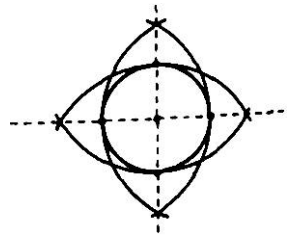
O círculo é a forma tradicionalmente atribuída aos Céus, e o quadrado, à Terra. Quando essas duas formas são unificadas, ao serem construídas iguais em área ou perímetro, falamos da "quadratura do círculo", o que significa que Céu e Terra, ou Espírito e Matéria, estão simbolicamente associados ou casados. O homem quíntuplo existe entre o sêxtuplo Céu e a quádrupla Terra, e a imagem de Leonardo da Vinci (*ao lado*) também mostra que a envergadura do homem é igual à sua altura, que essa medida equivale a sete vezes a medida de seus pés, e outras proporções importantes.

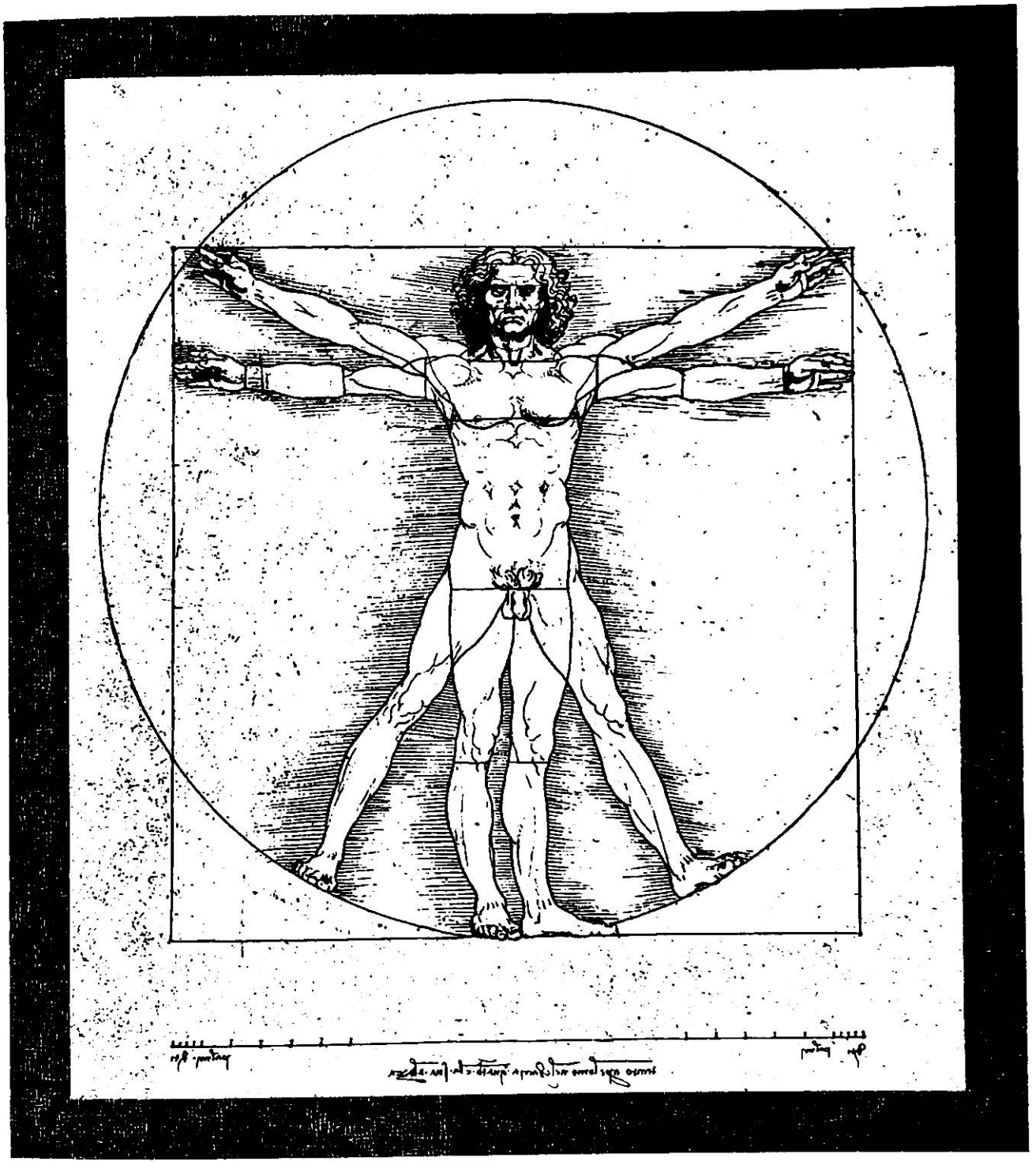
Como vimos anteriormente (*página 35*), Terra e Lua juntas criam a quadratura do círculo, pois, se a Lua (diâmetro 3) for posicionada tangenciando a circunferência da Terra (diâmetro 11), então um círculo celeste que atravesse o centro da Lua (*linha pontilhada, centro da imagem abaixo*) tem raio 7 e, assim, circunferência 44, que é a mesma medida do perímetro do quadrado ao redor da Terra. Isso funciona porque o π (pi), que relaciona a circunferência de um círculo ao seu diâmetro, é praticamente igual a 22/7 (3,1428571...). Na imagem de Leonardo, a Lua caberia acima da cabeça do homem.

Também mostramos (*abaixo à esquerda e à direita*) uma forma simples de construção de um quadrado usando régua e compasso. Os octógonos vêm logo a seguir.









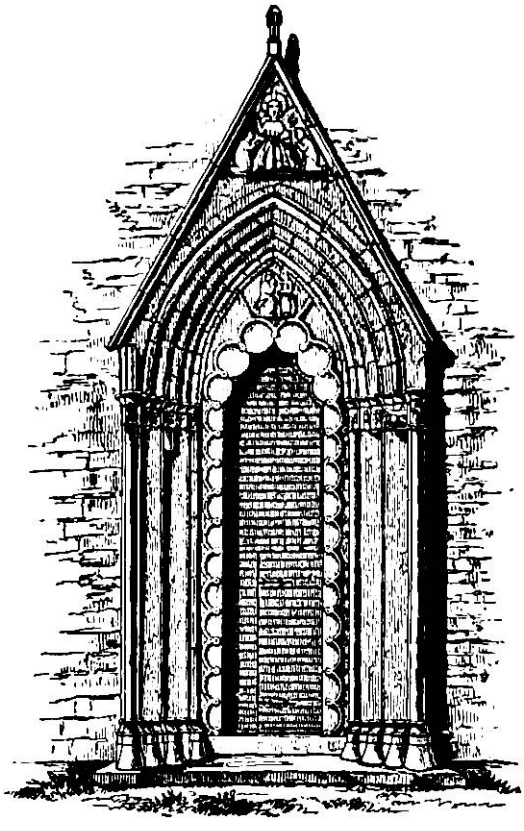
O CÂNONE

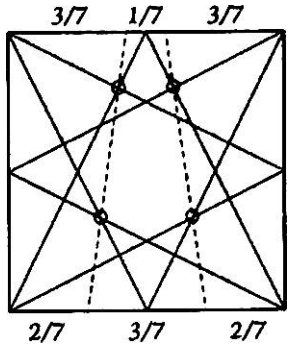
Três, sete e onze

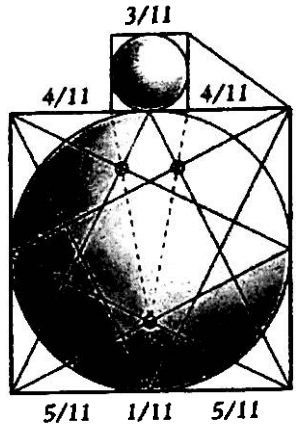
A quadratura do círculo pela Lua (tamanho 3) e pela Terra (tamanho 11) também se manifesta na geometria de um arco-íris duplo, cujos belos arcos a 41,5° e 52,5° desenham precisamente o mesmo diagrama (*abaixo, a partir de Martineau*) – um casamento entre Céu e Terra de fato!

Um portal da Igreja Gerum, em Gothland, na Suécia (*imagem ao lado*), codifica a relação três por onze. Há três números onze em trinta e três, e os mitos irlandeses e nórdicos estão repletos de contos com trinta e três guerreiros. Jesus morreu e ressuscitou aos trinta e três anos, e o Sol leva trinta e três anos para uma perfeita repetição de seu nascimento. O sete também se relaciona com o três e com o onze. É um segredo antigo que a inclinação da Terra, frequentemente escondida na arte sacra como a inclinação de uma cabeça santa (a da Virgem Maria ou do Buda), é facilmente produzida pela diagonal de um retângulo com três de largura e sete de altura. Por fim, a proporção 11/7 é o antigo valor egípcio para a metade do π.

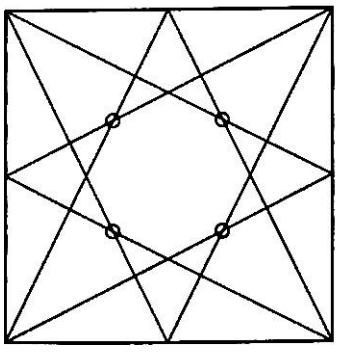
O diagrama de Sandreckoner (*imagem ao lado*) é uma maneira original de dividir as arestas de um retângulo em frações harmônicas (*segundo Malcolm Stewart*).

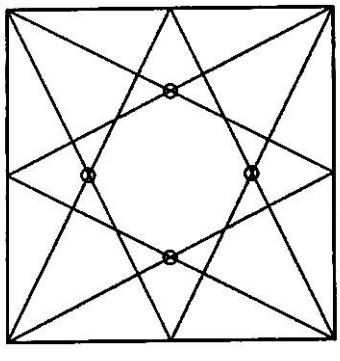


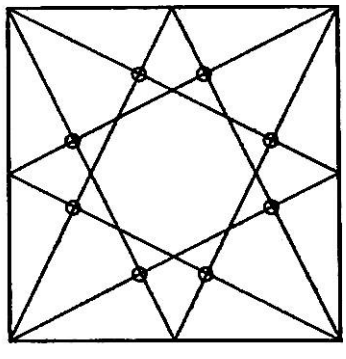


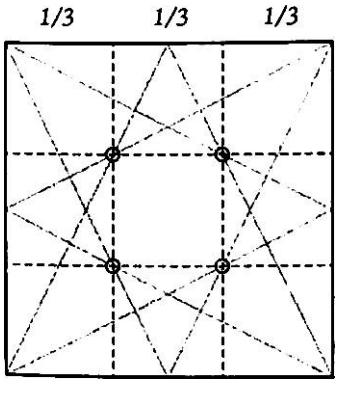


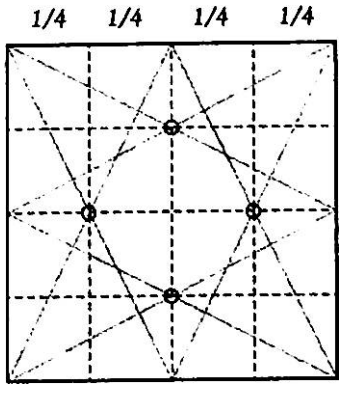
Acima e abaixo: o diagrama de Sandreckoner. Simplesmente juntando os cantos aos centros de cada lado de um quadrado, suas arestas podem ser divididas exatamente em 3, 4, 5 e, além disso, em 7 e 11 partes iguais, o que faz desse diagrama um instrumento extremamente útil. As linhas iniciais também produzem uma superabundância de comprimentos de números inteiros, de áreas e de formas, incluindo uma infinidade de triângulos pitagóricos de lados 3-4-5 em várias escalas.

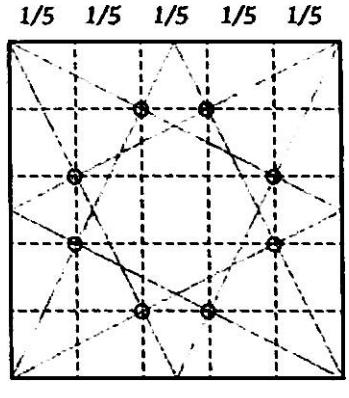












PIRÂMIDE PI

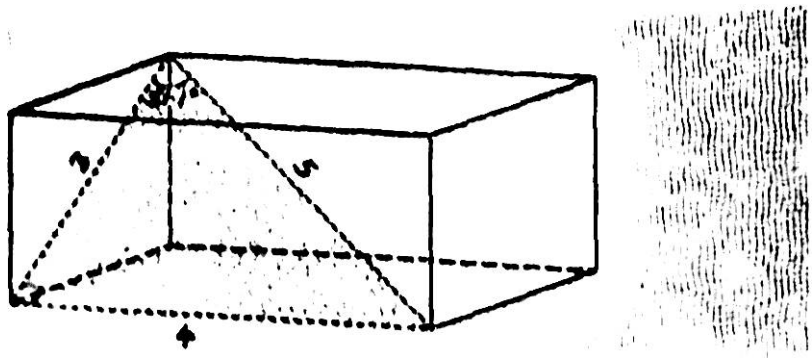
Um casamento de tudo

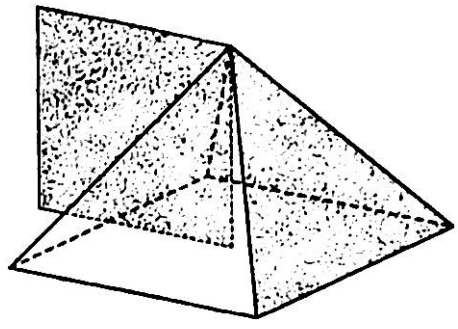
Talvez não exista um objeto geométrico mais famoso na Terra que a Grande Pirâmide de Gizé, no Egito, com suas passagens estranhas e câmaras enigmáticas. Os cinco diagramas na página ao lado nos mostram que:

1. O quadrado da altura é igual à área de cada face.
2. A proporção áurea na pirâmide, $\Phi = 1{,}618$ (*ver página 88*).
3. Na pirâmide, o Pi, ou π, define a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro (3,14159...).
4. A pirâmide gera a quadratura do círculo (*ver página 78*).
5. Um pentagrama define uma "rede" para a pirâmide – corte e dobre!

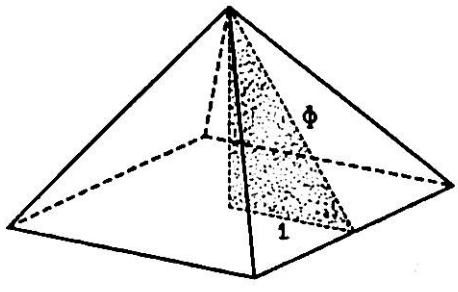
Geometria significa "medida da Terra". A pirâmide funciona como um relógio de sol absurdamente preciso, como um observatório de estrelas, como ferramenta de agrimensura, e como repositório para pesos e padrões de medida. Medições altamente precisas da Terra estão inscritas em seu projeto, assim como dados astronômicos detalhados e estas lições geométricas simples apresentadas aqui.

Um triângulo de lados 3-4-5 encaixa-se na forma da Câmara do Rei (*abaixo*) e também fornece o ângulo de inclinação da segunda pirâmide de Gizé. A meio caminho entre as duas inclinações, está a medida de 51,4°, que equivale a aproximadamente um sétimo de um círculo.

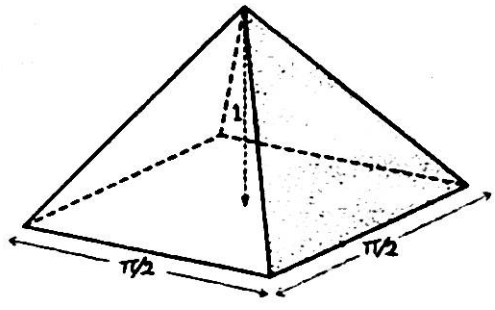




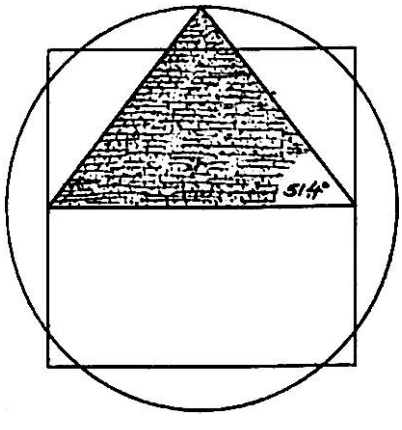
Um mapa da Terra
Quadrado da altura = área da face



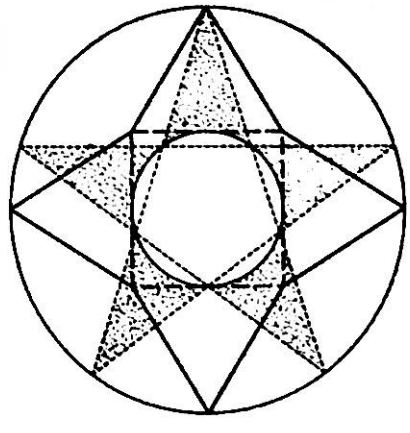
A proporção áurea na pirâmide
Cosseno da inclinação = 0,618



Pi na pirâmide
Perímetro = 2π (pi) altura



Circunferência do círculo na altura
= perímetro da base da pirâmide



Construindo a pirâmide a partir de um
pentagrama desenhado dentro de um círculo

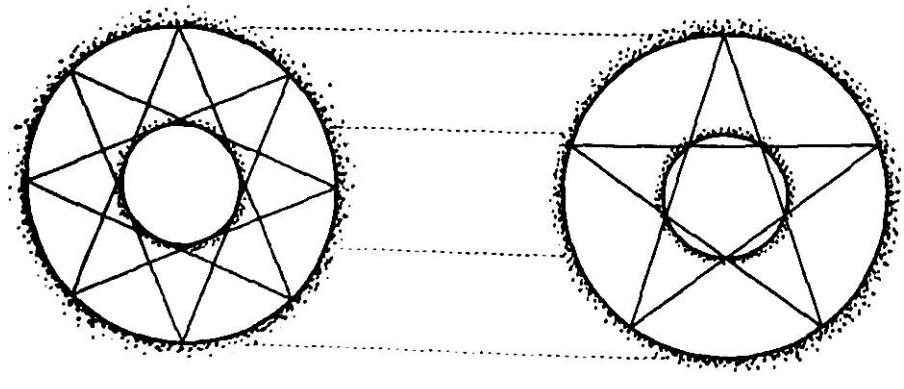
METADES E TERÇOS

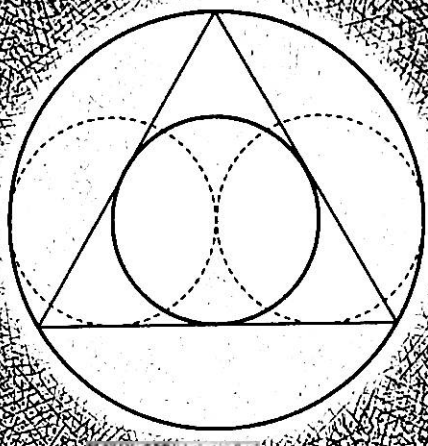
Definidos por triângulos e quadrados

Um triângulo equilátero (*canto superior esquerdo, imagem ao lado*) ou dois quadrados encaixados (*canto superior direito, imagem ao lado*) fazem, ambos, a mesma coisa: o círculo dentro de cada uma dessas figuras tem exatamente a metade do tamanho do círculo ao redor delas. Essa é uma imagem geométrica da oitava musical, em que um comprimento de corda ou uma frequência é reduzida à metade ou duplicada.

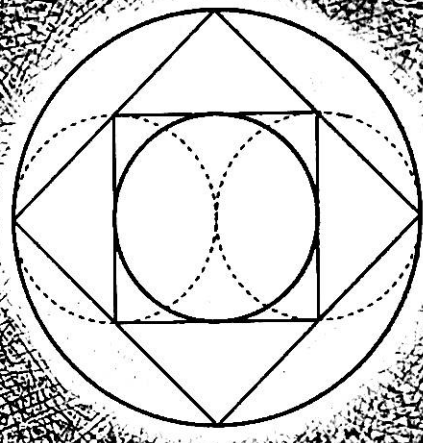
Convenientemente, o equivalente tridimensional do triângulo, o tetraedro, define a próxima proporção fracionada, um terço, como a razão entre o raio da esfera mais interna e o raio da esfera que a contém (*canto inferior esquerdo, imagem ao lado*). Dois cubos ou octaedros encaixados ou um octaedro dentro de um cubo (*canto inferior direito, imagem ao lado*) produzem a mesma proporção de um terço. Essa proporção geométrica é musicalmente igual a uma oitava mais uma quinta em notação harmônica. Assim, duas dimensões prontamente definem uma *metade*, e três dimensões definem um *terço*.

Um casamento similar, mas não tão perfeito, acontece entre o cinco e o oito (*abaixo*), cujas geometrias muitas vezes brincam entre si. Em ambos os diagramas, o círculo interior poderia ter o tamanho ou representar a órbita do planeta Mercúrio, se o círculo exterior fosse tomado pelo tamanho ou pela órbita da Terra.

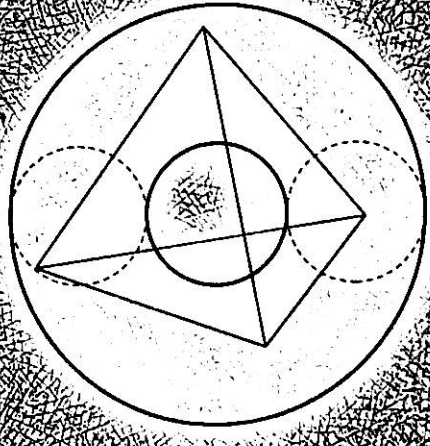




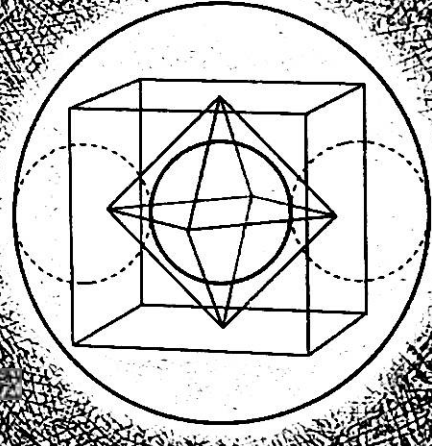
Ad triangulum:
um triângulo equilátero define dois círculos, tendo um metade do tamanho do outro



Ad quadratum:
dois quadrados encaixados definem dois círculos, novamente tendo um metade do tamanho do outro



Ad tetratum:
a esfera dentro de um tetraedro tem um terço do tamanho da esfera externa



Ad cuboctum:
um cubo e um octaedro novamente definem uma esfera interna um terço menor que a esfera externa

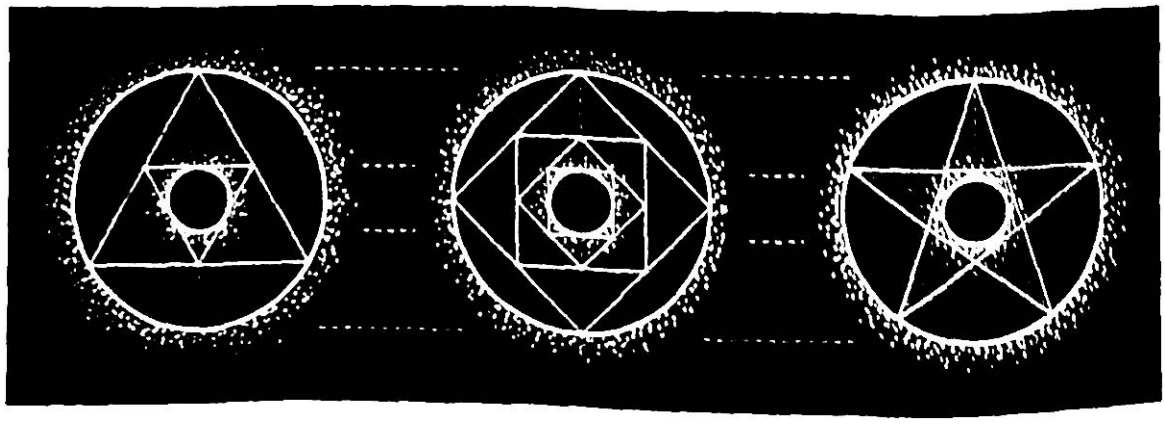
AS FORMAS DOS SONS

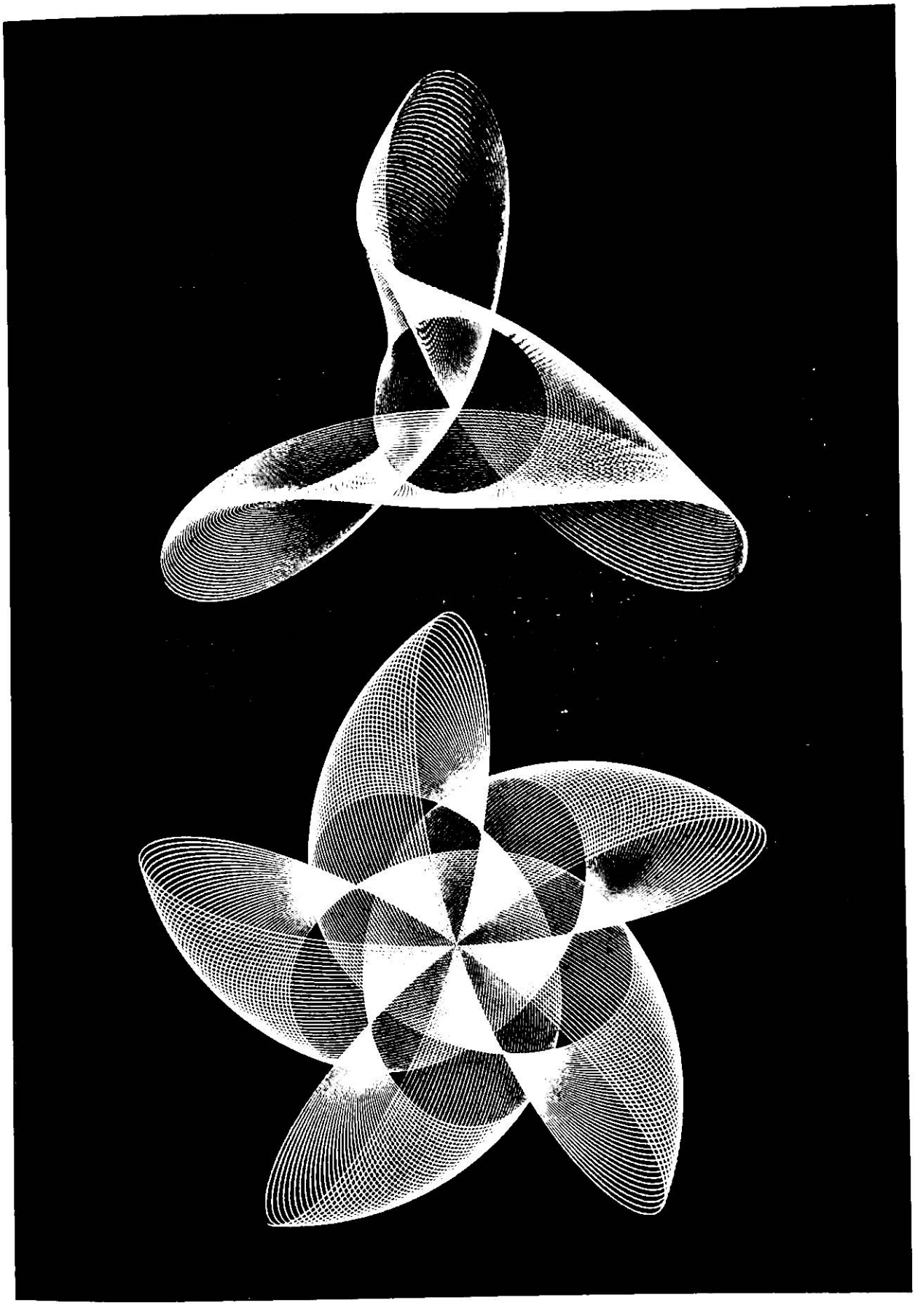
E três quartos

A geometria é o "número no espaço", a música é o "número no tempo". Como veremos no Livro IV, os intervalos musicais básicos são simplesmente relações elementares: 1:1 (uníssono), 2:1 (a oitava), 3:2 (a quinta), 4:3 (a quarta) e assim por diante. A diferença entre a quarta e a quinta, que funciona em 9:8, é o valor de um tom. Os intervalos musicais, assim como as proporções geométricas, sempre envolvem dois elementos em relação, dois comprimentos de corda, dois períodos (extensões de tempo) ou duas frequências (pulsações por período de tempo). Relações simples que soam e parecem belas.

Podemos ver os intervalos musicais como figuras ao balançar uma caneta em círculo em determinada frequência, enquanto balançamos uma mesa também em círculo, na direção oposta e em outra frequência – esse dispositivo é chamado *harmonógrafo*. Na imagem ao lado aparecem dois padrões de intervalos quase perfeitos. A oitava (*superior*) é desenhada como uma forma triangular; a quinta (*inferior*), como uma forma pentagonal.

No espírito da página anterior, duas oitavas ou uma quarta podem ser definidas, de forma exata, por dois triângulos, quatro quadrados ou, curiosamente, por um pentágono em um pentagrama (*imagem abaixo*).





A SEÇÃO ÁUREA

E outras *fontes importantes*

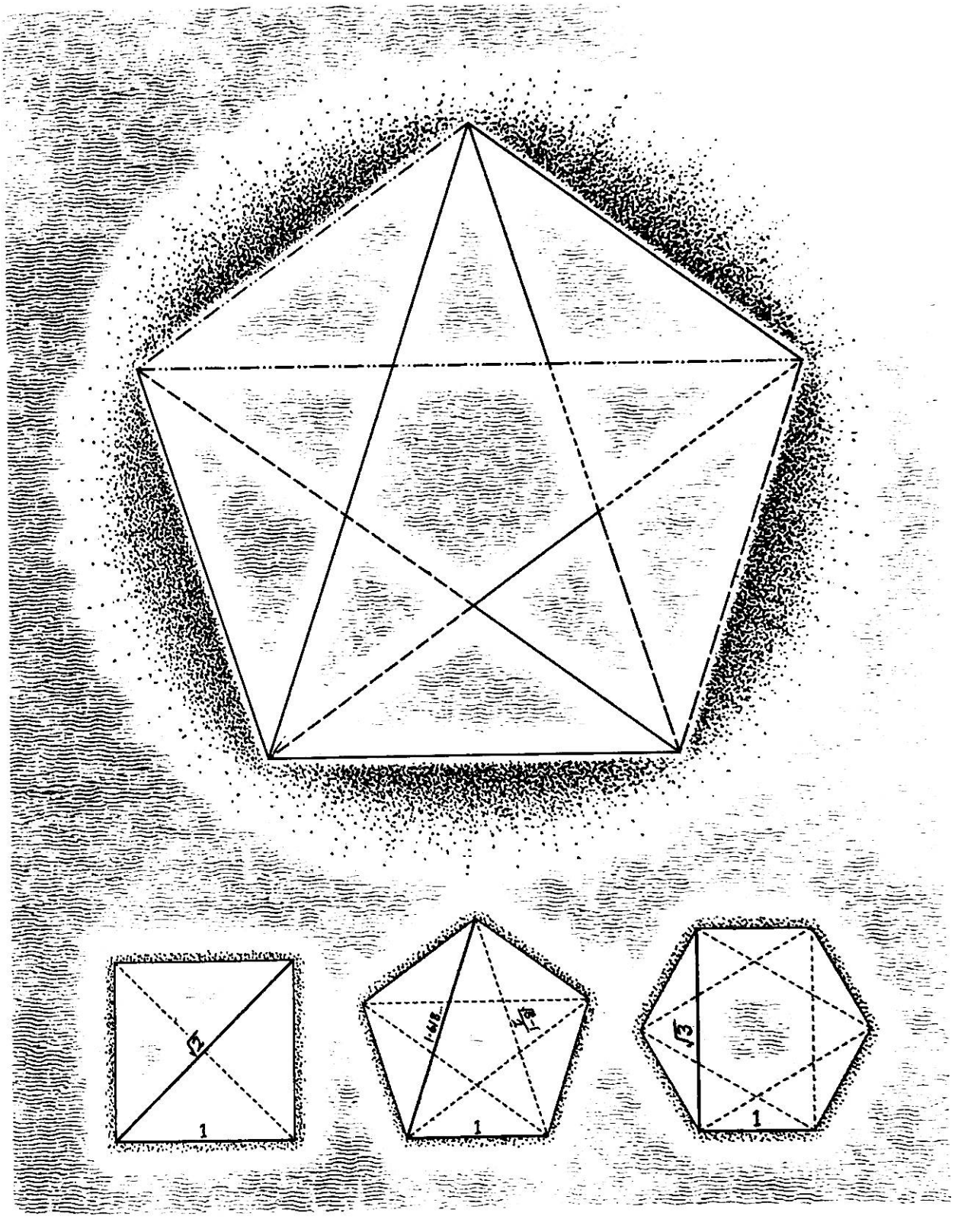
Um pentagrama dentro de um pentágono é apresentado na imagem ao lado. Um simples nó cuidadosamente amarrado em uma fita ou tira de papel, bem apertado e achatado, forma um pentágono perfeito. Experimente fazer um qualquer dia!

No diagrama principal da imagem ao lado, é possível ver que pares de linhas são tracejados cada um de maneira diferente. O comprimento de cada par de linhas encontra-se na proporção da seção áurea $1:\varphi$, onde φ (pronuncia-se "*phi*") pode ser 0,618 ou 1,618 (mais exatamente 0,61803399...). Os livros deste volume utilizam a letra minúscula φ para representar 0,618 e a letra maiúscula Φ para representar 1,618.

É importante ressaltar que φ divide uma linha de modo que a razão entre a parte menor e a maior é equivalente à razão entre a parte maior e o todo. Não há outra proporção que se comporte tão elegantemente em torno da unidade. Por exemplo, $1 \div 1{,}618 = 0{,}618$, e $1{,}618 \times 1{,}618 = 2{,}618$. Assim, um dividido por Φ é igual a φ (ou Φ menos um), e Φ multiplicado por Φ é igual a Φ mais um!

A seção áurea é uma das três proporções simples encontradas nos primeiros polígonos (*figuras menores da imagem*). Com comprimentos de aresta iguais a 1, um quadrado produz uma diagonal interna igual a $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de dois), um pentagrama produz uma diagonal igual a Φ, e um hexágono, uma diagonal igual a $\sqrt{3}$ (raiz quadrada de três). Muitos objetos familiares, de fitas cassete a cartões de crédito, e portas frontais gregorianas, são retângulos Φ. As raízes quadradas de dois e de três são amplamente encontradas em cristais, enquanto Φ aparece predominantemente na vida orgânica, possivelmente devido à natureza icosaédrica flexível da água e de outros líquidos. Todas as três proporções geométricas são empregadas no bom *design*, juntamente com as relações harmônicas.

Os termos vizinhos na série Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... (adicionando cada par de números para encontrar o seguinte) aproximam-se de φ com precisão cada vez maior. Para um interessado no assunto, $\varphi = 1/2(\sqrt{5} - 1)$ e $\Phi = 1/2(\sqrt{5} + 1)$.


√2
1
1,618...
√5-1
1
√3
1

ALGUMAS ESPIRAIS ESPECIAIS

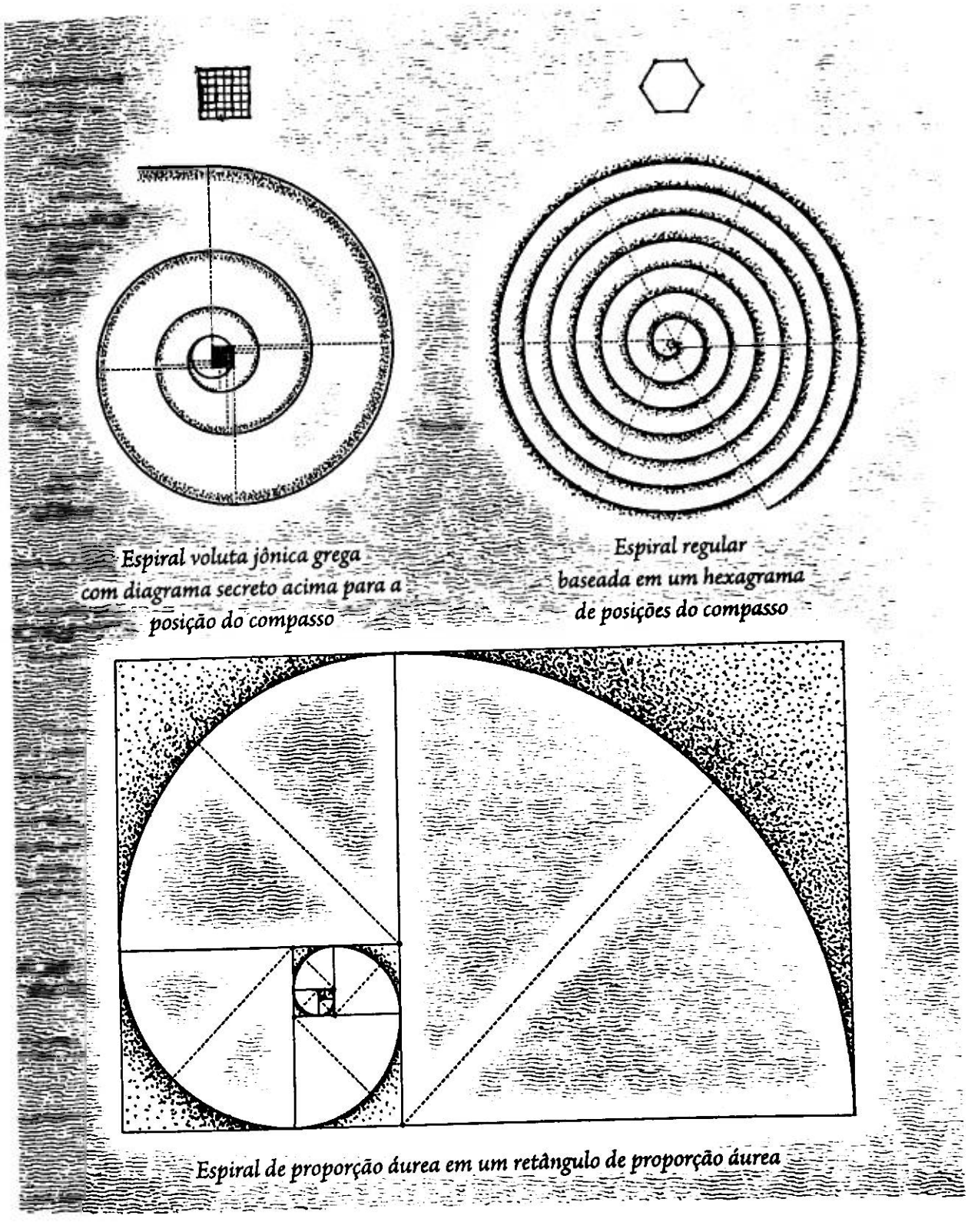
E como desenhá-las

Espirais são formas maravilhosas que a natureza utiliza em todas as escalas. Três foram selecionadas para este livro, todas as quais dão a impressão de uma espiral formada a partir de múltiplos arcos de círculos.

A primeira é a voluta jônica grega, apresentada no canto superior esquerdo da imagem. Esta espiral é bastante difícil de desenhar, e o segredo está no pequeno "diagrama" que aparece acima dela. As linhas tracejadas no desenho principal mostram os raios dos arcos e dão pistas para os centros dos círculos. Não é tão difícil quanto parece!

Espirais regulares como a que aparece no canto superior direito também precisam de um diagrama, que pode simplesmente ser composto por dois pontos (o mais fácil), por um triângulo, por um quadrado, por um pentágono ou por um hexágono (*como na figura*). Quanto mais pontos você tiver, mais perfeita será a espiral. Veja como fazer uma com apenas dois pontos: marque dois pontos muito próximos um do outro e desenhe um semicírculo centrado em um e partindo do outro. Agora, mantendo a caneta no mesmo lugar, abra o compasso um pouco mais amplamente, movendo a ponta para o outro ponto marcado, e continue na mesma direção, desenhando outro semicírculo. Repita o procedimento algumas vezes, e uma espiral aparecerá. Parece mais difícil do que realmente é – se você tentar, logo perceberá como funciona. Quanto maior for o diagrama, mais amplos serão os anéis da espiral. Agora, olhe novamente para o diagrama da voluta jônica – pode ver o que está acontecendo?

A figura maior mostra uma espiral áurea, um membro da família das espirais exponenciais que são comuns em todo o mundo natural. Um retângulo de proporção áurea tem uma propriedade especial: ao remover um quadrado a partir dele, produz-se outro retângulo de proporção áurea. Então, a espiral áurea é formada pela remoção de quadrados sucessivos e pelo preenchimento desse espaço com um quarto de arco.



Espiral voluta jônica grega com diagrama secreto acima para a posição do compasso

Espiral regular baseada em um hexagrama de posições do compasso

Espiral de proporção áurea em um retângulo de proporção áurea

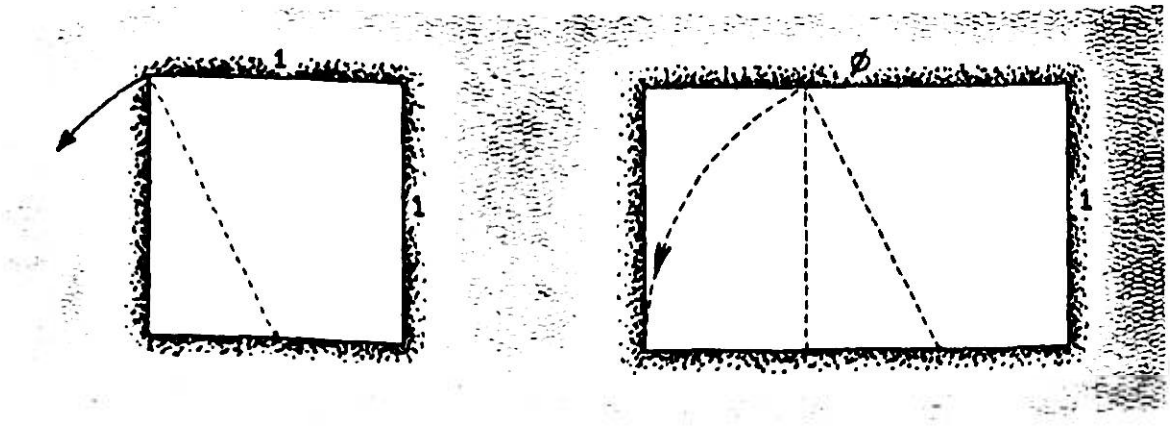
COMO DESENHAR UM PENTÁGONO

E um retângulo áureo

O método de construção de um pentágono apresentado na imagem ao lado é perfeito e encontra-se no *Almagesto*[1] de Ptolomeu (morto cerca de 168 d.C.).

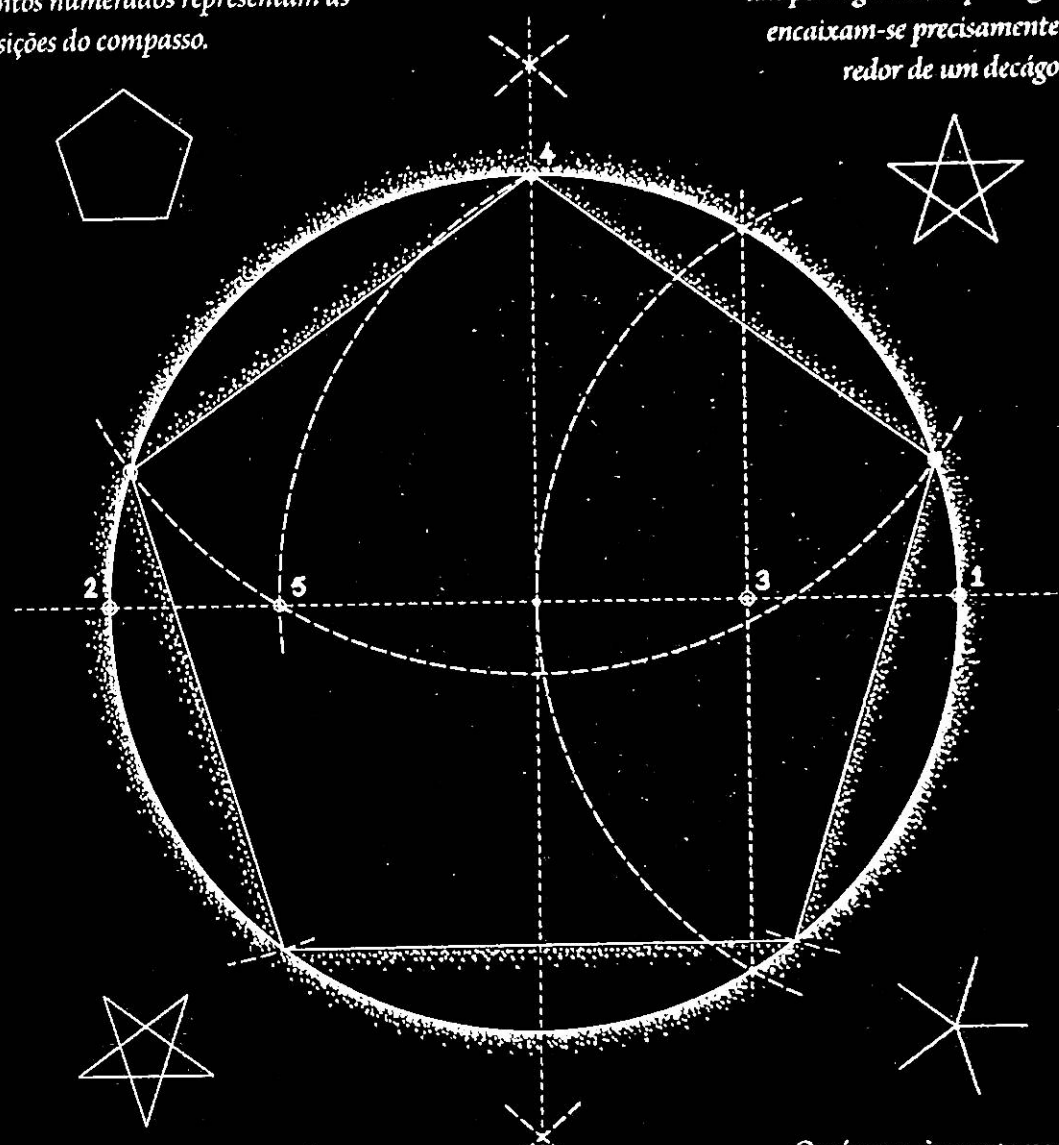
Desenhe uma linha horizontal com um círculo sobre ela. Mantenha a abertura do compasso fixa, coloque sua ponta em <1> e desenhe a *vesica* passando através do centro do círculo. Agora, aumente a abertura do compasso e desenhe arcos com o centro em <1> e <2> que se cruzem acima e abaixo do círculo. Use uma régua para desenhar a linha vertical que passa através do centro do círculo. Em seguida, desenhe uma linha vertical através da *vesica* para produzir <3>. Com a ponta do compasso em <3>, trace um arco para baixo a partir de <4>, na parte superior do círculo, para encontrar <5>. Com a ponta em <4>, gire o compasso através de <5> para encontrar dois vértices do pentágono.[2] Por sua vez, com a ponta do compasso sobre esses novos pontos, gire-o a partir do topo[3] para encontrar os dois últimos vértices do pentágono.

Um retângulo áureo, amplamente utilizado em pintura e arquitetura, é construído a partir do ponto médio do lado de um quadrado (*abaixo*).



Um método antigo para a construção de um PENTÁGONO perfeito: os pontos numerados representam as posições do compasso.

Um decágono (dez lados) pode ser facilmente construído a partir de um pentágono: dez pentágonos encaixam-se precisamente ao redor de um decágono.



O pentágono e seu gêmeo estelar, o pentagrama, são ambos símbolos da água – sendo cada molécula desse elemento um dos cantos de um pentágono – e da própria força vital.

O número cinco representa a união sagrada do dois (feminino) com o três (masculino), simbolizando, assim, a reprodução e as artes mágicas da cura.

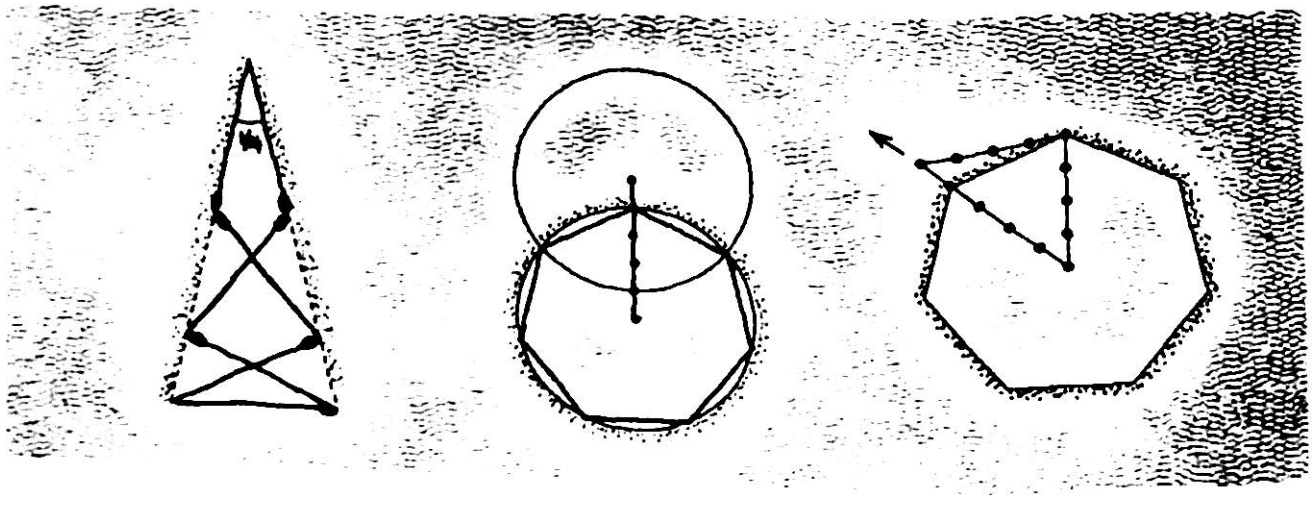
O HEPTÁGONO

Sete a partir de três

Divida um círculo em seis partes e desenhe o triângulo equilátero primário. Encontre os pontos médios <1> e <2> dos dois braços superiores do triângulo e desça duas linhas perpendiculares para encontrar os pontos <3> e <4> na base do triângulo, e outros dois pontos na parte inferior do círculo. Por fim, a partir do topo do círculo, gire o compasso passando através desses quatro pontos no triângulo para encontrar os quatro últimos pontos, sobre o círculo, dos sete que são os vértices do heptágono.

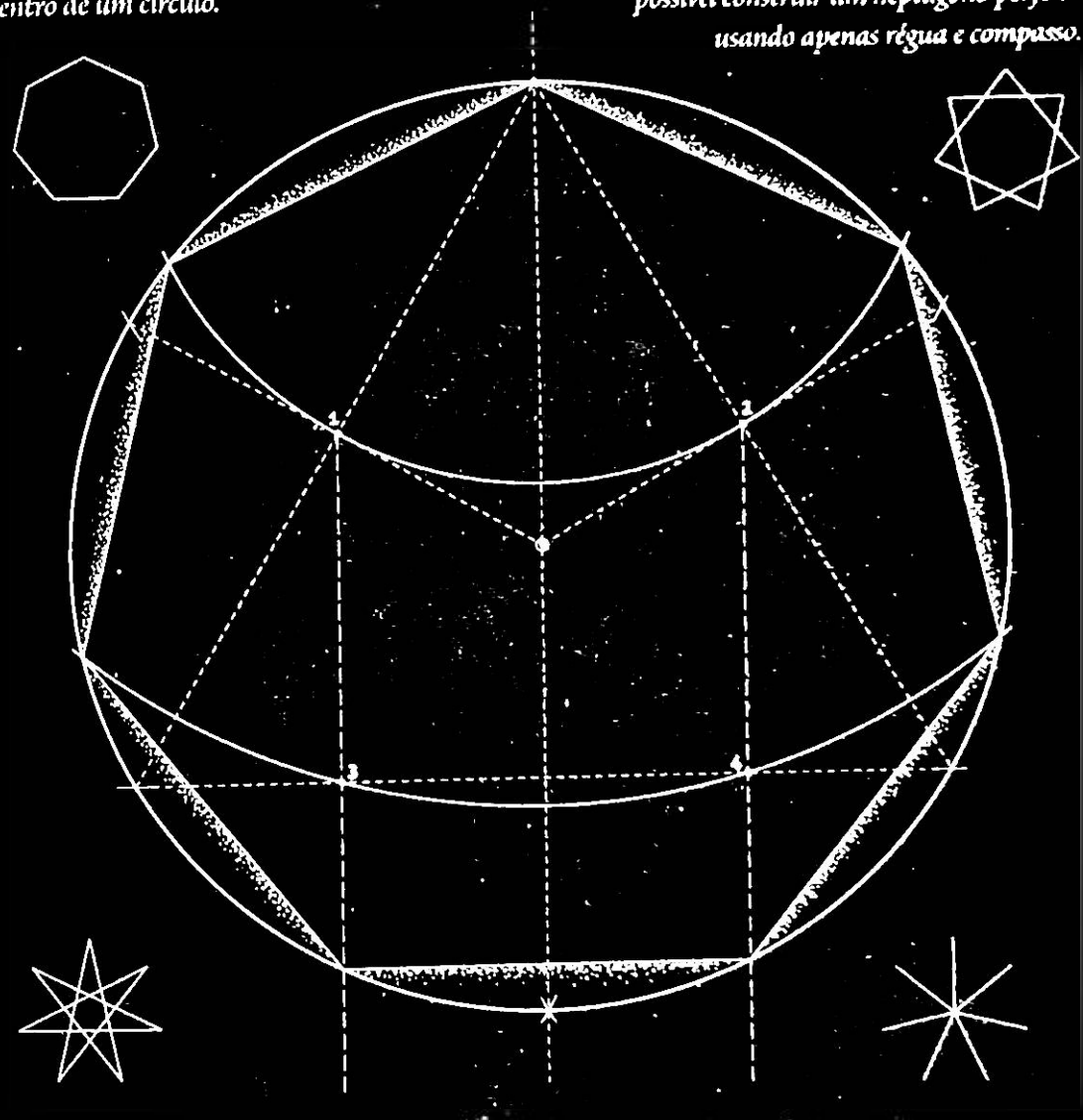
Embora seja impossível traçar um heptágono preciso usando somente régua e compasso, você pode fazê-lo perfeitamente usando sete hastes iguais ou palitos de fósforo (*abaixo à esquerda*). Essa cunha equivale a exatamente uma décima quarta parte de um círculo, razão por que são necessárias duas delas para uma sétima parte. Outras soluções antigas e menos precisas utilizam uma corda com seis nós ou formando um círculo fechado com treze nós (*abaixo ao centro e à direita*).

Os antigos construtores eram surpreendentes agrimensores. Os círculos de pedra de Avebury, na Inglaterra, estão posicionados exatamente na latitude 51,4°, equivalente a um sétimo de um círculo a partir do equador. Luxor, no Egito, está em uma latitude a exatamente meio caminho entre o equador e Avebury. Meca, entretanto, está na latitude áurea setentrional entre os dois polos.



Um método secreto para a construção de um HEPTÁGONO quase perfeito começa com um triângulo equilátero dentro de um círculo.

Este método não introduz erros compostos, uma vez que cada vértice é definido de forma independente – não é possível construir um heptágono perfeito usando apenas régua e compasso.



O sete simboliza a virgem, tendo pouco que ver com os outros números baixos e sendo completo em si mesmo. Muitas tradições reverenciam o sete especificamente como sagrado.

As sete notas da escala musical, os sete dias da semana, os sete corpos celestes da Antiguidade e os sete chacras corporais indicam a antiga santidade desse número.

O ENEÁGONO

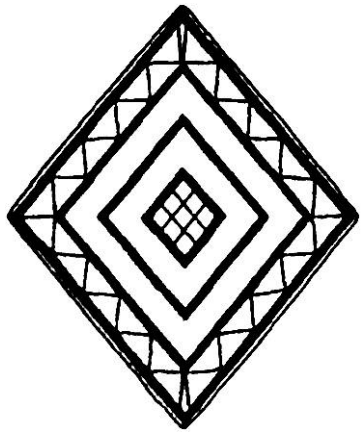
Nove e os losangos mágicos

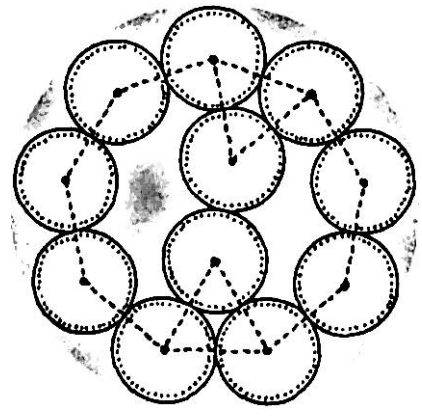
A construção apresentada ao lado divide um círculo em nove partes de forma quase perfeita, a partir de uma estrela inicial de seis pontas, utilizando três centros.

Os dígitos de muitos números especiais somam nove: 2.160 ou 7.920, por exemplo, os diâmetros da Lua e da Terra em milhas; ou 360 e 666, e ângulos pentagonais como 36, 72 e 108. Na verdade, os dígitos de todos os múltiplos de nove somados resultam em nove. Nove é o resultado de três vezes três, ou três ao quadrado. Muitas culturas tribais falam de nove mundos ou nove dimensões.

O losango de ouro de Bush Barrow,[4] encontrado perto de Stonehenge (*abaixo à esquerda*), tem ângulos internos de 80° e 100°, sugerindo uma geometria nônupla. Na latitude de Stonehenge, o nascer e o pôr do sol variam mais de 80°, enquanto o nascer e o pôr da lua variam mais de 100°, de modo que esse era um objeto útil.

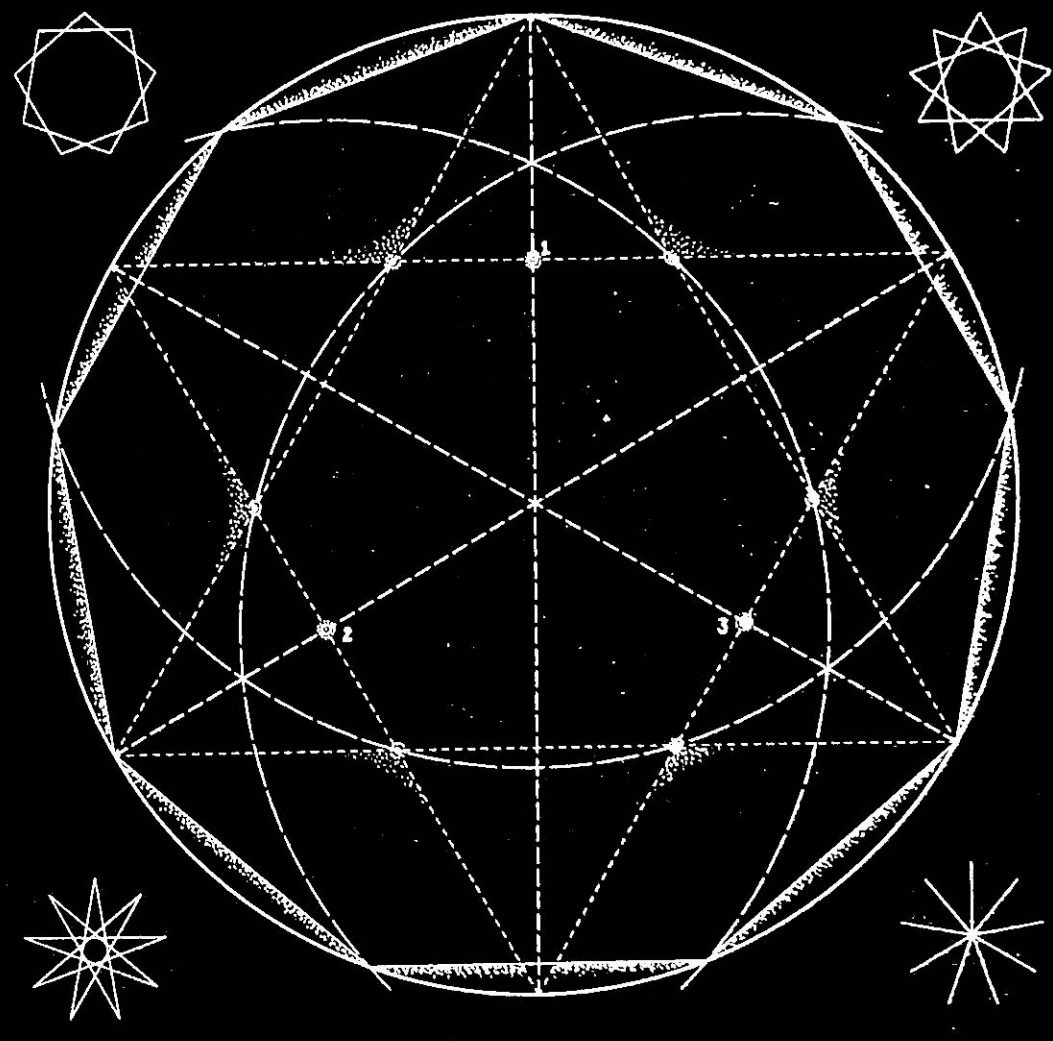
Não é para iniciantes o fato obscuro de que um eneágono de pontas esféricas (ou nove moedas dispostas em uma figura perfeita de nove lados) possa conter precisamente mais duas moedas que se tocam sem se sobrepor (*abaixo à direita*).





O método de John Michell para a construção de um ENEÁGONO quase perfeito começa com um hexagrama dentro de um círculo.

Um método simples e memorável, suficientemente preciso para os fins mais práticos.



O simbolismo do nove está coberto por véus de iniciação, cheio de narrativas sobre nove mundos ou nove reinos que aparecem em muitas tradições xamânicas.

O nove é o quadrado de três e, juntamente com o oito, que é o cubo de dois, é muito importante nas cosmologias orientais.

REBATIMENTO

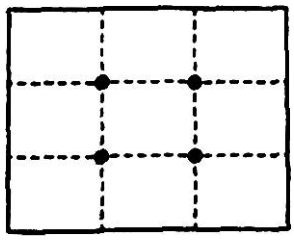
E a regra de três

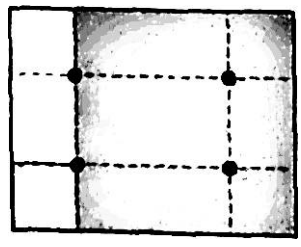
Os pintores possuem uma maleta cheia de truques secretos para ajudá-los a produzir a imagem perfeita. Aos estudantes de composição é ensinada "a regra de três", onde a tela é dividida em três partes horizontalmente e verticalmente, resultando em nove pequenas versões do retângulo original (*abaixo à esquerda*). As quatro intersecções produzidas são excelentes lugares para escolher como pontos focais da pintura, e são utilizadas por muitos artistas. Em contraste, itens colocados em linhas centrais parecem artificiais na composição, muito óbvios.

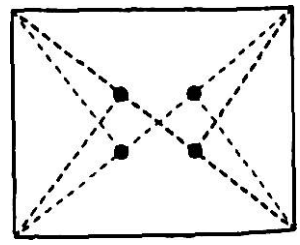
Outro truque é desenhar um quadrado dentro do retângulo e usar as linhas produzidas como eixos focais (*abaixo ao centro*). Isso é chamado rebatimento. Em retângulos áureos, o espaço deixado por um quadrado é outro retângulo áureo. Esse processo de divisão do retângulo pode ser feito indefinidamente.

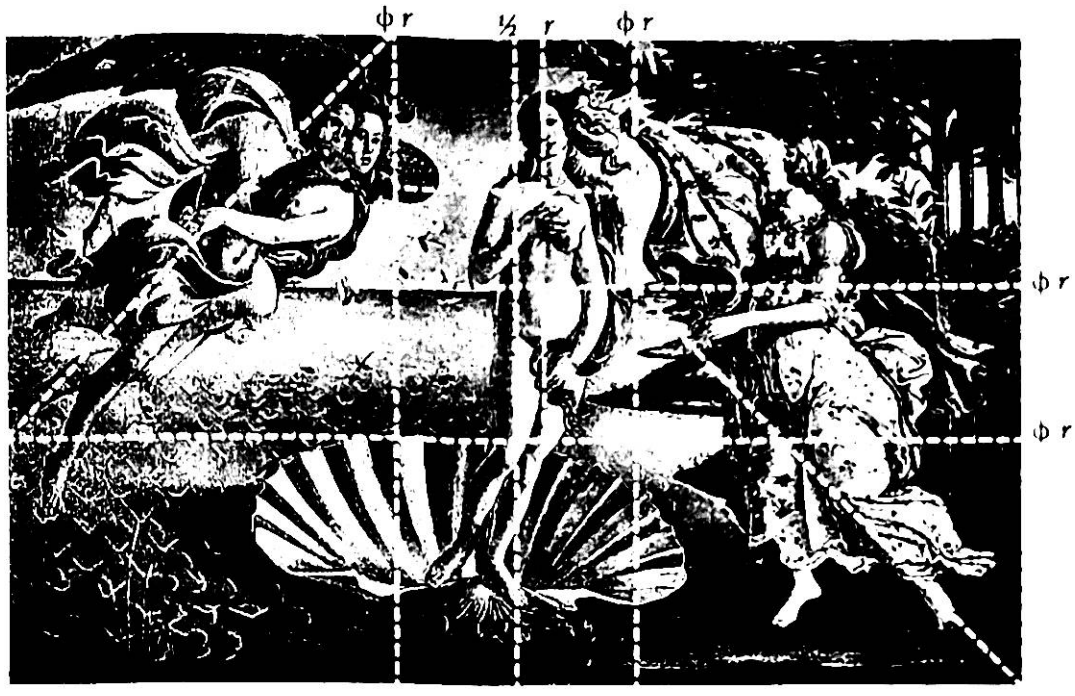
Centros ocultos são encontrados usando-se as diagonais de um retângulo, e triângulos retângulos são formados com os vértices opostos a cada diagonal (*abaixo à direita*).

A divisão de uma linha em duas ou três partes utiliza os primeiros passos da sequência Fibonacci – 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, e assim por diante –, em que os termos adjacentes se aproximam da proporção áurea 0,618. Alguns pintores utilizam divisões da composição na proporção de 3/5 ou até a própria seção áurea. Na imagem ao lado, vemos dois exemplos maravilhosos de rebatimento em ação. Botticelli utiliza um retângulo áureo, reduzido em etapas pelo rebatimento, para compor o seu quadro, enquanto Grimshaw utiliza um retângulo entre Φ e $\sqrt{2}$, com metades e linhas áureas como guias.

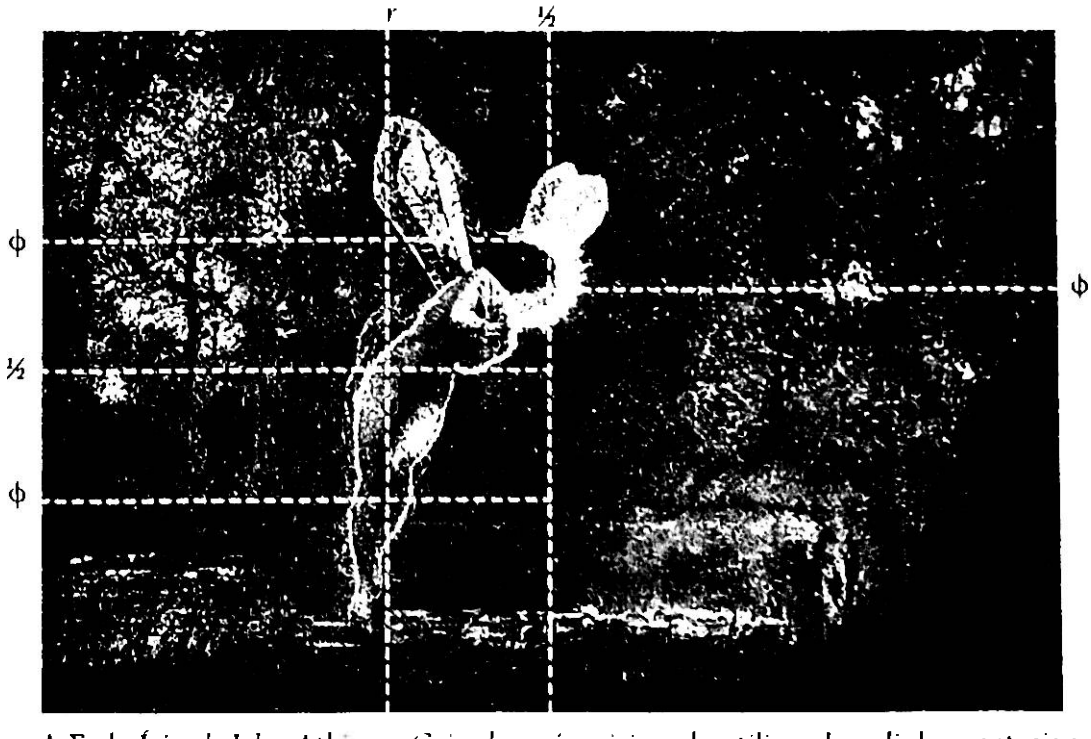








O Nascimento de Vênus, *de Sandro Botticelli. Um retângulo áureo com quadrados interiores define o horizonte, além da espinha dorsal, do umbigo e de outras características da figura central.*



A Fada Íris, *de John Atkinson Grimshaw, é posicionada utilizando-se linhas centrais e divisões áureas. A fada existe apenas em metade da pintura.*

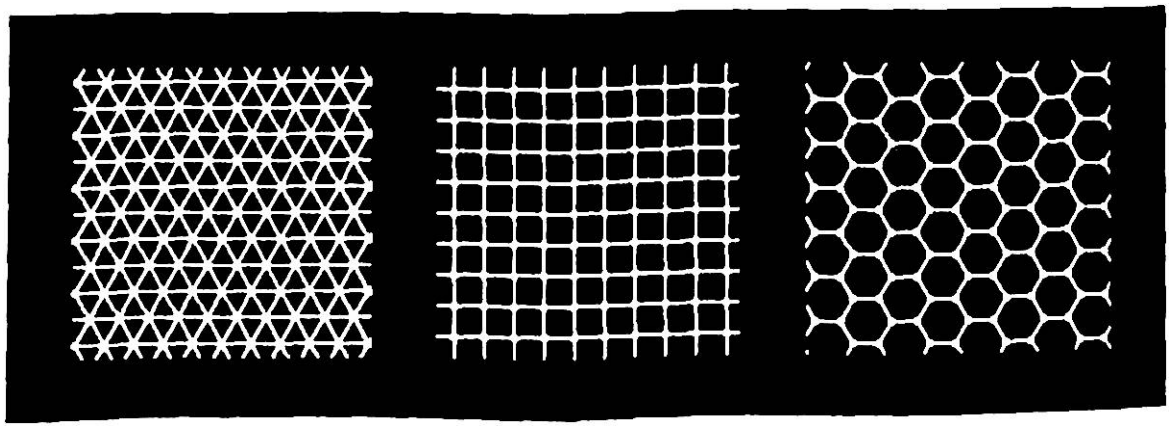
MOSAICOS SIMPLES

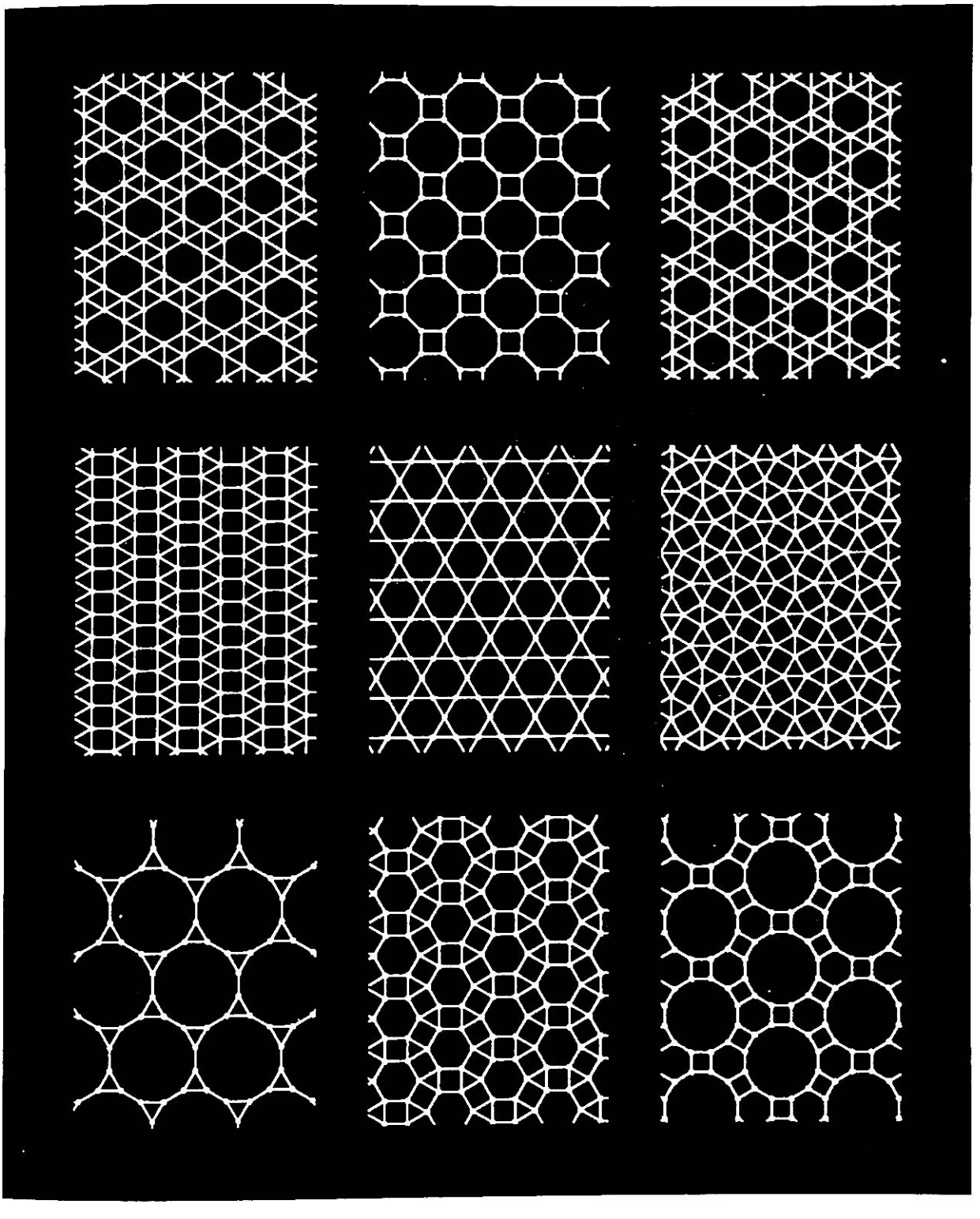
Repetindo padrões sobre uma superfície infinita

Um recobrimento regular do plano – ou *tesselação*[5] – ocorre quando o mesmo polígono regular é usado para preencher o plano sem deixar espaços vazios. Apenas três dos polígonos regulares conseguem isso (*imagem abaixo*). Um recobrimento *semirregular* permite o uso de mais de um tipo de polígono, mas insiste em que cada vértice seja idêntico. Por exemplo, no padrão central da imagem ao lado, cada vértice é um encontro entre dois hexágonos e dois triângulos. São possíveis oito recobrimentos semirregulares, e todos aparecem na imagem ao lado (embora as tramas superiores esquerda e direita sejam, na verdade, versões espelhadas uma da outra e contem como um).

Alguns padrões podem ser preenchidos mais além. Como apresentado na página 75, os dodecágonos são feitos apenas de hexágonos, triângulos e quadrados, enquanto os hexágonos são simplesmente coleções de triângulos. Veremos em breve que triângulos e quadrados podem ser combinados para fazer as coisas mais incríveis juntos.

O que podemos dizer de outros polígonos regulares? Os octógonos somente se juntam com quadrados (*centro da fileira superior, imagem ao lado*). Os pentágonos não se encaixam bem juntos no plano, sendo preferível a terceira dimensão para isso (*ver páginas 76 e 77*). Heptágonos e eneágonos ficam de fora.





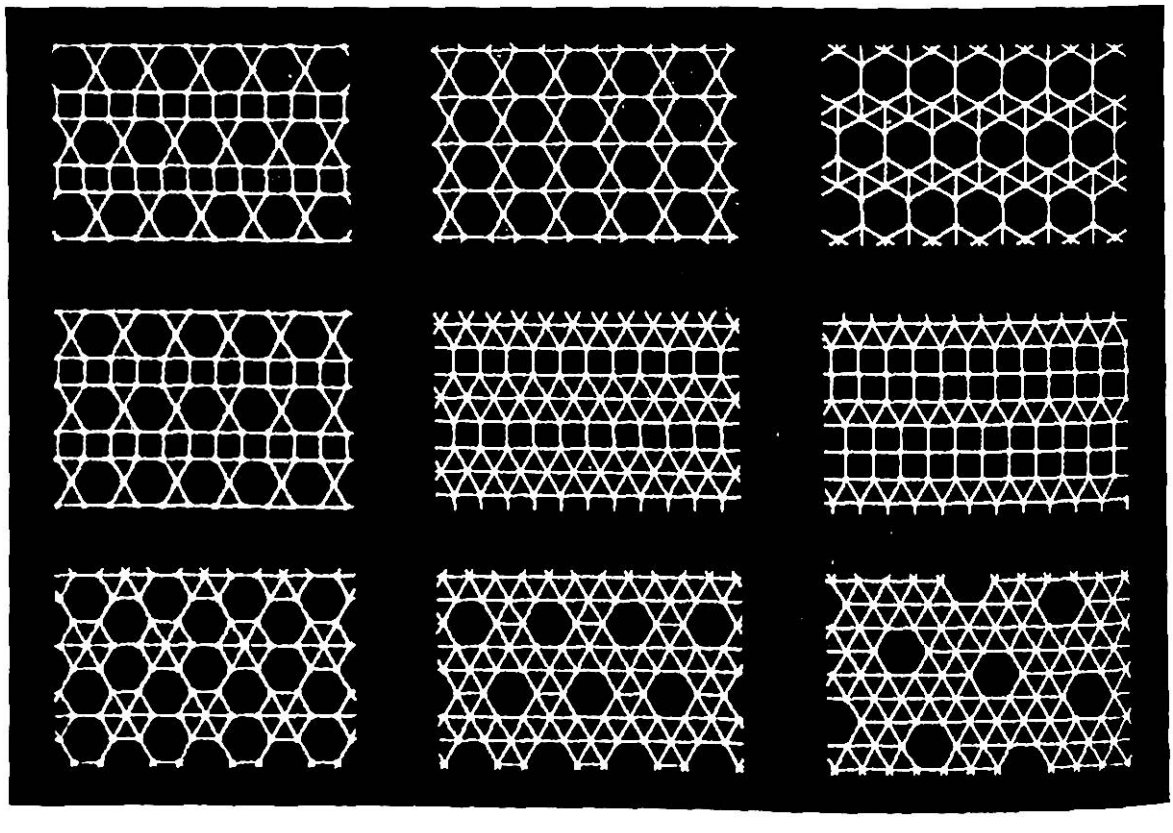
OUTROS MOSAICOS

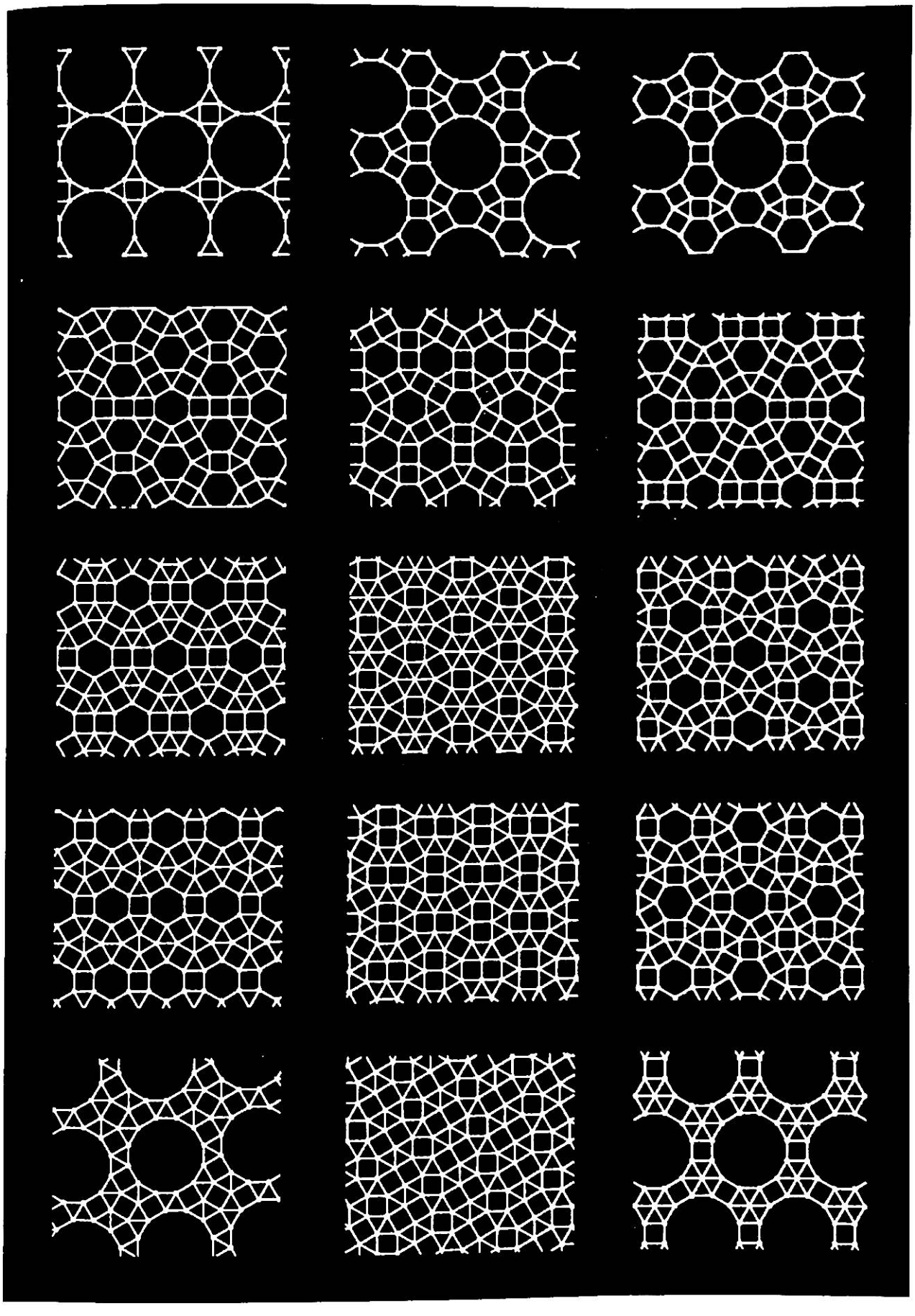
Mais diversão no banheiro

Há vinte recobrimentos *demirregulares* (nos quais dois tipos de formação de vértices são permitidos), e a maioria deles, além de algumas outras maneiras interessantes de preencher o plano geométrico, é apresentada nestas duas páginas.

As tesselações formam a base para a construção de padrões em muitas tradições de arte sacra e decorativa ao redor do mundo. Podem ser encontradas subjacentes aos padrões celtas e islâmicos, e no mundo natural aparecem como estruturas cristalinas e celulares. William Morris[6] usou-os extensamente em seus projetos de papéis de parede e estampas de tecido com padrões repetidos. Suas aplicações são limitadas apenas por nossa imaginação!

Na página seguinte, vemos uma dessas malhas sendo posta em prática.





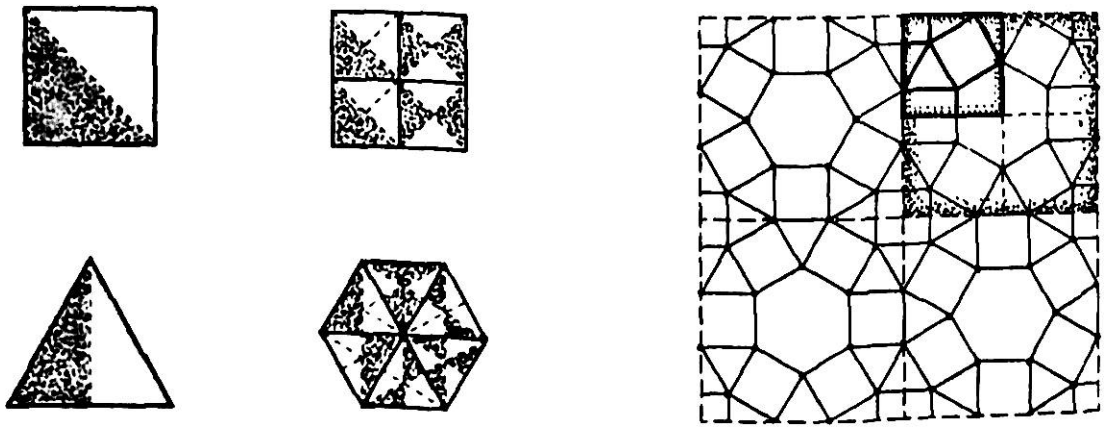
A MENOR PARTE

Estampas reversíveis e blocos rotativos

Muitas das malhas semirregulares e demirregulares de recobrimento do plano podem ser reduzidas a uma simples unidade quadrada ou triangular que pode, então, ser refletida ou rotacionada para recriar o padrão completo. Muitas vezes, essas unidades triangulares ou quadradas de repetição são surpreendentemente pequenas. No entanto, vale a pena lembrar que, em aplicações práticas, costuma ser mais fácil girar um bloco de impressão ou uma matriz do que espelhar a imagem – em tais casos, tem-se de duplicar a matriz ou gravar um bloco de impressão maior.

O modelo apresentado ao lado baseia-se em uma das redes da página anterior (veja se você consegue descobrir qual delas), sendo produzido por rotação e espelhamento da unidade principal (*abaixo à direita*). Uma vez que essa unidade básica tenha sido identificada, tudo o que se precisa fazer é desenhar essa porção mínima (*topo, imagem ao lado*) para ser capaz de criar o modelo inteiro.

Quadrados e triângulos equiláteros podem ser reduzidos à metade para produzir unidades triangulares menores (*abaixo à esquerda*). Mas, novamente, tome cuidado e pense no que está fazendo: por exemplo, não é possível fazer a mesma coisa com o exemplo apresentado na imagem ao lado. Você sabe por quê?



Esta é a menor unidade do padrão abaixo, desenhada na mesma escala e mostrando as linhas-guias que orientaram o projeto.

Note como as folhas e pétalas foram posicionados ao longo das bordas do ladrilho, com os centros das flores posicionados no centro dos pontos de rotação.

SIMETRIA

Regular e formosa

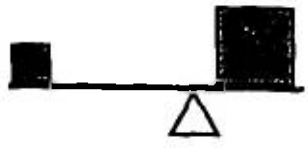
Simetria significa "medição em conjunto", e as coisas são denominadas simétricas quando possuem proporções harmoniosas, muitas vezes entre elementos repetidos. Os elementos podem ser repetidos de várias maneiras: deslocados, espelhados, rotacionados, espiralados, escalonados, esticados, dobrados ou múltiplas combinações dessas ações.

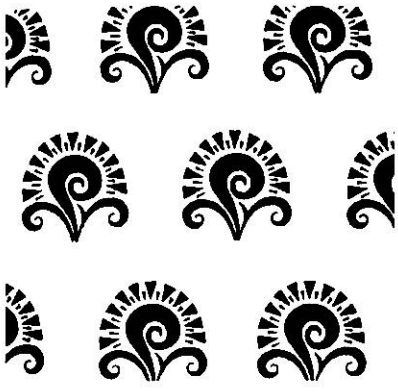
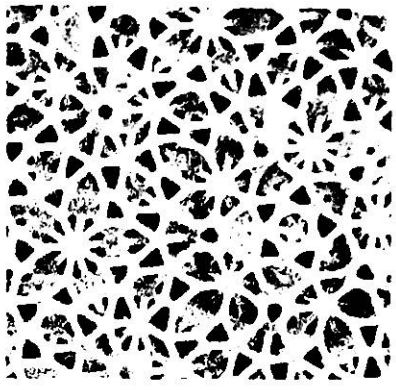
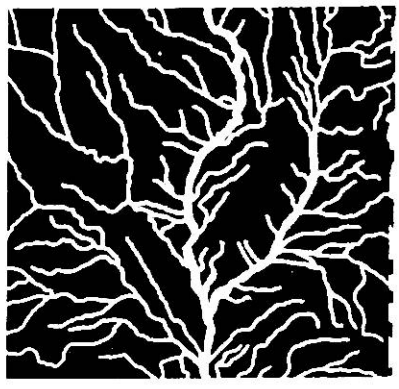
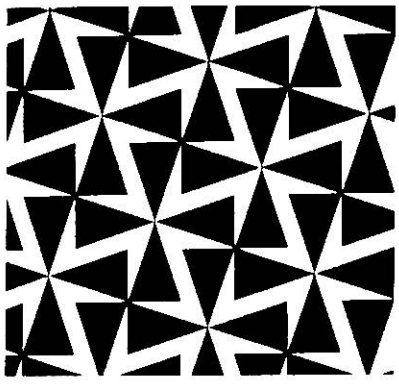
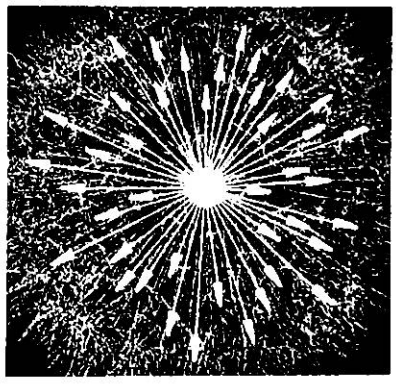
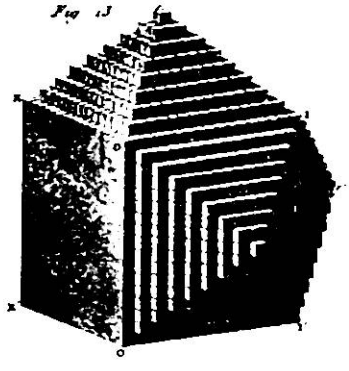
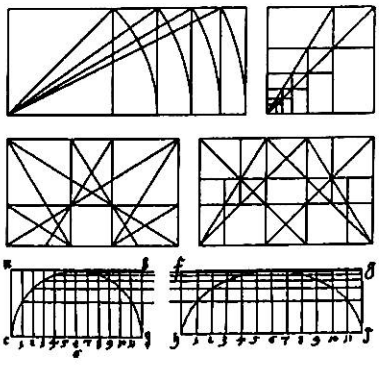
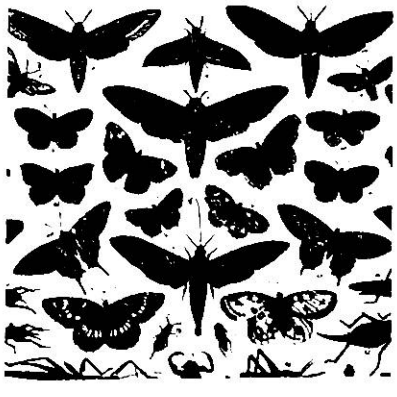
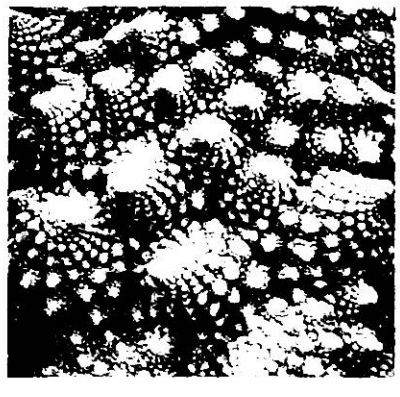
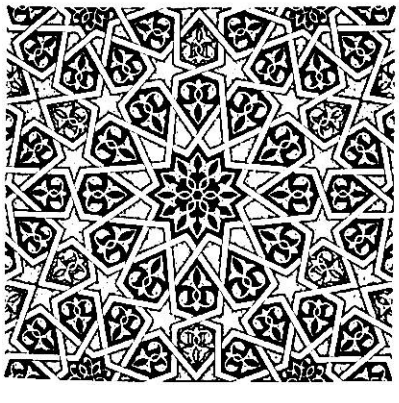
As simetrias podem manifestar-se (aparentes) ou ocultar-se (escondidas). Por exemplo, os pesos equilibrados na imagem abaixo (*centro*) aludem às equações da matemática e da física que modelam as simetrias ocultas subjacentes ao mundo físico. A simetria é o tema de todo um livro nesta obra, e as imagens abaixo e ao lado são mais sugestivas que completas.

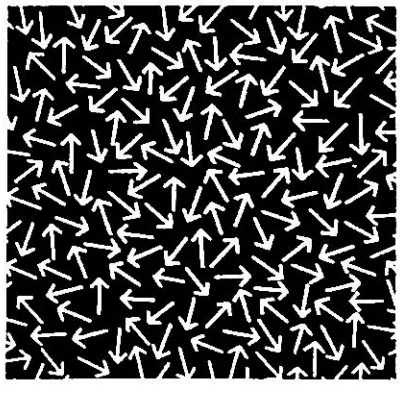
Além das simetrias listadas acima, há também simetrias topológicas ou de mapeamento (*abaixo à direita*), simetrias de ramificação, simetrias fractais (em que as partes são uma imagem do todo), simetrias de cristais, simetrias orbitais de elétrons, simetrias aperiódicas (*ver Simetrias Li, na página 122*), simetrias radiais, simetrias de permutação, simetrias em série (*por exemplo, a filotaxia; ver página 326*) e espécies de assimetrias.

É importante perceber que a geometria e a harmonia são, elas mesmas, simplesmente formas de simetria, sobretudo na maneira com que suas criações são apreciadas como estética. O enredo de um filme ou de um romance pode igualmente ser pensado como simétrico, assim como as noções de destino ou de justiça.

A "medição em conjunto" pode realmente significar muitas coisas.





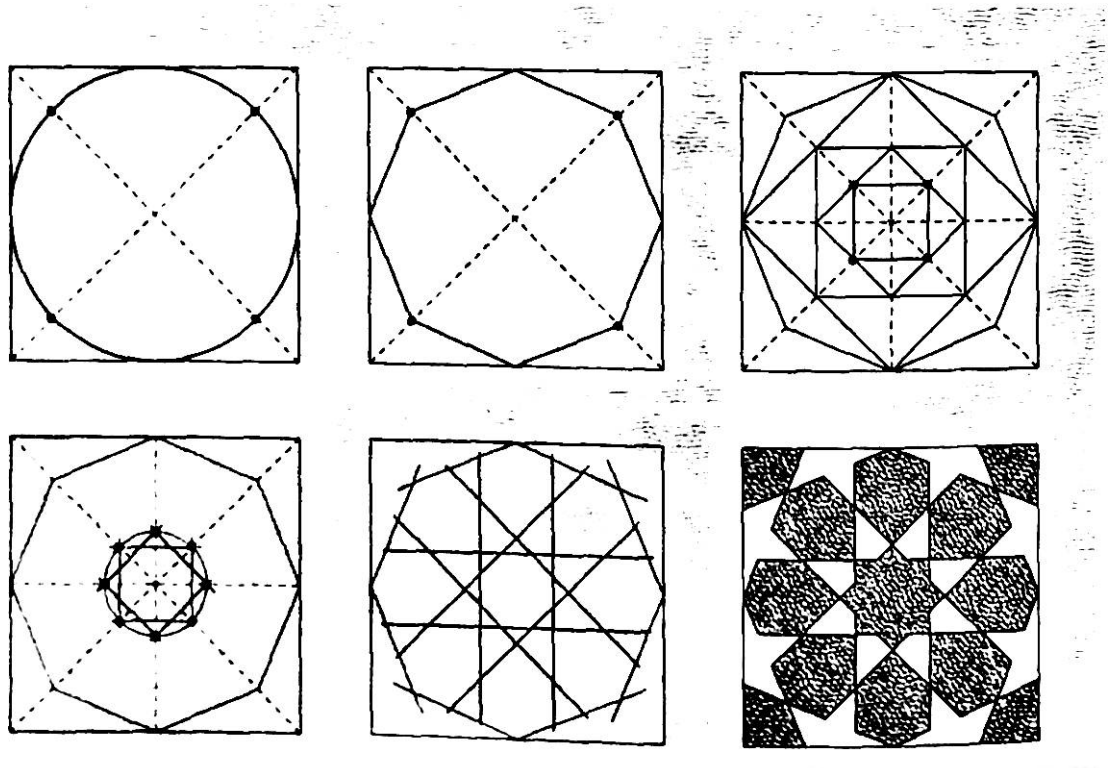
DESENHOS ISLÂMICOS

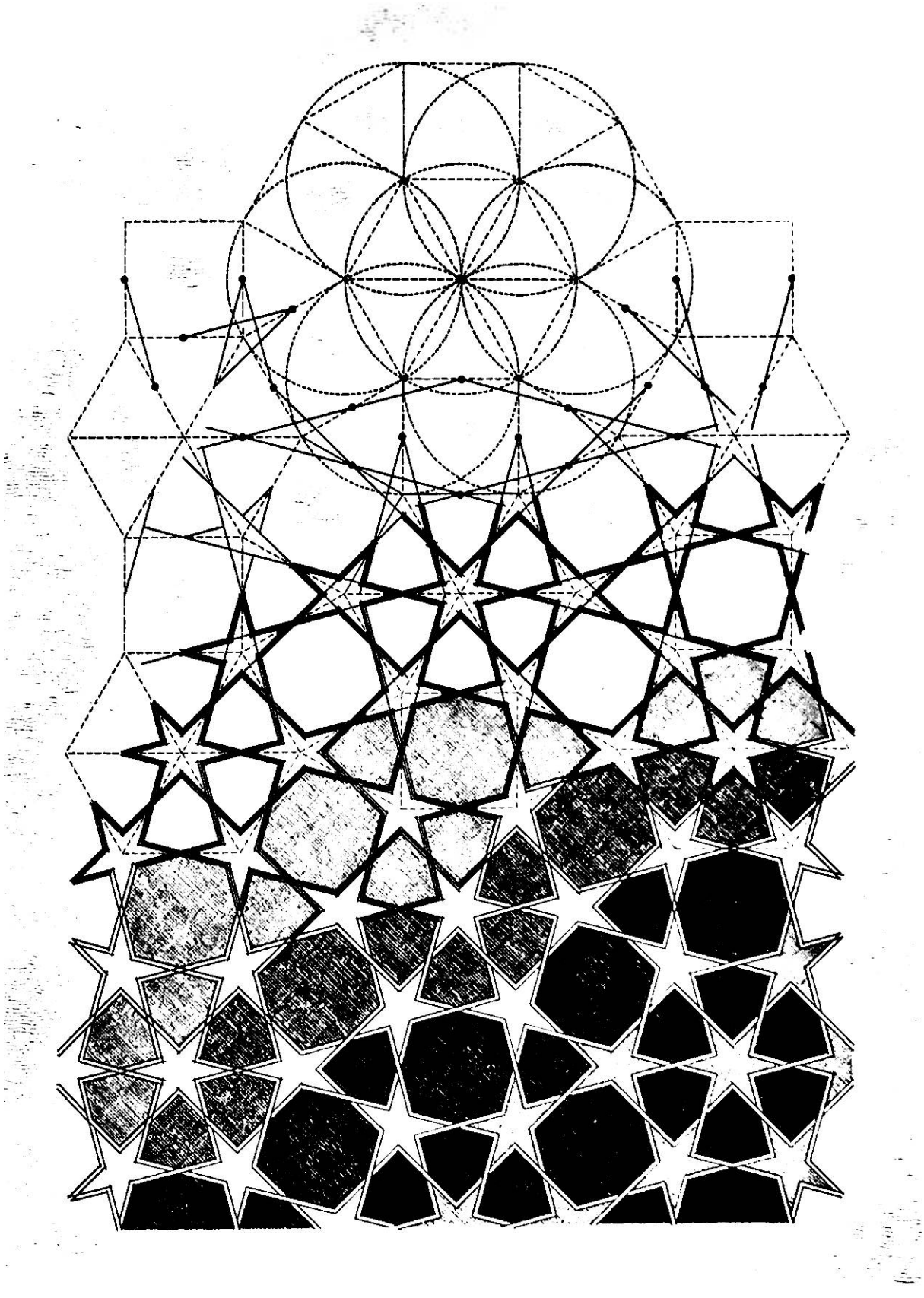
Estrelas nascem de malhas secundárias

Os padrões islâmicos falam do infinito e do centro onipresente.

Para o padrão na imagem ao lado, comece com seis círculos ao redor de um, desenvolvendo uma malha de dodecágonos sobrepostos a partir de triângulos, quadrados e hexágonos (*ver páginas 75 e 101*). Os pontos principais estão a meio caminho ao longo da aresta de cada polígono. Esses pontos são unidos de forma especial e estendidos como apresentado na parte superior do diagrama. Grande número de belíssimos padrões está assentado em toda malha secundária simples, apenas esperando para ser descoberto.

As próprias malhas secundárias raramente são apresentadas na arte tradicional. São consideradas parte da estrutura básica da realidade, com o cosmos a sobrepô-las – "cosmos"[7] significa "adorno".





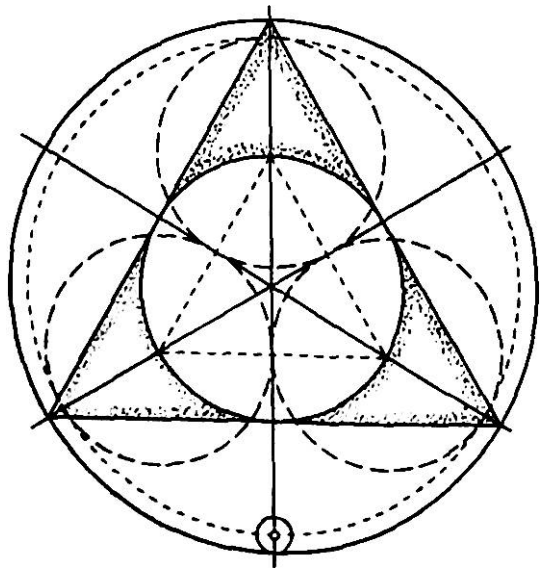
UMA JANELA DE IGREJA

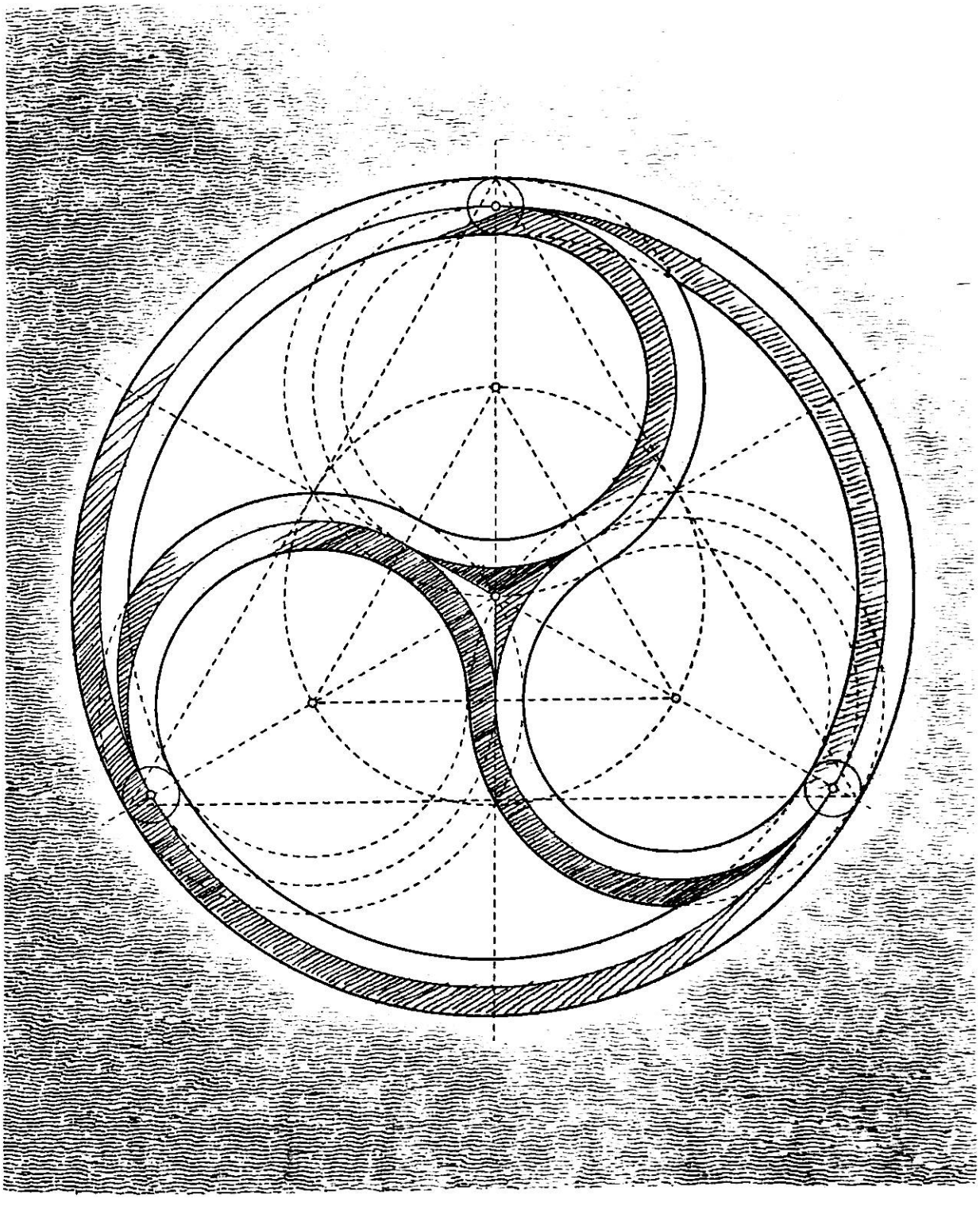
Não muito longe da Ilha de Man[8]

Um pedaço de alvenaria de uma janela de igreja é apresentado na imagem ao lado. O desenho fala da trindade implícita na unidade. É um projeto muito bonito e extremamente gratificante de desenhar. Veja se consegue acompanhar a sua construção a partir do diagrama abaixo, que começa com o círculo delimitador. Note como cada detalhe é definido pela geometria.

Desenhe um grande círculo e divida-o em seis partes. Nesse círculo, desenhe um grande triângulo e inscreva outro círculo para caber dentro dele. Isso produzirá os centros de três círculos que se tocam (as linhas centrais do ornamento).[9] Note que esses círculos não tocam o círculo exterior ou o centro da janela. Um pequeno círculo (*na parte inferior da imagem abaixo*) auxilia, então, a construção, fornecendo a largura da própria escultura em pedra, permitindo que as extremidades interna, central e externa do ornamento sejam definidas.

Agora, veja se pode desenhar o ornamento da página seguinte.





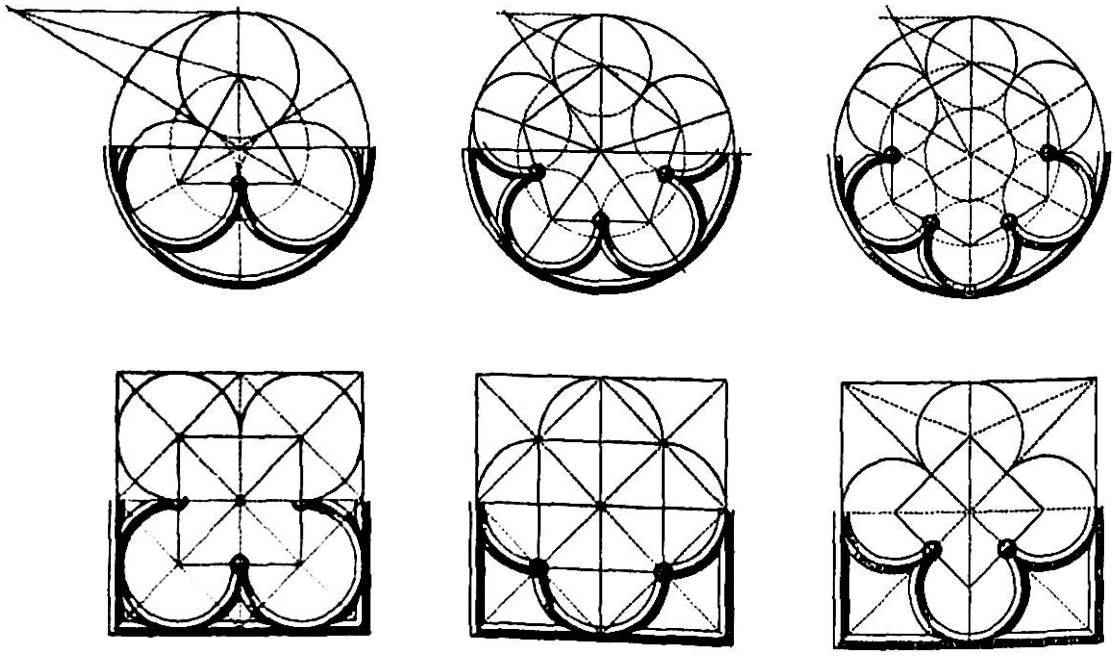
TRIFÓLIOS E QUADRIFÓLIOS

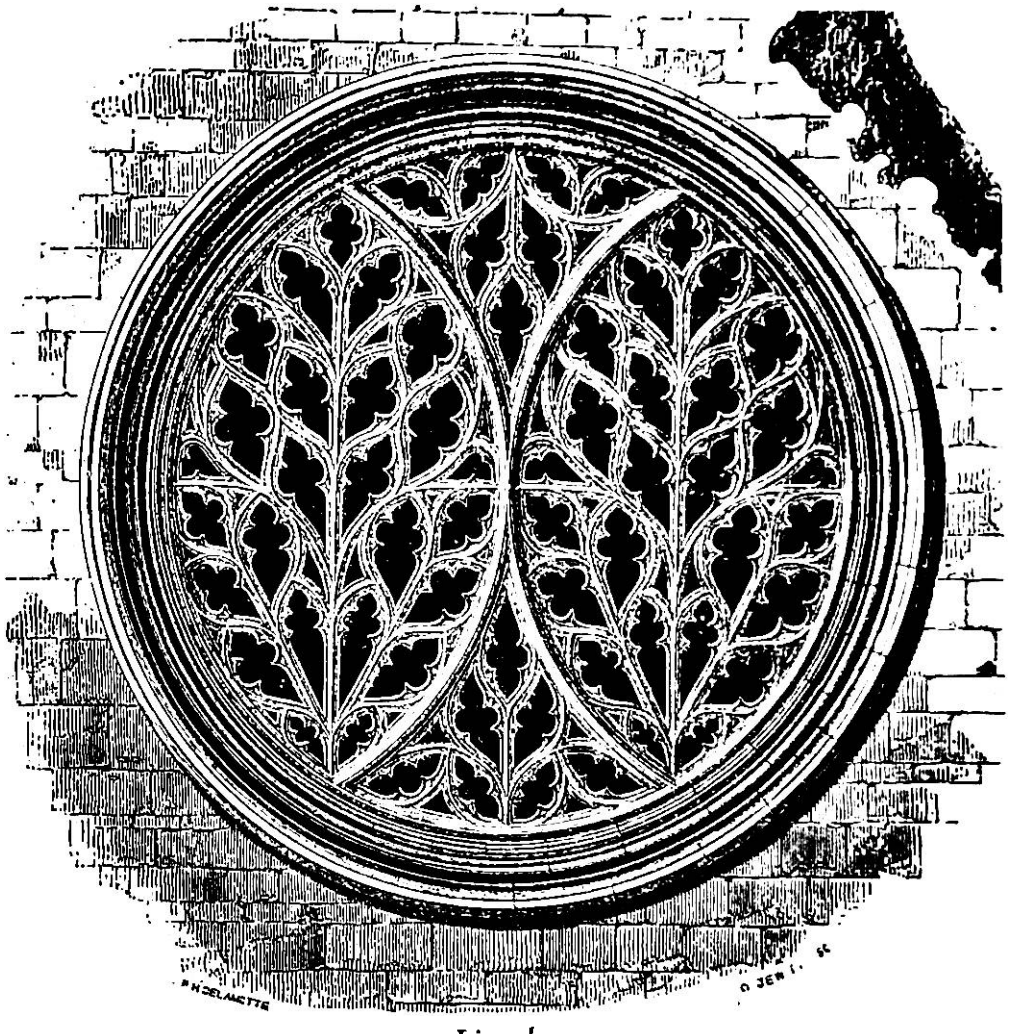
A geometria oculta no arrendado[10]

Tudo é feito de luz – toda a matéria o é –, e sem matéria não haveria som. Os átomos, assim como os planetas, organizam-se em padrões geométricos. Quão profunda é, então, a imagem de uma janela que permite a passagem da luz no que, de outra forma, seria um espaço escuro.

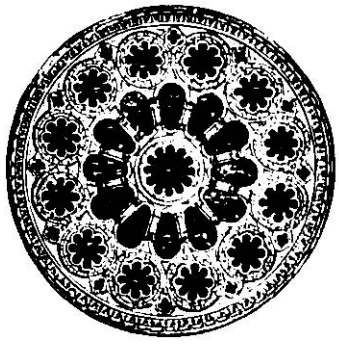
Os projetos de vitrais de igreja seguem muitas regras, formas e tradições, e algumas pistas são dadas nestas páginas. Os mais fáceis de desenhar são os três quadrifólios abaixo (*fileira inferior*).

A janela sul da Catedral de Lincoln,[11] com sua impressionante *vesica* dupla, é apresentada na imagem ao lado, e abaixo dela aparecem três outras janelas muito antigas e famosas, localizadas na parte oeste das catedrais de Chartres, Evreux e Reims. Nesses exemplos, é mantido um bom equilíbrio entre linha e curva.

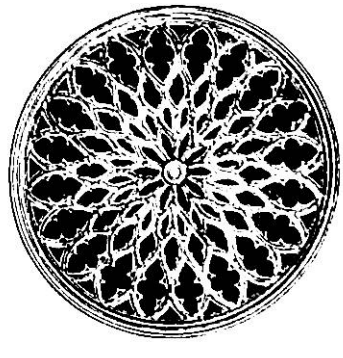




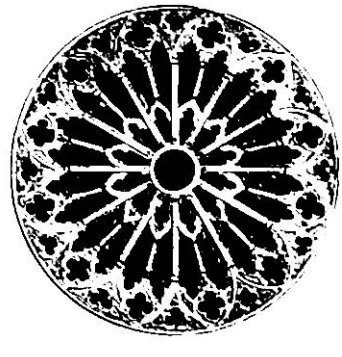
Lincoln



Chartres



Evreux



Reims

CÍRCULOS DE PEDRA E IGREJAS

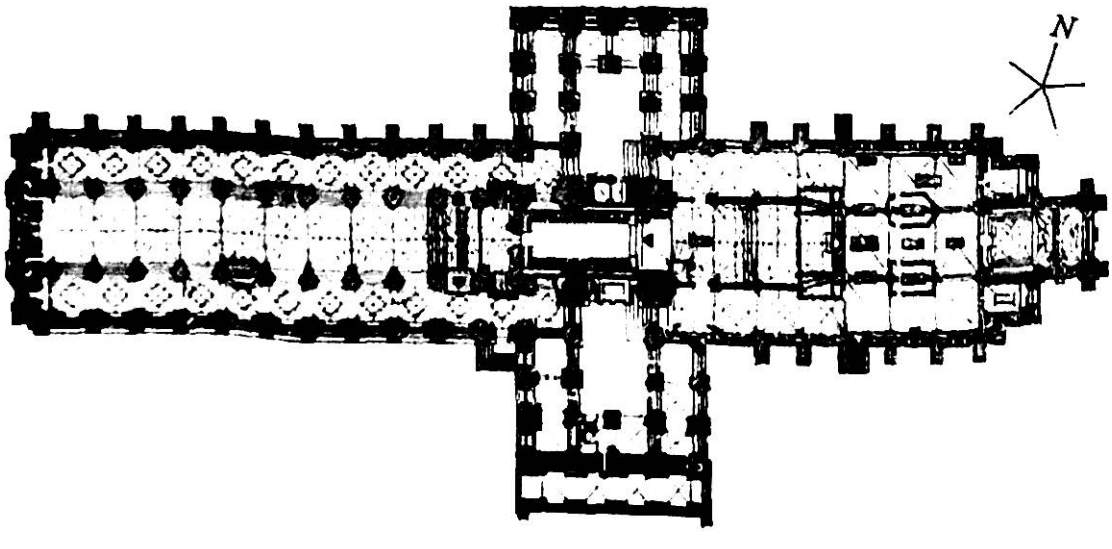
Vesicas em ação por mais de 4 mil anos

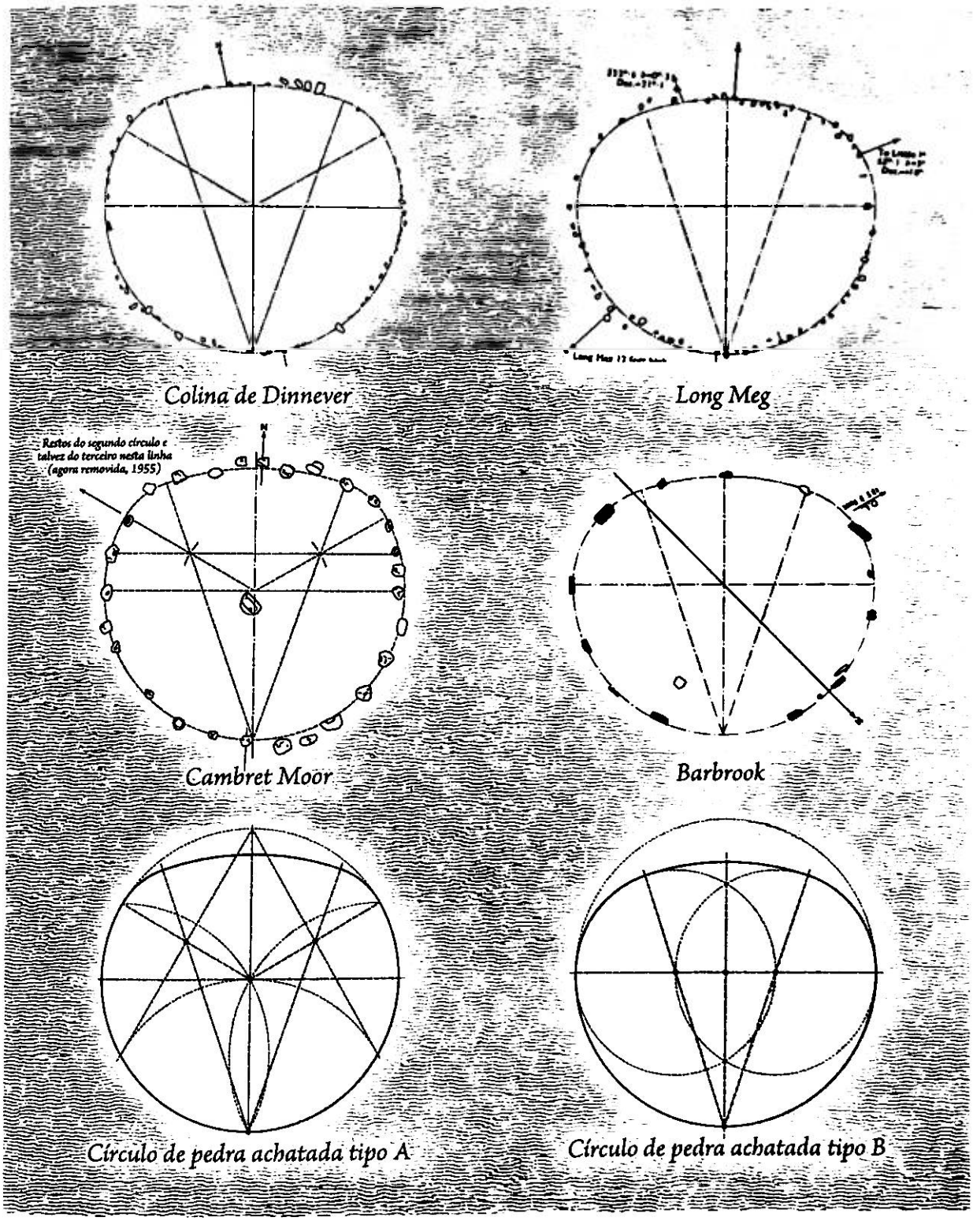
Na imagem ao lado aparecem quatro círculos de pedra achatada, com sua geometria consistente, como descobertos pelo professor Alexander Thom.[12] No lado esquerdo, estão exemplos da configuração *tipo A*, e do lado direito, o *tipo B*. Também são apresentadas as construções baseadas na *vesica* (*ver a página 70 para* vesica).

Nesta página aparece a planta da Catedral de Winchester.[13] Uma interação de sistemas triangulares e quadrangulares simples baseados na *vesica* – *ad triangulum* e *ad quadratum*[14] – é subjacente às plantas de muitos edifícios eclesiásticos (*ver a fileira superior da imagem na página 85*).

O projeto de um edifício sagrado, seja igreja, círculo de pedra ou templo, requer que o projetista ou arquiteto una o simbolismo universal dos movimentos geométricos que ele está fazendo em seu trabalho com uma linguagem religiosa específica. Fatores locais também entram no esquema, como, por exemplo, as posições do nascer e do pôr do sol, da lua e das estrelas, ou das montanhas, fontes e terras sagradas mais próximas.

Abaixo, vemos o eixo da Catedral de Winchester apontando para 72° a partir do norte, criando um encantador pentagrama magnético.




Colina de Dinnever
Long Meg
Restos do segundo círculo e talvez do terceiro nesta linha (agora removida, 1955)
Cambret Moor
Barbrook
Círculo de pedra achatada tipo A
Círculo de pedra achatada tipo B

ARCOS ENCANTADORES

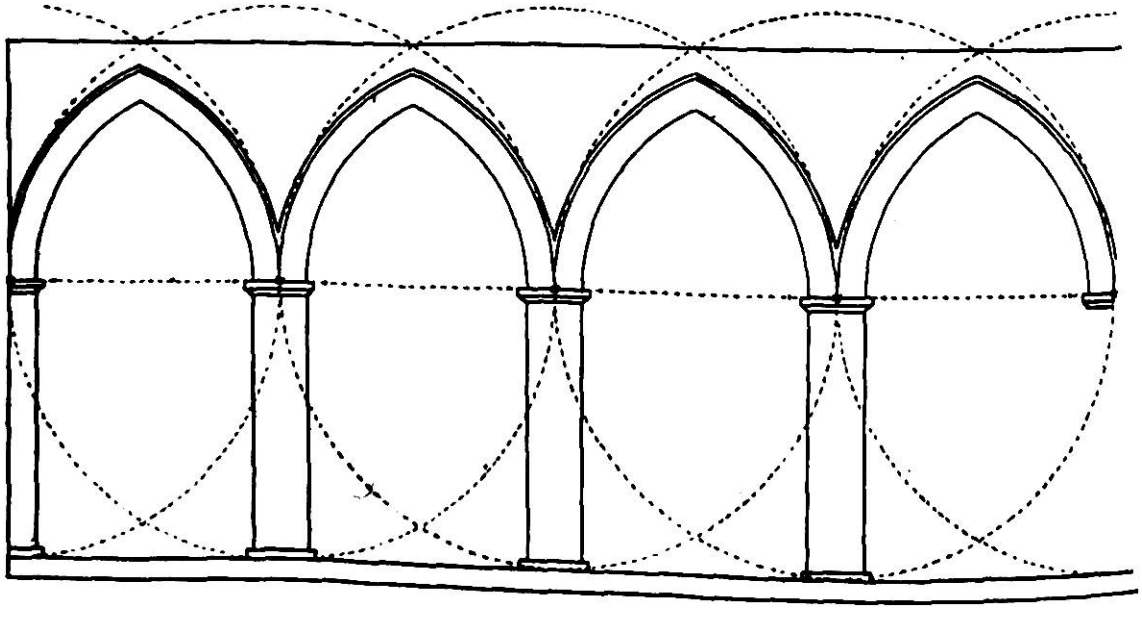
Como desenhar alguns deles, entre muitos

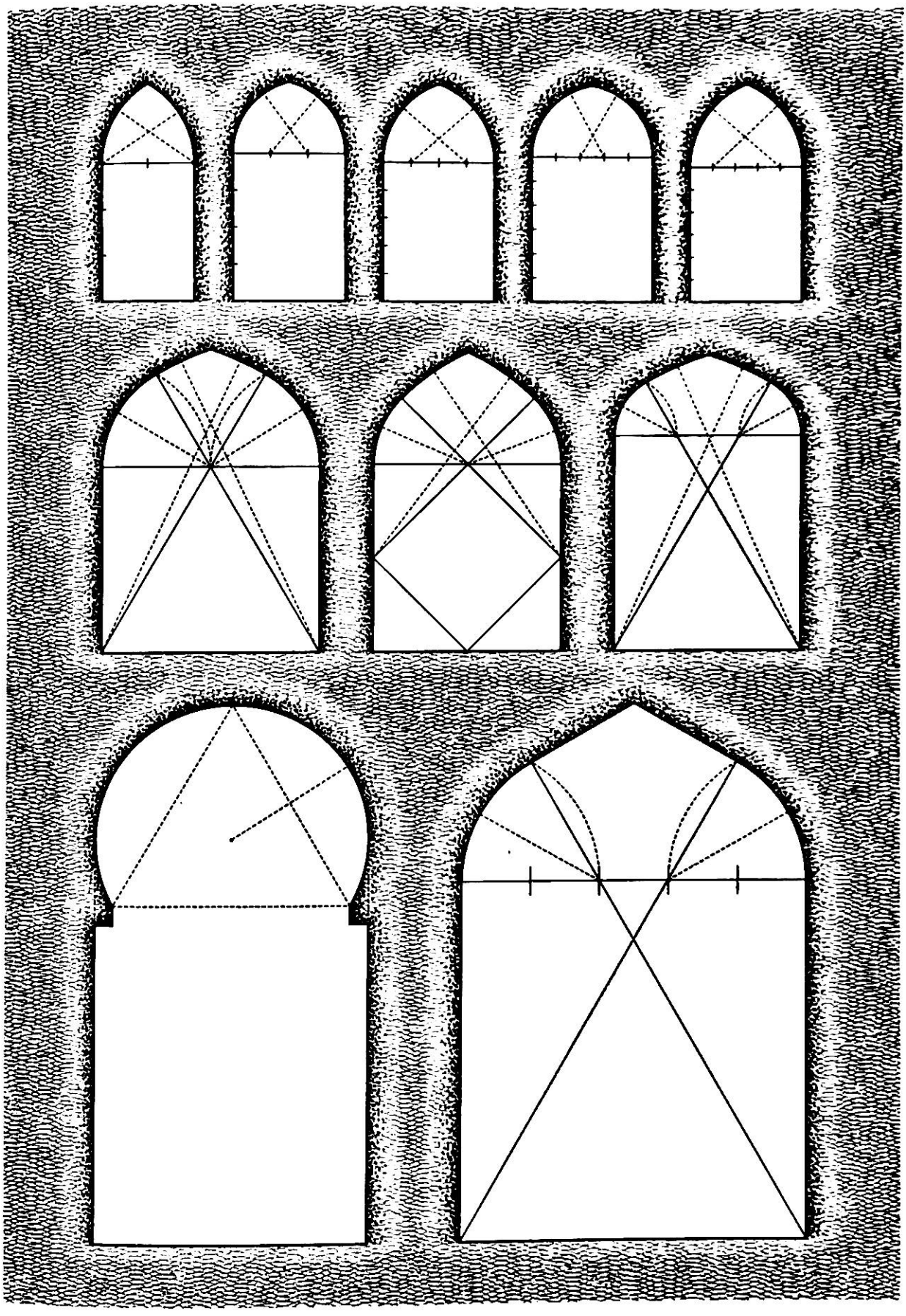
Os arcos assumem formas notavelmente semelhantes em todo o mundo, e algumas são apresentadas aqui. Frequentemente, são as árvores vivas que fazem os melhores arcos.

A fileira superior na imagem ao lado mostra cinco arcos com dois centros. Sua abertura foi dividida em duas, três, quatro, cinco e, mais uma vez, em cinco partes. As linhas retas pontilhadas mostram os raios de seus arcos, cujas alturas podem variar. Para estes cinco, as alturas são definidas por um retângulo cujas proporções são as de um intervalo musical, neste caso 2:3, 3:4 e assim por diante (*página 86*).

A segunda fileira de arcos da imagem ao lado tem quatro centros. A curva dos arcos sofre mudanças nas posições indicadas pela linha cheia. Também são dadas ideias para a definição de suas alturas.

Os dois últimos são um arco em forma de ferradura, que também poderia ser pontiagudo, e um arco com ponta. Este último parece curvar para cima perto da ponta – "o retorno" –, mas as linhas são, na realidade, totalmente retas.





UMA ESPIRAL CELTA

Geometria euclidiana na Irlanda antiga

A imagem ao lado vem de um disco de bronze de quatro polegadas encontrado na Ilha Loughan, na Irlanda do Norte, datado de cerca de 2 mil anos. É um exemplo excepcionalmente belo do estilo celta primitivo. Como já vimos com círculos de pedra e arcos, a combinação perfeita – sem emendas – de múltiplos arcos pode ser altamente harmoniosa, e alcançou a sua perfeição no início do período celta.

Muitas peças celtas primitivas mostram evidências do uso de um compasso, e o desenho final do disco ao lado necessitou de não menos que 42 posições distintas para a ponta do compasso! Acredita-se que os grandes mestres da arte que criaram esses tipos de desenho começaram com um modelo geométrico básico, tal como um padrão de círculos que se tocam; em seguida, esboçaram as formas desejadas antes de retornar à geometria para amarrar todas as partes, de modo que todas as suas curvas se tornaram arcos, partes de círculos. Isso confere uma tensão às curvas. Dessa forma, intuição e intelecto trabalham juntos.

A sequência de figuras menores mostra como traçar arcos através de pontos. O primeiro diagrama mostra um arco centrado em <*c*>. Queremos que o arco mude sem esforço em <*a*> e, em seguida, passe através de <*b*>. O que fazer? Encontre a mediatriz entre os pontos <*a*> e <*b*>, abrindo o compasso e descrevendo dois arcos iguais a partir de <*a*> e de <*b*>, e trace uma linha passando por sua intersecção (*diagrama central*). A mediatriz corta a linha entre <*a*> e <*c*> em um novo ponto <*o*>, que se torna, então, o centro que estávamos procurando (*diagrama à direita*).

Todas as belas curvas no disco da Ilha Loughan são desenhadas e esticadas dessa maneira simples e elegante.

A ideia de que círculos ou arcos de círculo são as únicas curvas verdadeiramente celestiais encontrou seu caminho em muitas filosofias da arte sacra. A técnica apresentada acima pode ser utilizada em qualquer aplicação para refinar um esboço ou desenho curvilíneo e dar-lhe essa indefinível qualidade mágica.

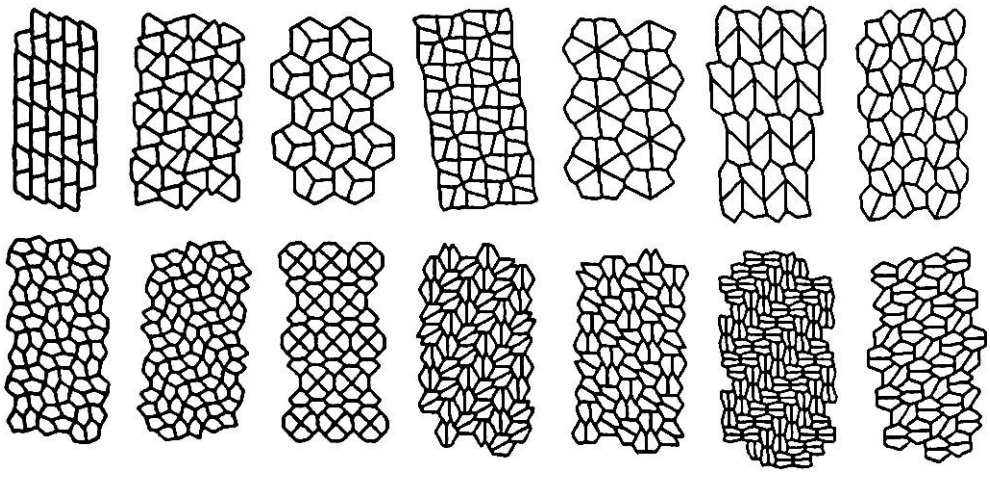
POSSIBILIDADES PENTAGONAIS

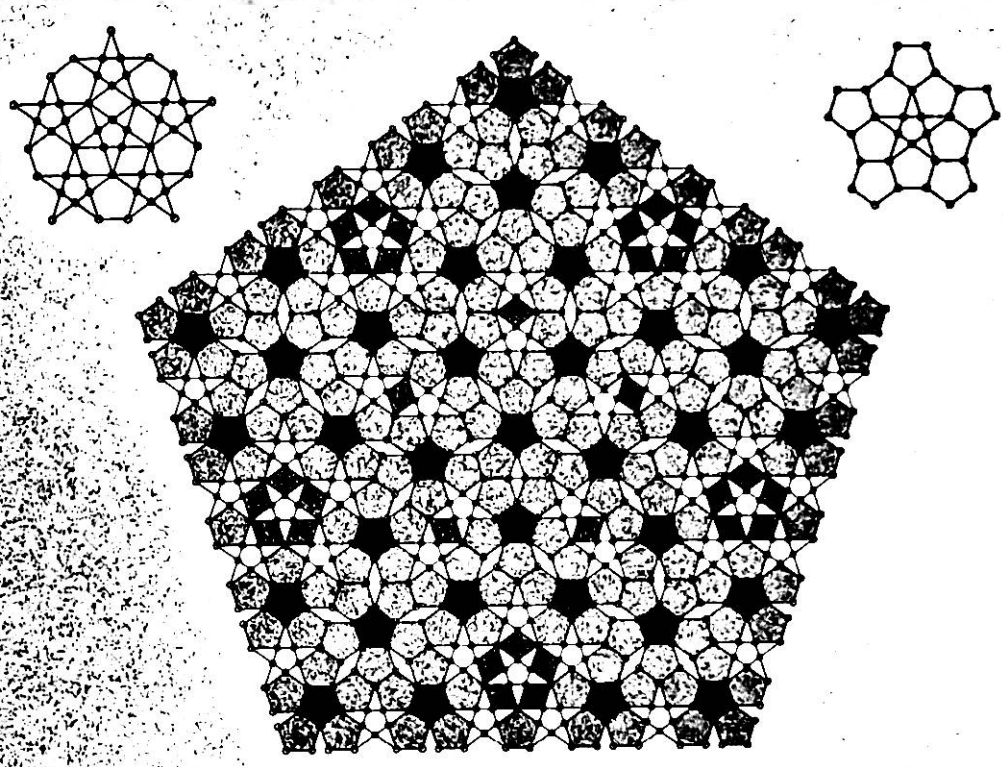
Aqueles fantásticos e efervescentes números cinco

Embora o pentágono regular não se encaixe em padrão repetido no plano, faz várias outras coisas que qualquer bom livro sobre geometria sagrada não deve deixar de mencionar. Uma delas, retirada de estudos realizados por Johannes Kepler (1571-1630), aparece na imagem ao lado (*topo*), onde um padrão "semente" pode crescer a partir do centro. Os pentágonos cinza deixam espaços que são pedaços de pentagramas, e vice-versa. Esse modelo está crivado de exemplos da seção áurea. Outras "sementes" também são mostradas.

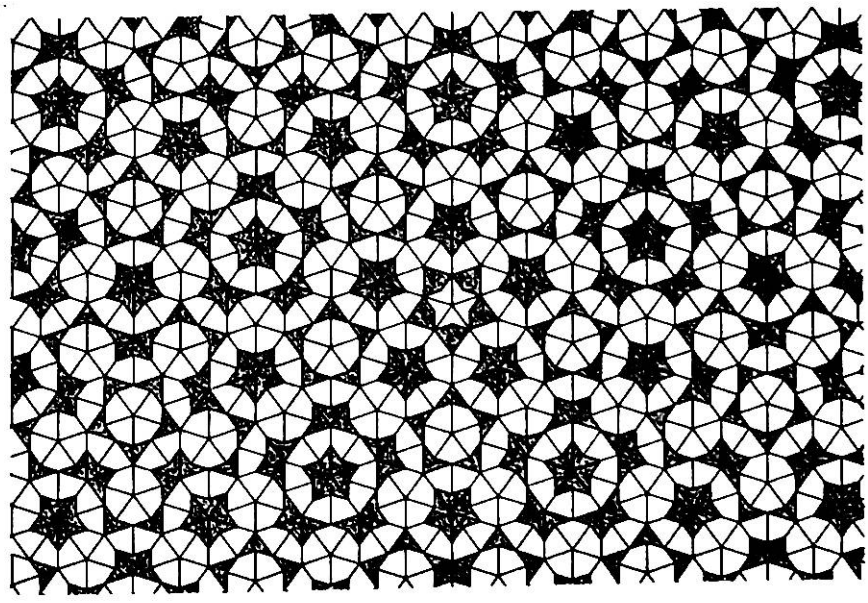
O matemático Roger Penrose descobriu recentemente o recobrimento mostrado na parte inferior da imagem ao lado. Duas formas encaixam-se para preencher o plano com elementos pentagonais aperiódicos "não repetitivos" de todos os tamanhos. Recentemente, descobriu-se que esses padrões fazem parte da constituição básica da maioria dos líquidos. Eles são, por exemplo, cortes transversais da água.

Abaixo aparecem os quatorze tipos de pentágonos convexos irregulares que recobrem completamente o plano.





Sistema pentagonal infinito de Kepler, do início do século XVII.



Par de ladrilhos, que preenche o plano, descoberto por Penrose no século XX.

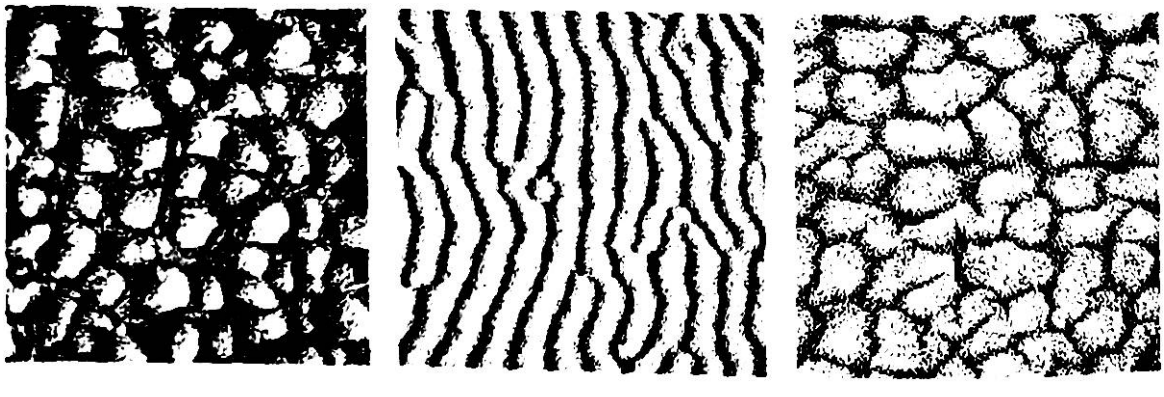
SIMETRIAS LI

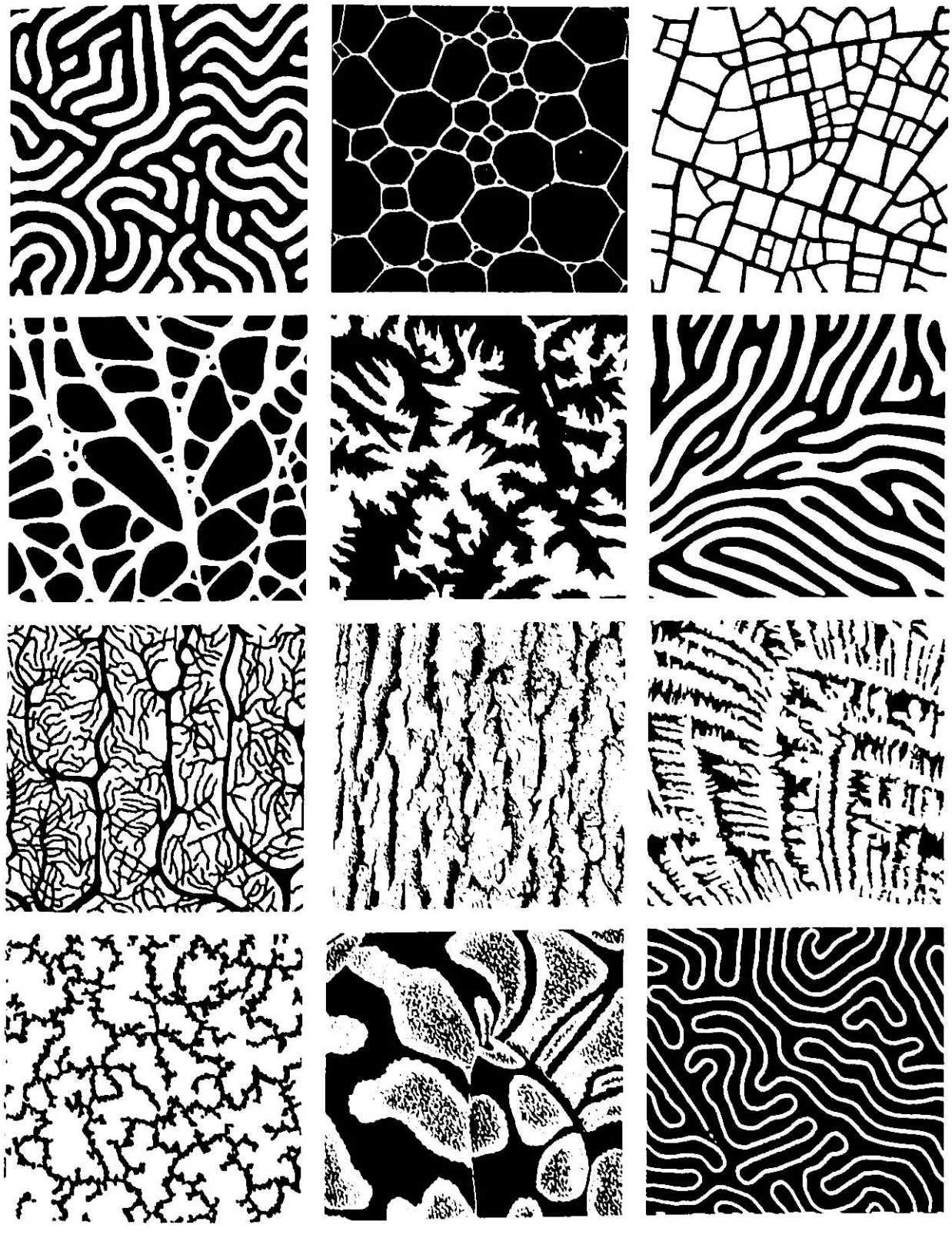
Formadas pelo tempo

As simetrias Li são tão familiares para nós que quase não as notamos. Elas nos rodeiam e permeiam o mundo natural, mas foi somente na década de 1950 que essas enigmáticas formas de simetria começaram a ser entendidas como sistemas auto-organizados, através do trabalho pioneiro de Alan Turing.[15] Contudo, os chineses têm estudado essas simetrias há milênios, e foi a partir deles que elas receberam esse nome.

Essas simetrias podem ser diferenciadas das simetrias estáticas por serem principalmente causadas pela interação entre processos e materiais. Por exemplo, a ação repetida do vento sobre a areia produz as nervuras familiares vistas nas dunas de areia, uma simetria que pode ocorrer em diferentes escalas. Da mesma forma, a ação do calor sobre a argila úmida cria padrões de rachadura que se assemelham intimamente à disposição de muitas vilas e cidades, até em detalhes relativamente pequenos, tais como a largura das estradas (*ver as ilustrações de David Wade ao lado*).

As simetrias Li estendem-se até as marcas deixadas por animais, padrões de estiramento como as cascas de árvores, padrões de nuvens e muitas outras áreas da natureza. Da próxima vez que sair por aí, veja quantas dessas simetrias consegue localizar!





AS DEZESSETE SIMETRIAS

Originadas de deslocamento, rotação e espelhamento

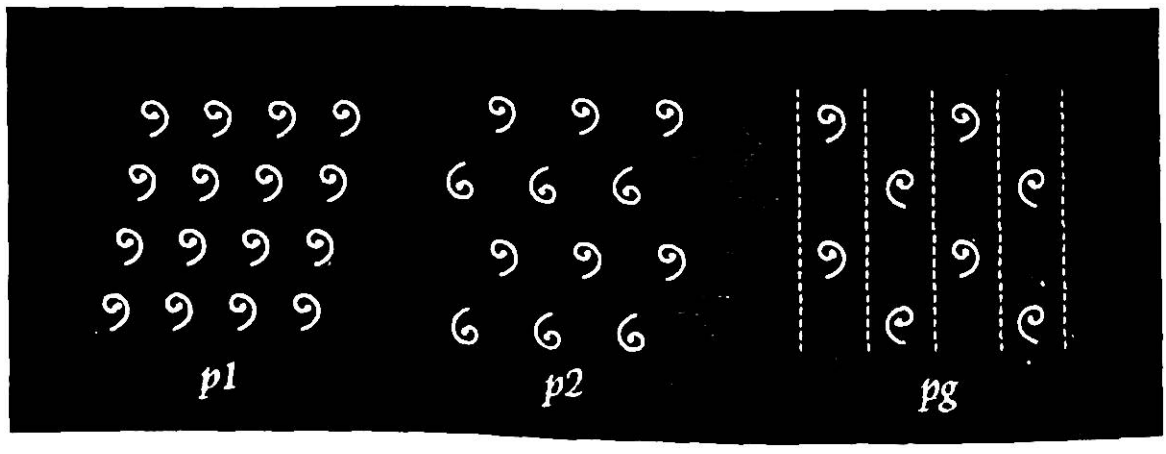
O alquimista árabe Jabir ibn Hayyan, conhecido no Ocidente como Geber, considerava o número dezessete como a base numérica do mundo físico.

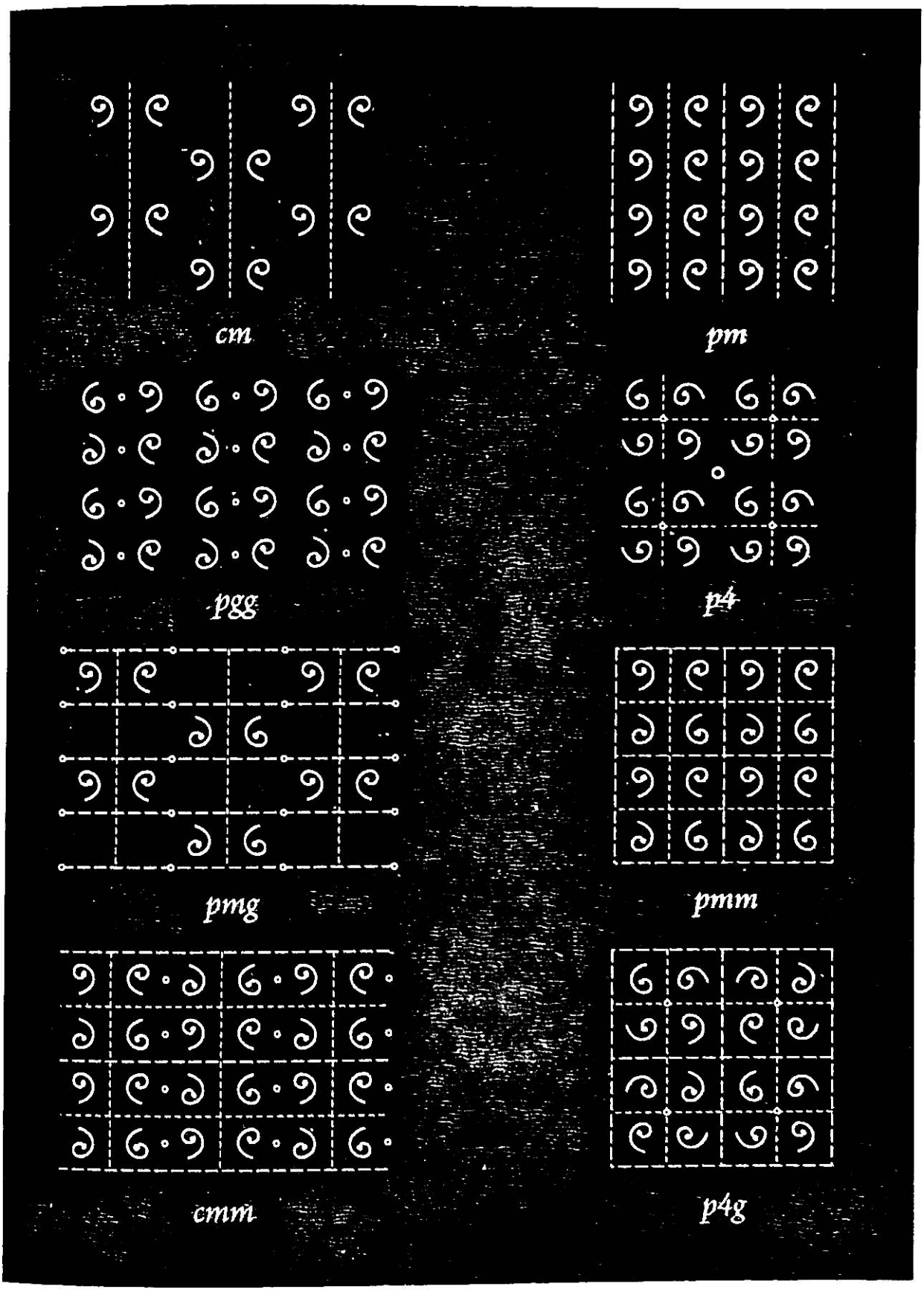
Usando um desenho muito simples como amostra, as próximas três páginas exploram as três operações básicas de rotação, reflexão (ou espelhamento) e deslocamento. Combinadas com os três recobrimentos regulares do plano, essas operações originam dezessete "papéis de parede" ou grupos de simetria do plano que são mostrados nas imagens abaixo, ao lado e na página seguinte (*segundo* Critchlow). A página 127 mostra as sete possíveis simetrias em friso derivadas da mesma maneira.

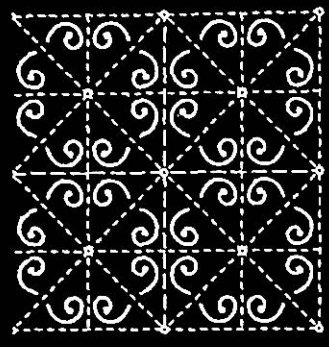
Esta chave visual pode ser muito útil quando se criam repetições para padrões de tecido ou de cerâmica (*ver também as páginas* 104 *e* 105). A propósito, "padrão" vem da palavra latina *pater*, que significa "pai", da mesma forma que "matriz" vem de *mater*, que significa "mãe".

Lembre-se de que nem todas as matrizes podem ser invertidas (refletidas) sem se fazer uma bagunça, razão pela qual deve escolher suas unidades de repetição com cuidado.

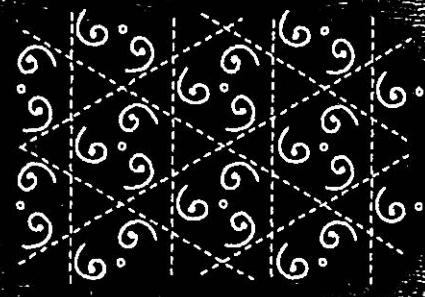
Nesta nota bastante prática, este pequeno e denso livro, sobre uma das mais antigas disciplinas na Terra, atingiu o seu fim. Esperamos que tenham recolhido ideias suficientes para criar algo de bom, verdadeiro e belo da próxima vez que resolverem desenhar!



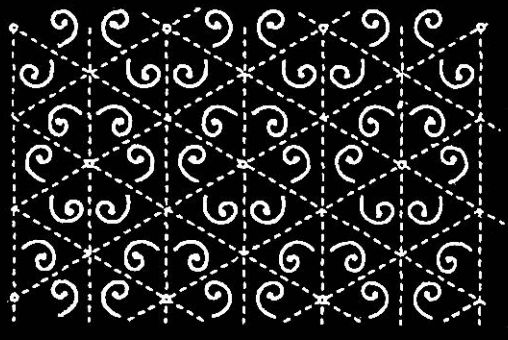

cm
pm
pgg
p4
pmg
pmm
cmm
p4g



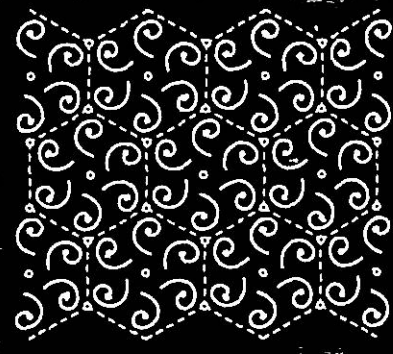
p4m



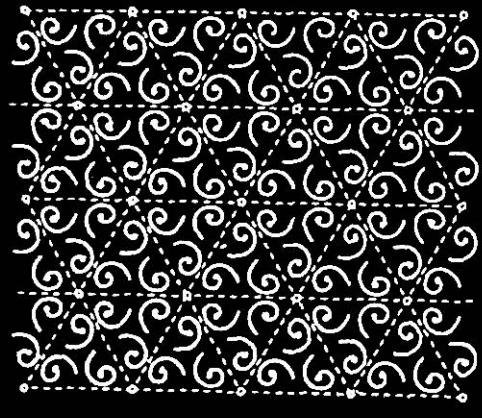
p3



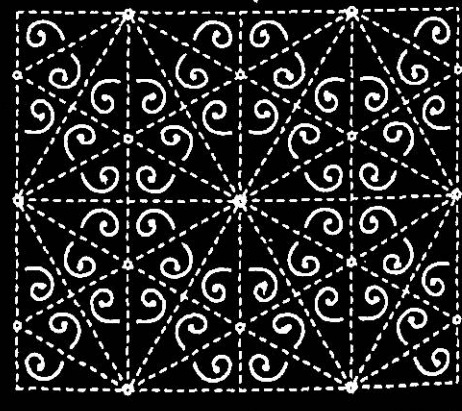
p3m1



p6



p31m



p6m

T – somente translação

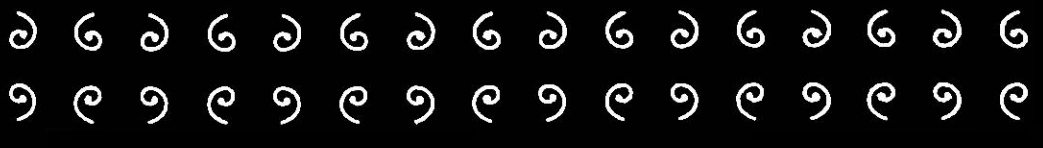
TD – translação e reflexão com deslizamento

TV – translação e reflexão vertical

TR – translação e rotação

TRVD – translação, rotação, reflexão vertical e reflexão com deslizamento

THD – translação, reflexão horizontal e reflexão com deslizamento



TRHVD – translação, rotação, reflexão horizontal, reflexão vertical e reflexão com deslizamento

Notas da Tradutora

[1] Palavra originária do árabe que significa "o maior" e dá nome ao tratado de astronomia escrito em grego, no séc. II, por Cláudio Ptolomeu, matemático, astrônomo, geógrafo, astrólogo e cidadão romano que residia no Egito. Esta obra, considerada um dos mais influentes textos científicos de todos os tempos, é composta por treze seções ou livros, e foi amplamente utilizada pelos árabes e europeus da alta Idade Média. Para mais referências: James Evans, *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford, Oxford University Press, 1998; Michael Hoskin, *The Cambridge Concise History of Astronomy*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

[2] Os vértices do pentágono sempre aparecerão nas intersecções com a circunferência.

[3] A abertura do compasso é a distância entre esses pontos e <4>.

[4] Nome dado a um local na Grã-Bretanha, no extremo oeste do cemitério de Normanton Down Barrows, considerado um dos mais importantes a fazer parte do complexo conhecido como Stonehenge (monumento megalítico da Idade do Bronze britânica, de cerca de 2000 a.C., localizado ao sul da Inglaterra). Em Bush Barrow, foram encontrados diversos artefatos, entre os quais uma grande lâmina de ouro no formato de um losango, que recebeu o mesmo nome do local, e chamou a atenção pela precisão e exatidão com que foi projetada e moldada, demonstrando um bom conhecimento de geometria já naquele período.

[5] Termo proveniente do inglês *tesselation*, parece ter origem na palavra latina *tessela*, que tanto indica a pavimentação de uma região através de peças de mosaico como dá nome à peça cúbica, geralmente de barro ou de vidro, utilizada para fazer mosaicos. O termo é bastante usado em geometria e foi adaptado para o português utilizando-se duas letras "s" para não ser confundido com a palavra *tecelação* – do verbo *tecer*, entrelaçar fios.

[6] William Morris (1834–1896) foi um artista e designer têxtil ligado ao Movimento de Artes e Ofícios inglês, além de fundador de uma empresa, em parceria com o artista Edward Burne-Jones e o poeta e pintor Dante Gabriel Rosseti, que influenciou profundamente a decoração de igrejas e casas no início do século XX. Seu trabalho ajudou a reviver as artes têxteis e os métodos tradicionais de produção dessa indústria. Além de ilustrador e medievalista, também era escritor e ajudou a estabelecer o gênero literário moderno chamado *literatura fantástica*, influenciando muitos escritores do pós-guerra, entre os quais J. R. R. Tolkien.

[7] Palavra originária do grego κόσμος ou *kósmos*, que significa tanto "ordem" como "ornamento", e é antitética ao conceito de "caos".

[8] Ilha localizada no Mar da Irlanda, entre a Grã-Bretanha e a Irlanda, e que é uma dependência da Coroa Britânica, mas não faz parte do Reino Unido, embora o chefe de Estado seja a Rainha Elizabeth II, que detém o título de *Lord of Mann* (Soberana de Mann). Apesar disso, suas relações internacionais e sua defesa são de responsabilidade do governo britânico. A cultura local é fortemente influenciada por origens celtas e nórdicas, e a língua oficial, juntamente com inglês, é o manês ou *manx*.

[9] Que são as perpendiculares das arestas do triângulo equilátero inscrito no círculo externo.

[10] Também chamado *tracería*, refere-se a um tipo de trabalho arquitetônico decorativo criado a partir de elementos geométricos, que se desenvolveu muito com a arquitetura gótica. Seus arabescos ou ornamentos geralmente imitam a renda, e, por isso, ele também pode ser chamado *rendilha* ou *rendilhado de pedra* (que é a matéria-prima utilizada na estrutura). Nas catedrais, aparece em forma de aberturas circulares, ou rosáceas, revestidas por vidros coloridos, também pode cobrir certas áreas, funcionando como um relevo, tanto coroando janelas, arcos e abóbodas, por exemplo, como em superfícies planas (painéis ou paredes internas).

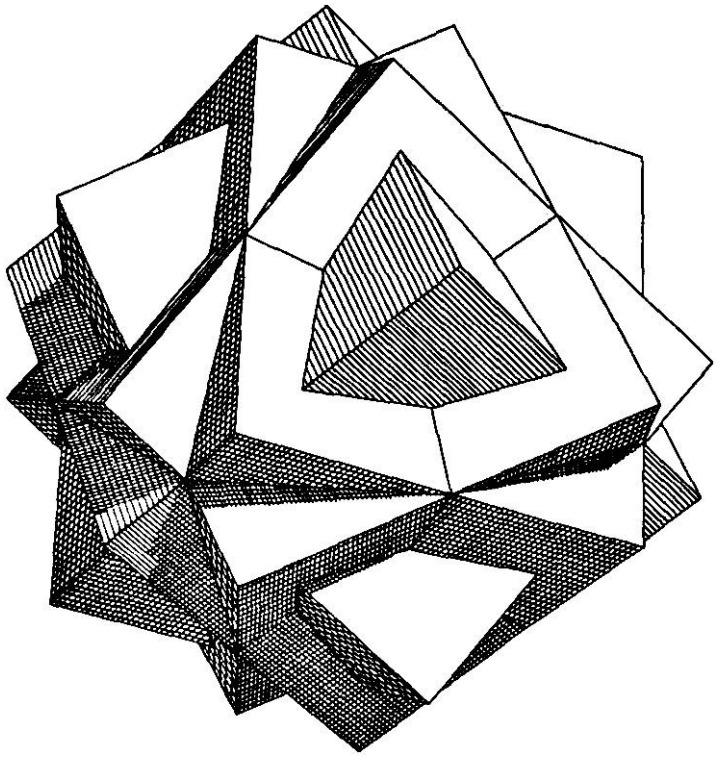
[11] Localizada em Lincoln, na Inglaterra, o nome completo desta catedral, que pertence à Igreja da Inglaterra (Anglicana), é Catedral da Santíssima Virgem de Lincoln ou Catedral de Santa Maria.

[12] Engenheiro escocês famoso por sua categorização dos círculos de pedra e seus estudos sobre Stonehenge, bem como sobre outros sítios arqueológicos. Para mais informações sobre ele: Robin Heath, *Alexander Thom: Cracking the Stone Age Code*. Bluestone Press, maio 2003.

[13] Localizada em Hampshire, Inglaterra, é uma das maiores catedrais inglesas, com a nave mais longa e de maior comprimento entre todas as catedrais góticas da Europa.

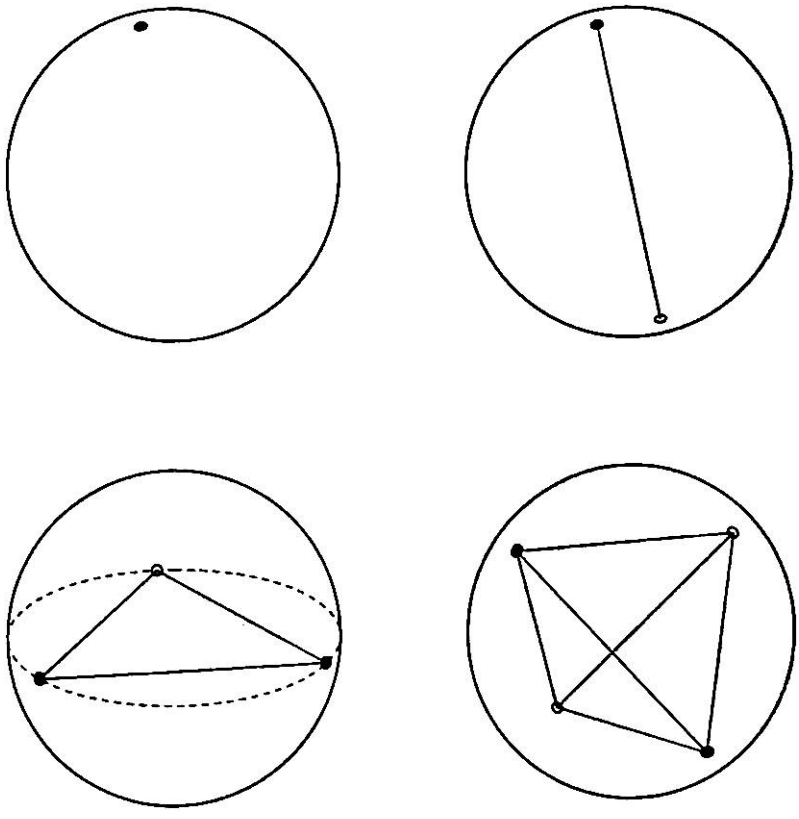
[14] Os dois tipos mais simples de padrões geométricos produzidos de acordo com os postulados euclidianos são os desenvolvidos a partir do quadrado dentro do círculo, ou *ad quadratum*, e os desenvolvidos a partir do triângulo dentro do círculo, ou *ad triangulum*.

[13] Matemático inglês que se tornou muito conhecido por sua grande influência no desenvolvimento da ciência da computação, ao fornecer uma formalização dos conceitos de "algoritmo" e "computação", através de um dispositivo conhecido como *Máquina de Turing* (que manipula símbolos sobre uma fita, de acordo com uma tabela de regras). Apesar da simplicidade desse dispositivo, ele pode ser adaptado para simular a lógica de qualquer algoritmo de computador, e teve um papel significativo na criação do computador moderno. Por essa razão, Turing é amplamente reconhecido como o pai da Ciência da Computação (disputando o título, até certo ponto, com Blaise Pascal e sua famosa calculadora). Para mais informações: Douglas Hofstadter e Christof Teuscher, *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*. Nova York, Springer Verlag, 2004; Paul Ceruzzi, *A History of Modern Computing*. Massachusetts, MIT Press, 1998

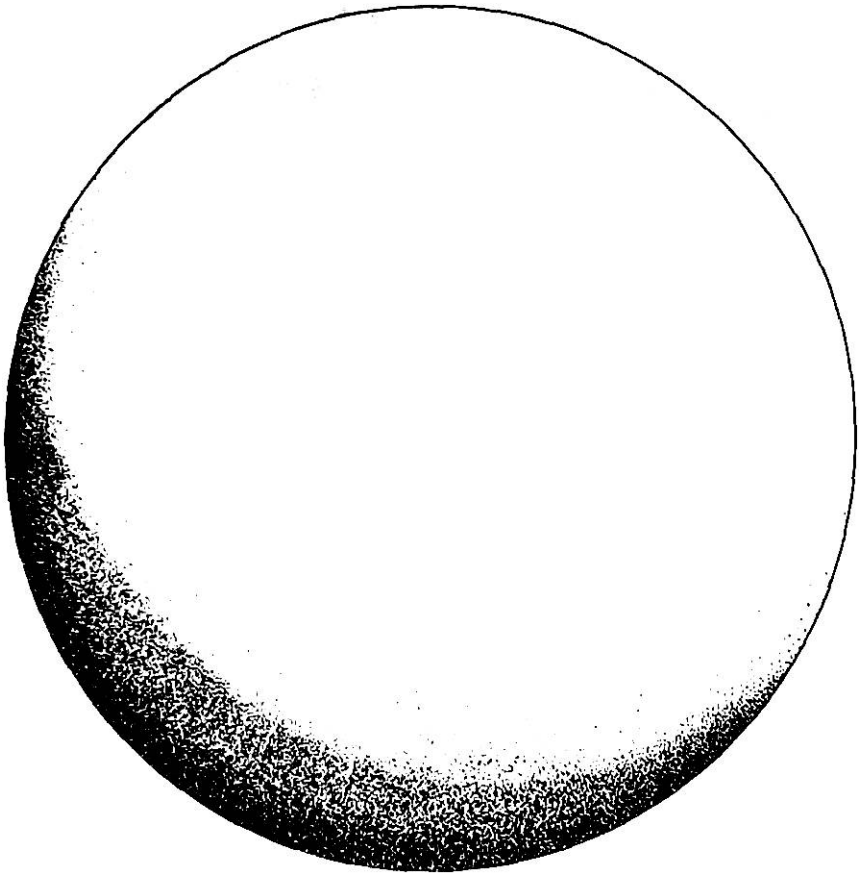


L I V R O I I I

OS SÓLIDOS PLATÔNICOS E ARQUIMEDIANOS



Daud Sutton



Introdução

Imagine uma esfera. Ela é o símbolo perfeito da Unidade. Cada ponto em sua superfície é idêntico a todos os demais, equidistantes do único ponto em seu centro.

Estabelecer um único ponto na esfera permite que outros pontos sejam definidos em relação a ele. A relação mais simples e óbvia acontece com o ponto diretamente oposto, que pode ser encontrado através da extensão de uma linha, através do centro da esfera, até alcançar o outro lado. Adicione um terceiro ponto e separe os três tanto quanto for possível, a fim de definir um triângulo equilátero. Os três pontos estarão em um círculo de raio igual ao da esfera e partilhando o seu centro, um exemplo dos maiores círculos possíveis de encontrar em uma esfera, conhecidos como *grandes círculos*. Um ponto não ocupa nenhuma dimensão, enquanto a linha e o triângulo ocupam, respectivamente, uma e duas dimensões. Para definir uma forma tridimensional não curva, são necessários, no mínimo, quatro pontos.

Esta seção do *Quadrivium* mapeia o desdobramento do número no espaço tridimensional, através das formas mais básicas derivadas da esfera. Essas belas formas, elementos centrais da investigação matemática e artística desde a Antiguidade, continuam a intrigar e a inspirar, mesmo depois de incontáveis gerações.

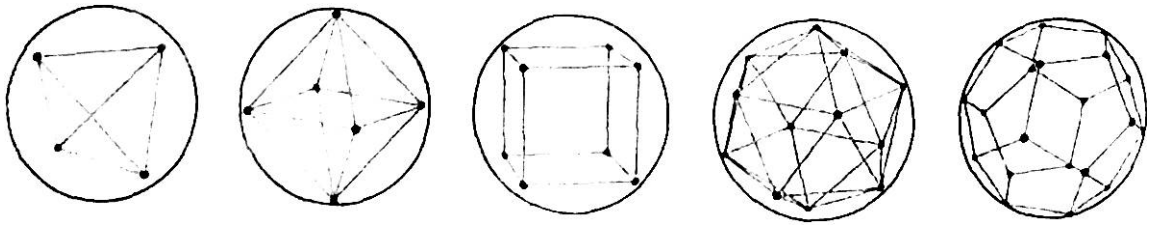
OS SÓLIDOS PLATÔNICOS

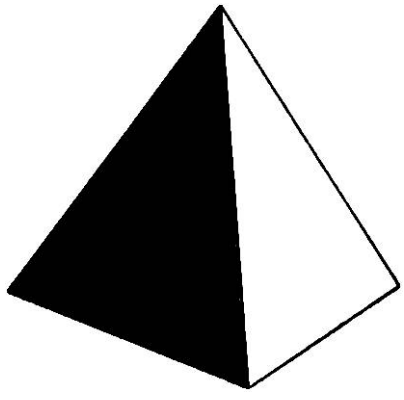
Belas formas revelam-se a partir da unidade

Imagine que você está em uma ilha deserta: existem paus, pedras e pedaços de casca de árvore. Se começar a experimentar com estruturas tridimensionais, você pode muito bem descobrir cinco formas "perfeitas". Em cada caso, elas têm a mesma aparência a partir de qualquer vértice (canto), todas as suas faces são feitas da mesma forma regular, e todas as arestas são idênticas. Seus vértices formam as distribuições mais simétricas possíveis de quatro, seis, oito, doze e vinte pontos em uma esfera (*abaixo*).

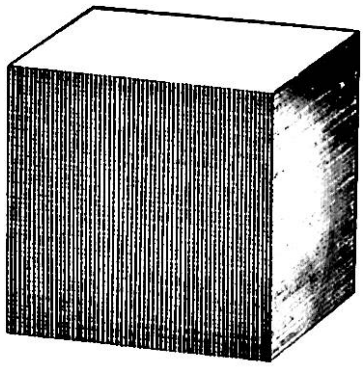
Essas formas são exemplos de *poliedro*, que significa, literalmente, "muitas faces".[1] Como a descrição mais antiga desses sólidos, como grupo, aparece na obra *Timeu*, de Platão, eles são frequentemente chamados sólidos platônicos. Platão viveu de 427 a 347 a.C., mas há evidências de que os sólidos platônicos foram descobertos muito mais cedo.

Três desses sólidos possuem faces que são triângulos equiláteros – três, quatro ou cinco triângulos que se encontram em cada vértice – e têm nomes derivados do seu número de faces. O *tetraedro* é criado a partir de quatro faces; o *octaedro*, a partir de oito; e o *icosaedro*, a partir de vinte. O tema 3-4-5 continua com o *cubo* comum, com suas seis faces quadradas, e com o *dodecaedro* e suas doze faces pentagonais regulares. Nas páginas que se seguem, vamos conhecer melhor estas impressionantes formas tridimensionais.

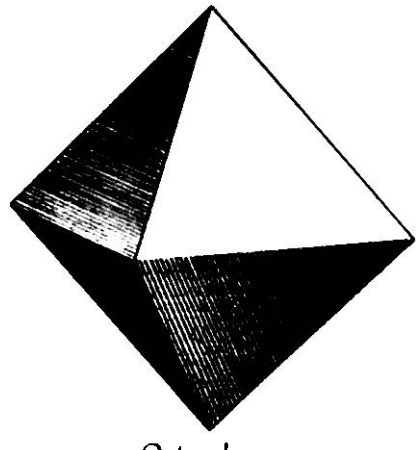




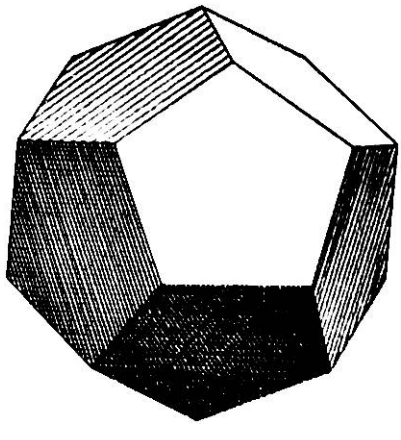
Tetraedro



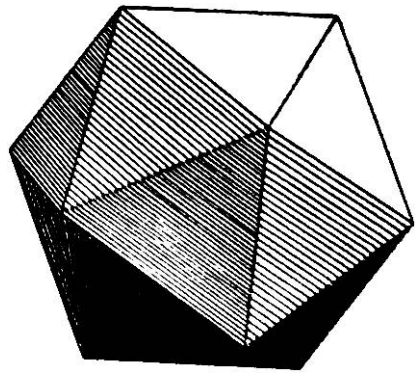
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

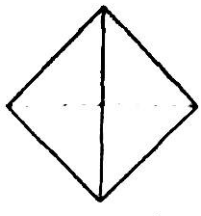
O TETRAEDRO

4 faces : 6 arestas : 4 vértices

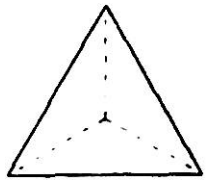
O tetraedro é composto por quatro triângulos equiláteros, com três deles encontrando-se em cada vértice. Seus vértices também podem ser definidos pelos centros de quatro esferas que se tocam (*canto inferior direito, imagem ao lado*). Platão associava esta forma com o elemento fogo, pela agudeza penetrante de suas arestas e vértices, e porque o tetraedro é o mais simples e mais fundamental dos sólidos regulares. O filósofo grego também conhecia o tetraedro como *puramís*, de onde vem a palavra *pirâmide*. Curiosamente, a palavra grega para fogo é *pur*.

O tetraedro tem três eixos duplos passando através dos pontos médios de suas arestas, e quatro eixos triplos, cada um deles passando através de um vértice e do centro da face oposta (*abaixo*).[2] Qualquer poliedro com estes eixos de rotação tem *simetria tetraédrica*.

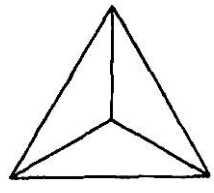
Todo sólido platônico está contido em sua *circunsfera*,[3] cuja superfície toca apenas os seus vértices. Esses sólidos também definem outras duas esferas: a *interesfera* (ou *meiosfera*),[4] que é tangente ao ponto médio de cada aresta, e a *insfera*, que está contida no sólido e toca com perfeição o centro de cada face. Para o tetraedro, o *inraio*, ou raio da insfera, equivale a um terço do *circunraio* ou raio da circunsfera (*canto inferior esquerdo, imagem ao lado*).



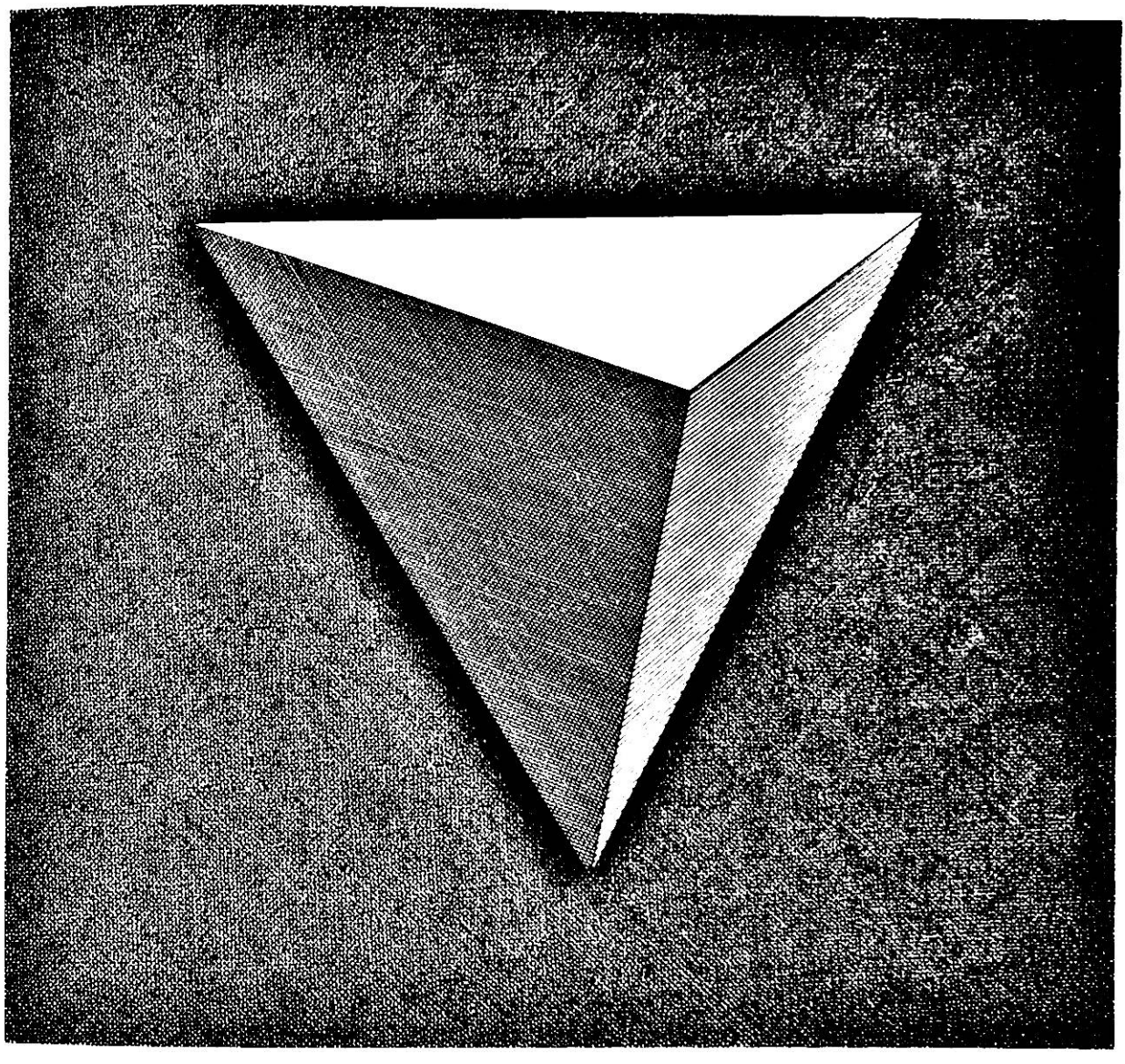
Aresta para a frente: eixo duplo

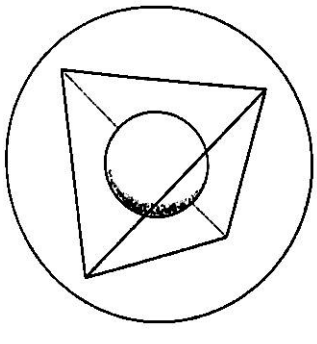


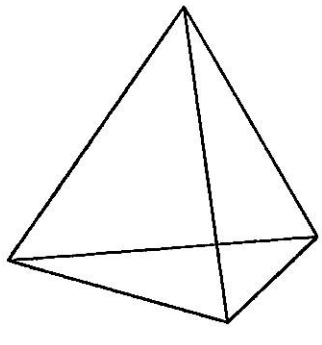
Face para a frente: eixo triplo

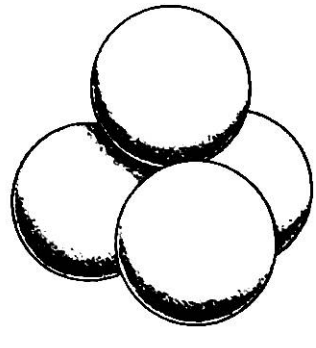


A partir do vértice: eixo triplo









O OCTAEDRO

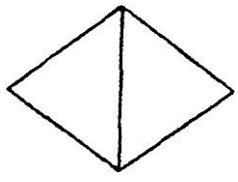
8 faces : 12 arestas : 6 vértices

O octaedro é composto por oito triângulos equiláteros, com quatro deles encontrando-se em cada vértice. Platão considerava o octaedro um intermediário entre o tetraedro, ou fogo, e o icosaedro, ou água, atribuindo esse sólido, portanto, ao elemento ar. O octaedro tem seis eixos duplos que passam através de arestas opostas, quatro eixos triplos que passam através de seus centros de face, e três eixos quádruplos que passam através de vértices opostos (*abaixo*). Os sólidos que reúnem esses eixos de rotação exibem uma *simetria octaédrica*.

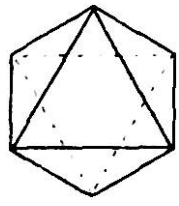
Escritos gregos atribuem a descoberta do octaedro e do icosaedro a Teeteto de Atenas (417-369 a.C.). Acredita-se que o Livro XIII dos *Elementos* de Euclides (*ver página 146*) é baseado no trabalho de Teeteto sobre os sólidos regulares.

O circunraio do octaedro é maior que seu inraio por um coeficente de $\sqrt{3}$ (*ver página 383*). A mesma relação ocorre entre o circunraio e o inraio do cubo, e entre o circunraio e o *meio raio*, ou raio da interesfera, do tetraedro (e também entre o meio raio e o inraio).

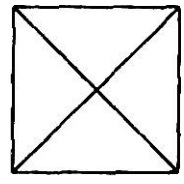
O tetraedro, o octaedro e o cubo são todos encontrados no reino mineral. Diamantes minerais e cristais de fluorita comuns frequentemente formam octaedros.



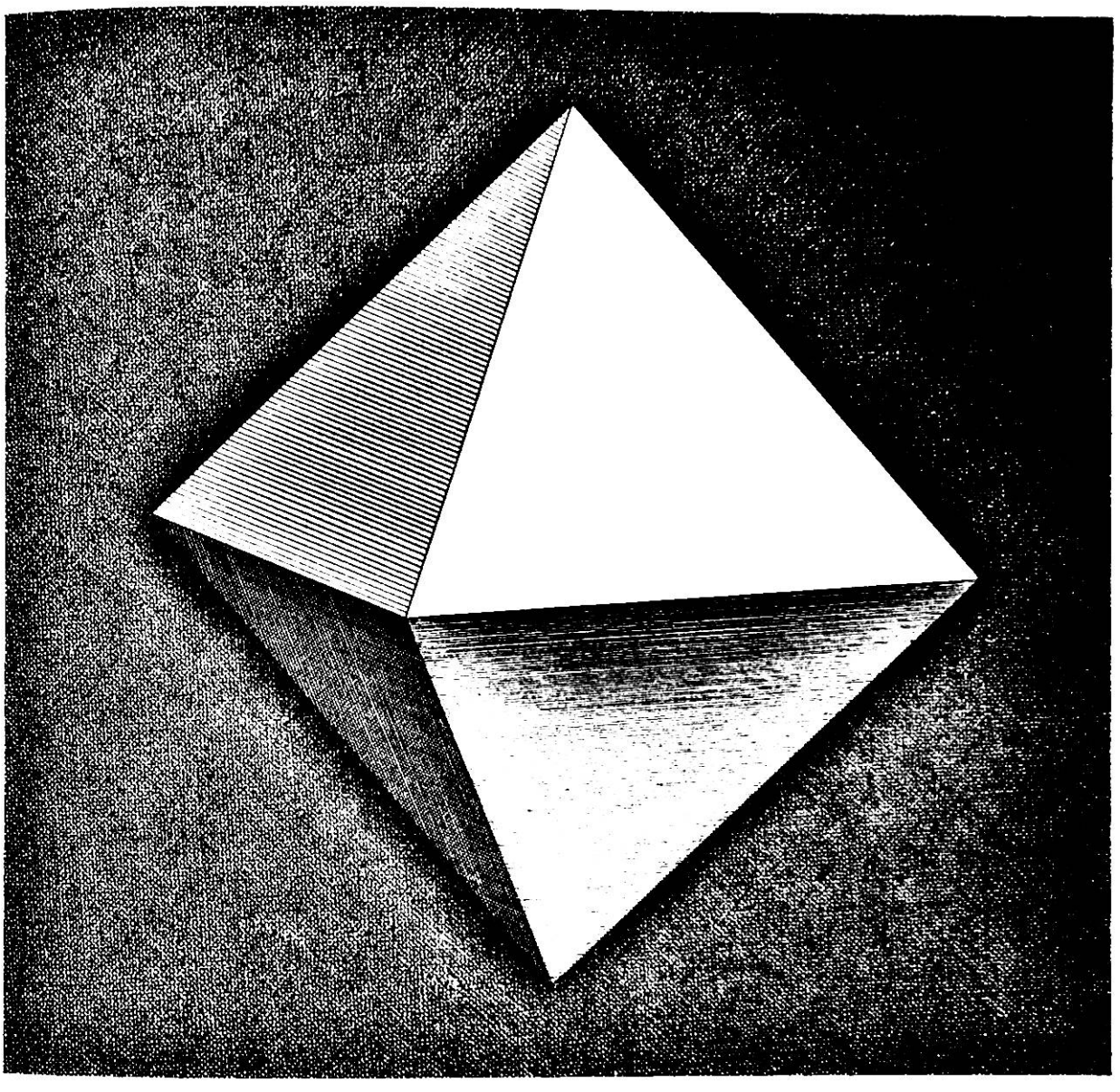
Aresta para a frente: eixo duplo

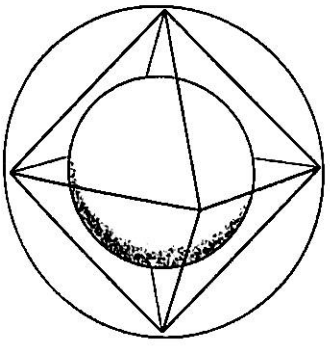


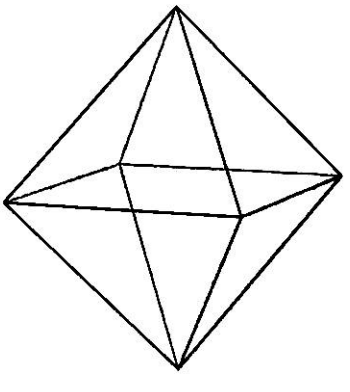
Face para a frente: eixo triplo

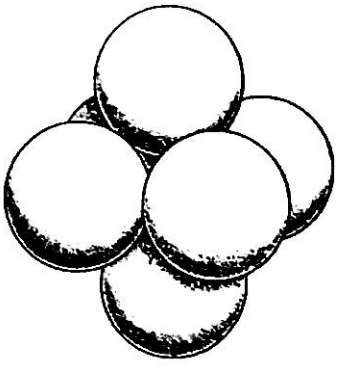


A partir do vértice: eixo quádruplo









O ICOSAEDRO

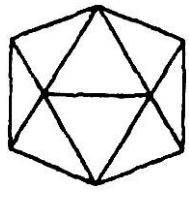
20 faces : 30 arestas : 12 vértices

O icosaedro é composto de vinte triângulos equiláteros, com cinco deles encontrando-se em cada vértice. Tem quinze eixos duplos, dez eixos triplos e seis eixos quíntuplos (*abaixo*), conhecidos como *simetria icosaédrica*. Uma vez que o tetraedro, o octaedro e o icosaedro são feitos de triângulos idênticos, o icosaedro é o maior. Isso levou Platão a associar o icosaedro com a água, o mais denso e menos penetrante dos três elementos fluidos: fogo, ar e água.

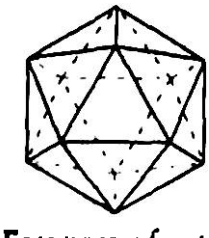
O ângulo em que duas faces de um poliedro se encontram em uma aresta é conhecido como um *ângulo diedro*. O icosaedro é o sólido platônico com maiores ângulos diedros.

Se juntarmos as duas extremidades de uma aresta do icosaedro com o centro desse sólido, define-se um triângulo isósceles – o mesmo acontece com os triângulos que compõem as faces da Grande Pirâmide em Gizé, no Egito. As arestas opostas de um icosaedro formam retângulos áureos (*ver página 154*).

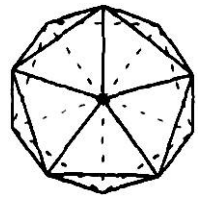
Organizando doze esferas iguais para definir um icosaedro, deixa-se um espaço no centro para outra esfera, que é pouco mais de nove décimos tão larga quanto as outras (*canto inferior direito, imagem ao lado*).



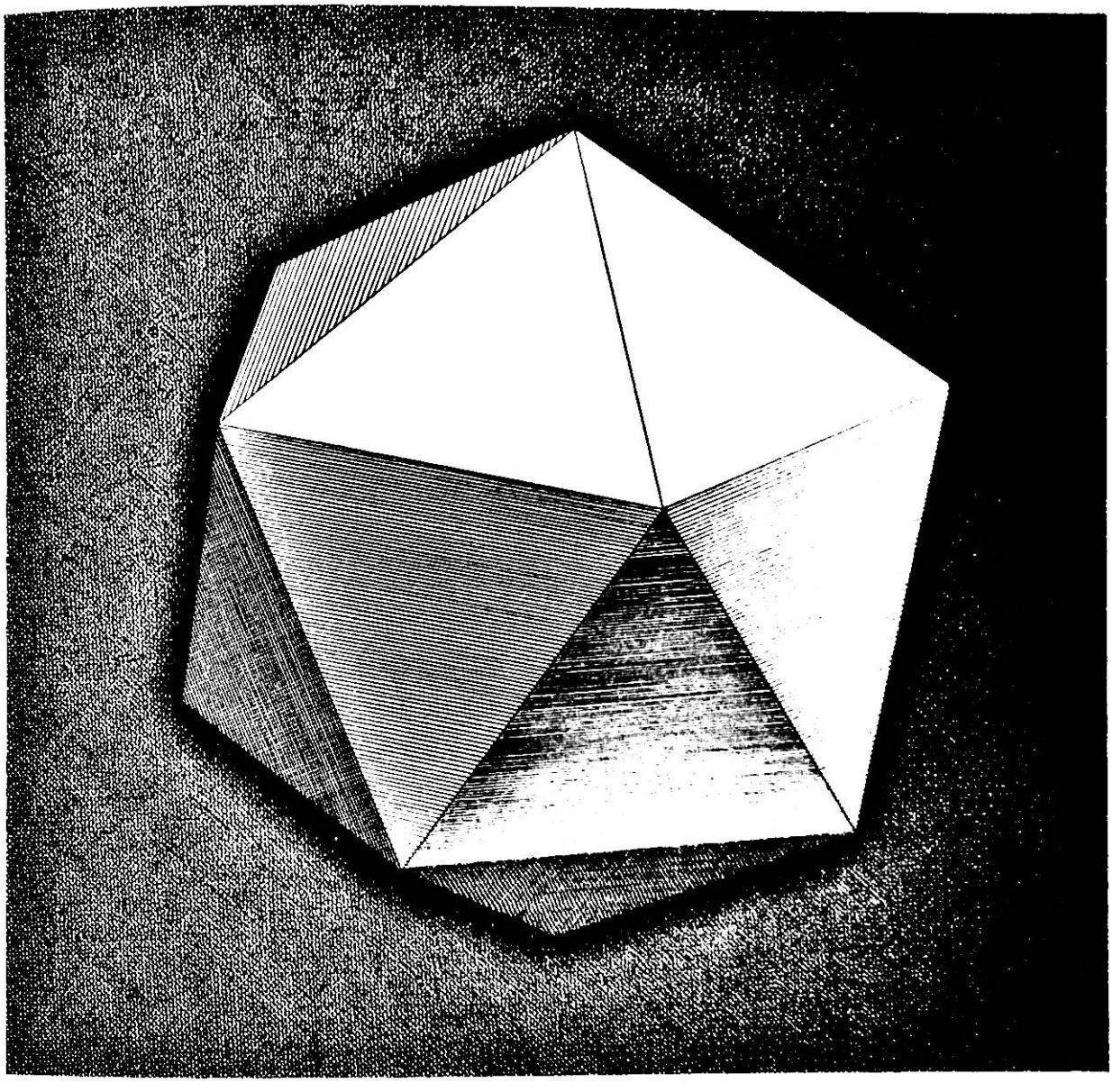
Aresta para a frente: eixo duplo

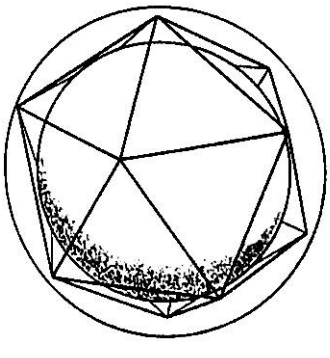


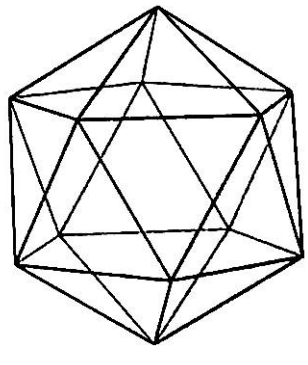
Face para a frente: eixo triplo

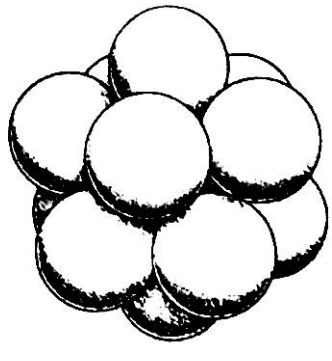


A partir do vértice: eixo quíntuplo









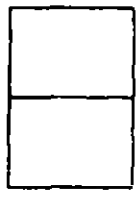
O CUBO

6 faces : 12 arestas : 8 vértices

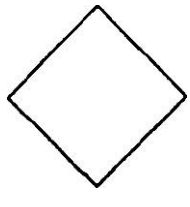
O cubo tem simetria octaédrica (*abaixo*). Platão associou-o ao elemento terra devido à estabilidade de suas bases quadradas. Alinhado com a nossa experiência do espaço, o cubo volta-se para a frente, para trás, para a direita, para a esquerda, para cima e para baixo, o que corresponde às seis direções norte, sul, leste, oeste, zênite[5] e nadir.[6] Como vimos no Livro I deste volume, seis é o primeiro número perfeito, cuja soma dos fatores resulta nele mesmo (1 + 2 + 3 = 6).

Junte as doze arestas do cubo às doze diagonais das faces e às quatro diagonais interiores para encontrar um total de vinte e oito caminhos retos que unem os oito vértices do cubo uns aos outros. Vinte e oito é o segundo número perfeito (1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28).

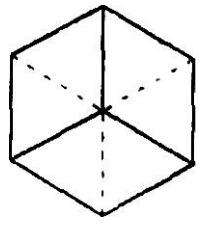
A peregrinação anual do islã é feita até a Kaaba,[7] que significa, literalmente, "cubo" em árabe, localizada na cidade de Meca, na Arábia Saudita. O santuário do Templo de Salomão também era um cubo, assim como a cristalina Nova Jerusalém, de acordo com o livro do Apocalipse de São João. Em 430 a.C., o oráculo de Delfos instruiu os atenienses a dobrar o volume do altar cúbico de Apolo, enquanto mantinham sua forma. Em última análise, este problema, que se tornou conhecido como "a duplicação do cubo", provou-se impossível de solucionar utilizando apenas a geometria euclidiana.



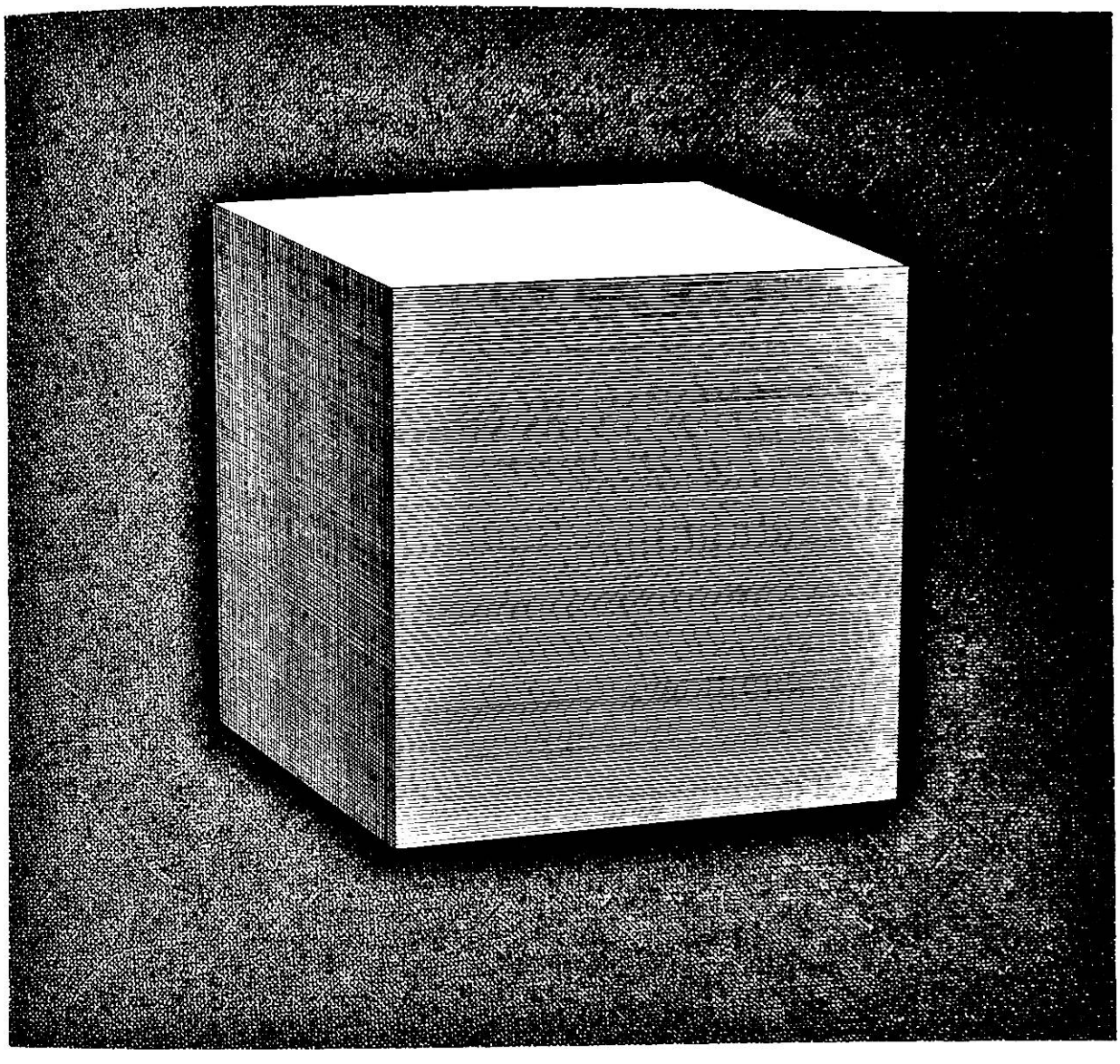
Aresta para a frente: eixo duplo

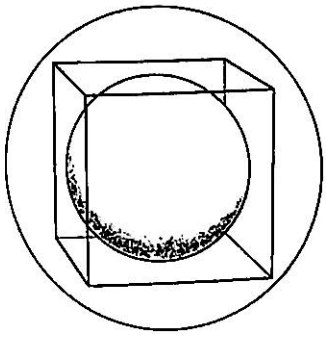


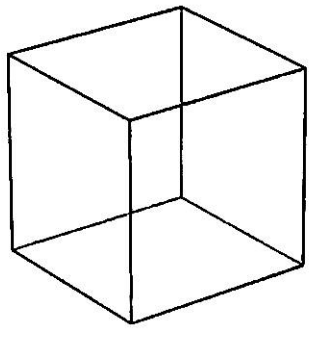
Face para a frente: eixo quádruplo

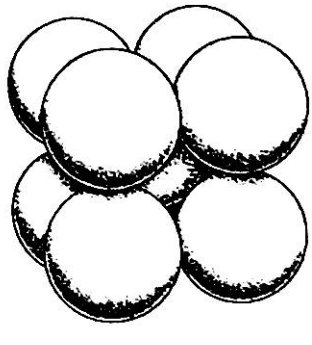


A partir do vértice: eixo triplo









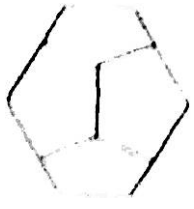
O DODECAEDRO

12 faces : 30 arestas : 20 vértices

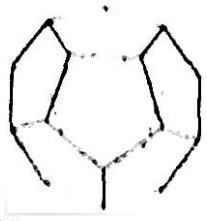
O belo dodecaedro tem doze faces pentagonais regulares, três das quais se encontram em cada vértice. Sua simetria é icosaédrica (*abaixo*). Tal como o tetraedro, ou pirâmide, e o cubo, o dodecaedro era conhecido pelos primeiros pitagóricos e frequentemente chamado *a esfera de doze pentágonos*. Tendo detalhado os outros quatro sólidos e tendo-lhes atribuído os quatro elementos, o *Timeu* de Platão diz enigmaticamente: "Restava uma quinta estrutura que Deus usou para bordar as constelações em todo o céu".

Um dodecaedro apoiado sobre uma superfície horizontal tem vértices que se encontram em quatro planos horizontais, e estes cortam ou dividem o dodecaedro em três partes. Surpreendentemente, o volume da parte do meio é igual ao das outras partes, e assim cada uma delas tem um terço do volume total! Além disso, quando localizados dentro de uma mesma esfera, as áreas de superfície do icosaedro e do dodecaedro estão na mesma proporção que seus volumes, e suas insferas são idênticas.

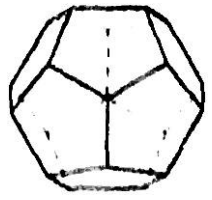
O "ouro de tolo", ou pirita de ferro, forma cristais que são muito parecidos com o dodecaedro, mas não se engane, pois suas faces pentagonais não são regulares e sua simetria é tetraédrica.



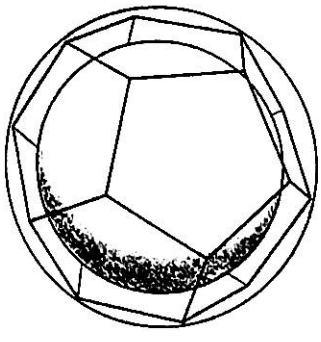
Aresta para a frente: eixo duplo

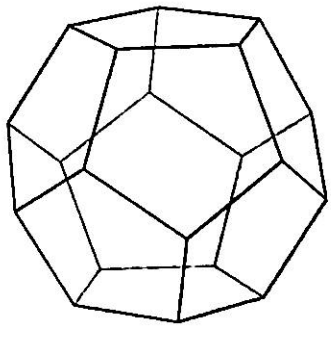


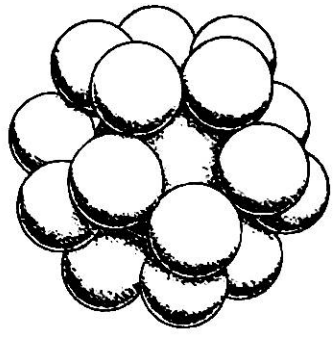
Face para a frente: eixo quíntuplo



A partir do vértice: eixo triplo







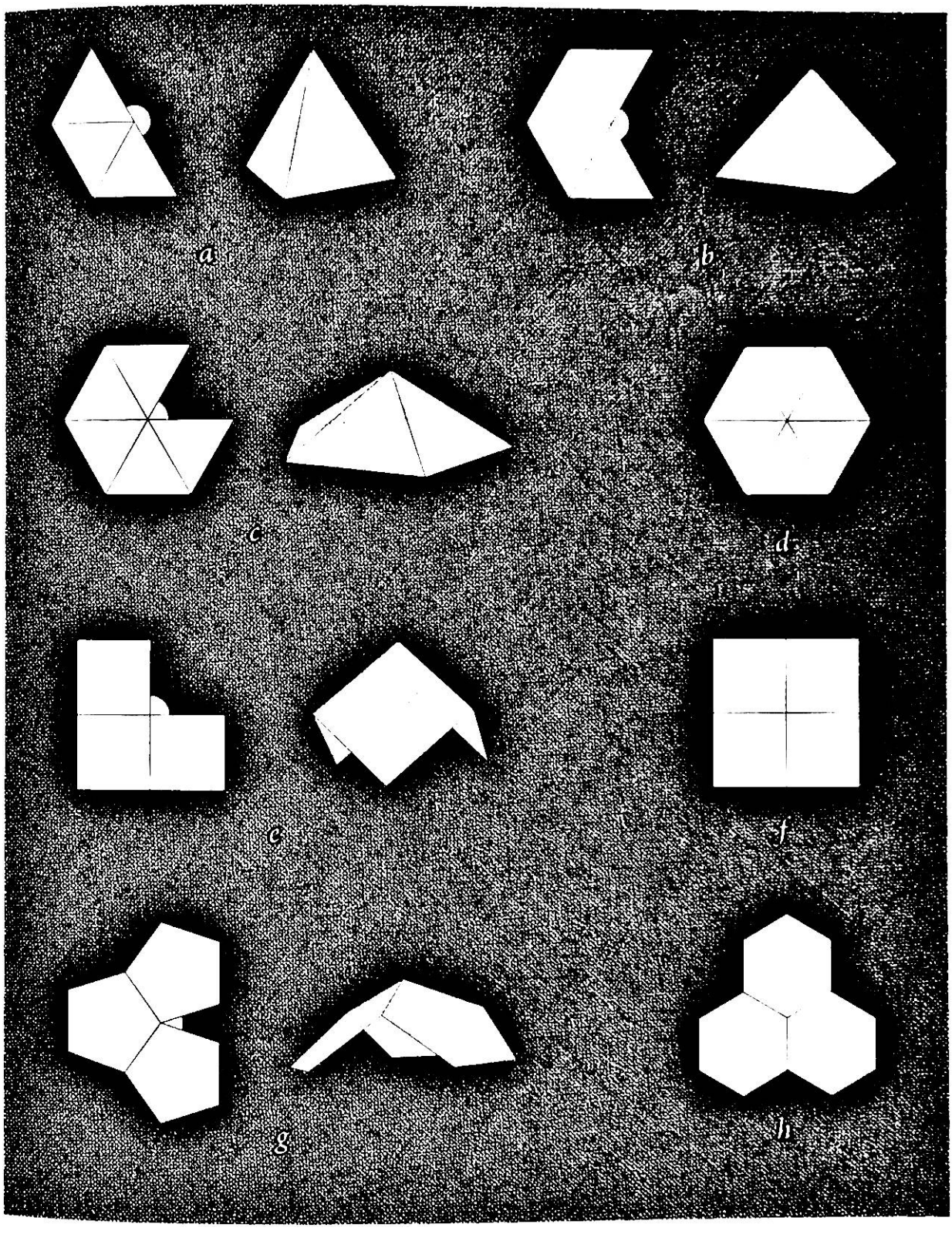
UMA PEQUENA PROVA

Há realmente apenas cinco?

Um *polígono regular* tem lados e ângulos iguais. Um *poliedro regular* tem faces de polígonos regulares e vértices idênticos. Os sólidos platônicos são os únicos *poliedros regulares convexos*[8] possíveis. No livro XIII de seu *Elementos*, Euclides de Alexandria (325-265 a.C.) prova que cada um desses cinco poliedros regulares convexos pode ser construído, e conclui demonstrando que não há outras possibilidades.

Pelo menos três polígonos são necessários para compor um *ângulo sólido*.[9] Utilizando triângulos equiláteros, isso é possível com três <*a*>, quatro <*b*> e cinco <*c*> deles em torno de um ponto. Com seis triângulos, o resultado permanece plano <*d*>. Três quadrados também formam um ângulo sólido <*e*>, mas com quatro quadrados <*f*> se atinge um limite semelhante ao de seis triângulos equiláteros. Três pentágonos regulares formam um ângulo sólido <*g*>, mas não há espaço, mesmo no plano, para quatro ou mais. Três hexágonos regulares que se encontram em um ponto permanecem no plano <*h*>, enquanto polígonos com mais de seis lados não conseguem reunir-se em trio ao redor de um ponto, razão por que um limite final é alcançado aqui. Uma vez que apenas cinco ângulos sólidos podem surgir da reunião de polígonos regulares idênticos, no máximo cinco poliedros regulares convexos são possíveis.

Quando um poliedro é dobrado e achatado em um de seus vértices, o ângulo deixado como um intervalo é a sua *deficiência angular*. René Descartes (1596-1650) descobriu que a soma das deficiências angulares de um poliedro convexo é sempre igual a 720°, ou duas voltas completas. Depois, no século XVIII, Leonard Euler (1707-1783) percebeu outro fato peculiar: em todo poliedro convexo, o número de faces menos o número de arestas mais o número de vértices é igual a dois.[10]


a
b
c
d
e
f
g
h

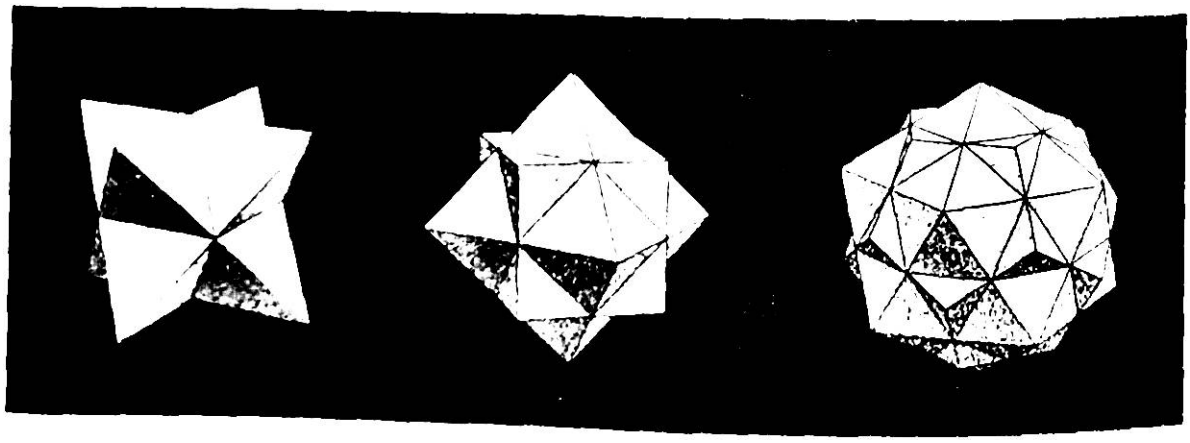
TODAS AS COISAS EM PARES

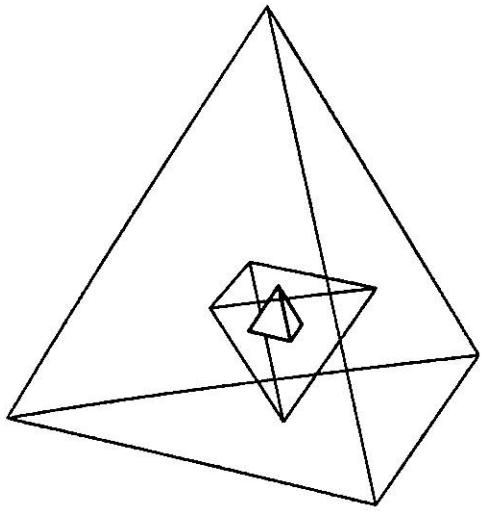
Sólidos platônicos de dois em dois

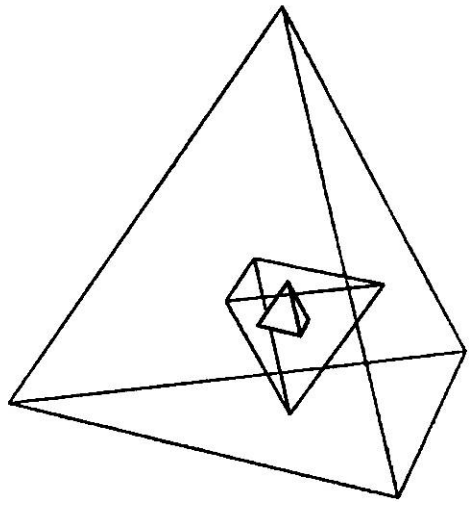
O que acontece se juntarmos os centros das faces dos sólidos platônicos? Começando com um tetraedro, descobrimos outro tetraedro invertido. Os centros das faces de um cubo produzem um octaedro, e um octaedro cria um cubo. Do mesmo modo, o icosaedro e o dodecaedro produzem um ao outro. Dois poliedros cujas faces e vértices se correspondem com perfeição são conhecidos como *duais* um do outro. O tetraedro é dual de si mesmo. Poliedros duais têm o mesmo número de arestas e as mesmas simetrias.

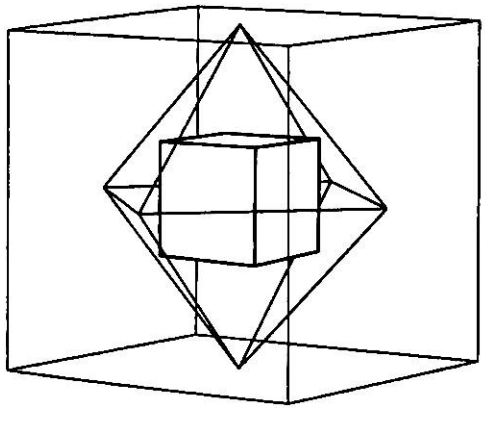
As ilustrações ao lado são pares de estereogramas.[11] Segure o livro no comprimento do braço e coloque um dedo na vertical, a meio caminho da página. Concentre-se no dedo e, em seguida, coloque a imagem central turva em foco. A imagem deve saltar em três dimensões.

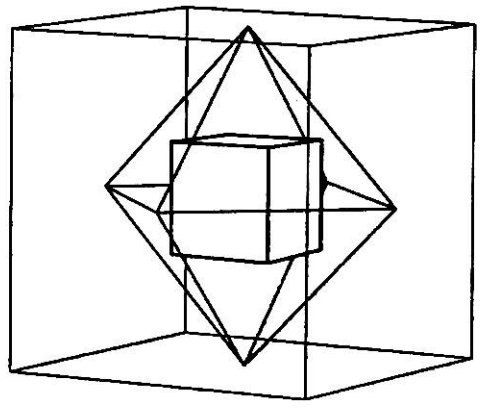
Os pares duais de sólidos platônicos podem ser unidos, com suas arestas tocando-se em seus pontos médios, para gerar os poliedros compostos mostrados abaixo. Tudo na Criação tem sua contraparte ou oposto, e as relações duais dos sólidos platônicos são um belo exemplo desse princípio.

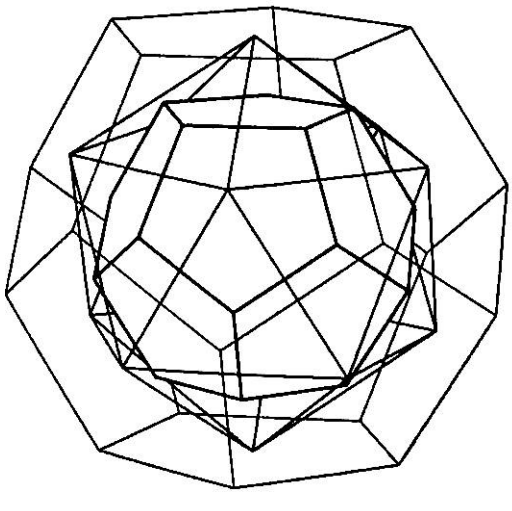


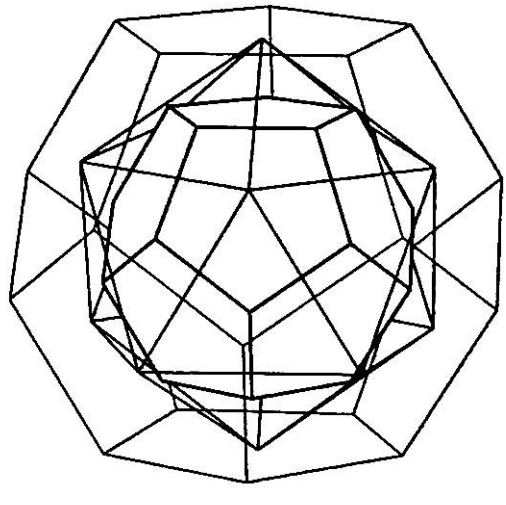












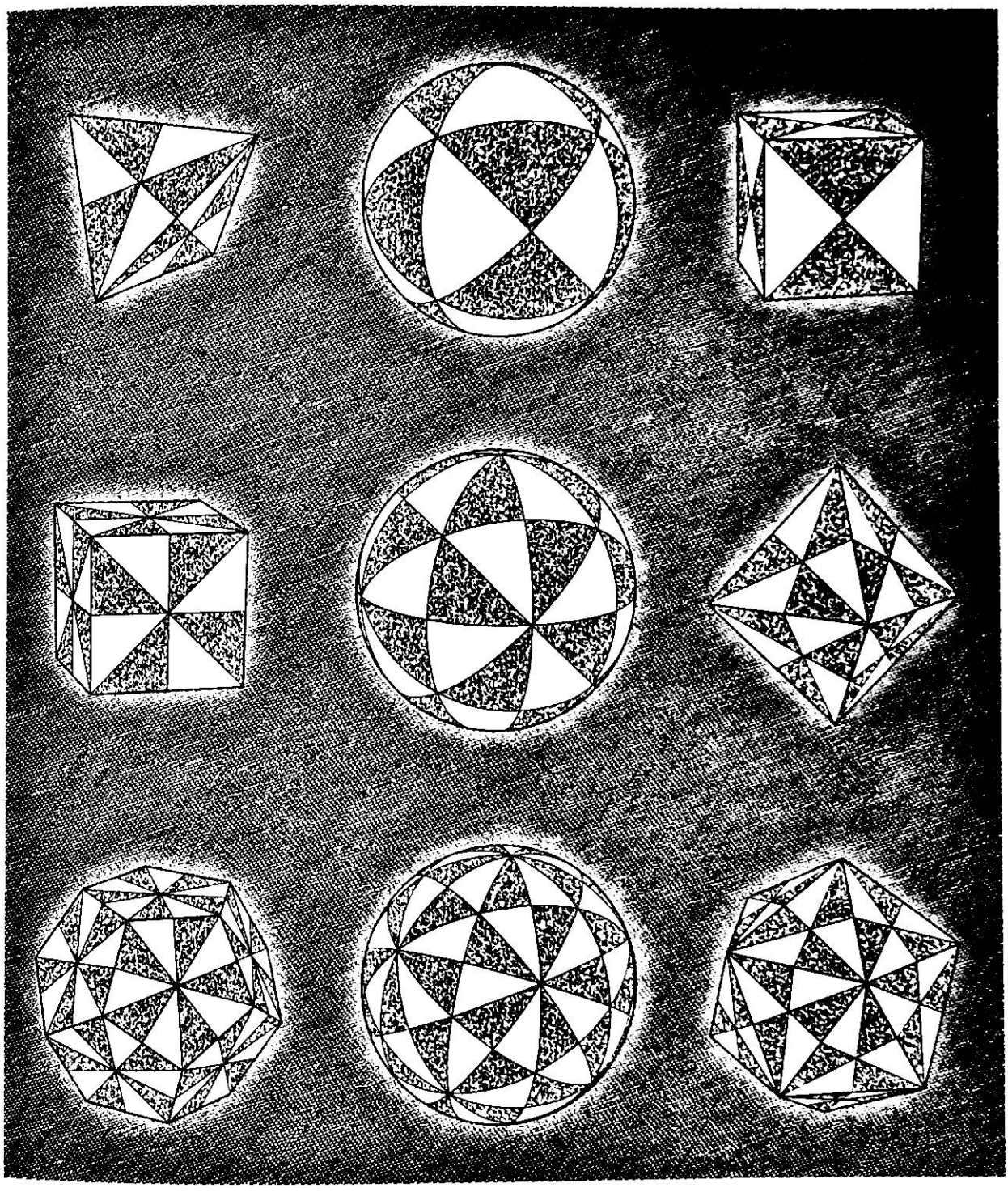
AO REDOR DO GLOBO

Em formas elegantes

A cosmologia de Platão constrói os sólidos elementares a partir de dois tipos de átomo triangular reto. O primeiro átomo é metade de um triângulo equilátero, e, assim, seis deles se combinam para produzir triângulos equiláteros maiores que, em seguida, formarão o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. O segundo átomo triangular é um quadrado dividido na metade pela diagonal, o qual aparece em grupos de quatro, formando quadrados que então formam cubos.

Os sólidos platônicos têm planos de simetria dividindo-os em metades espelhadas: o tetraedro tem seis planos espelhados, o octaedro e o cubo têm nove, o icosaedro e o dodecaedro têm quinze. Quando o tetraedro, o octaedro e o icosaedro são construídos a partir dos átomos triangulares de Platão, definem-se caminhos que tornam explícitos os seus planos espelhados. O cubo, no entanto, precisa do dobro de divisões triangulares como as definidas por Platão (*linha superior à direita*) para delinear todos os seus planos espelhados (*linha central à esquerda*).

A projeção dos sólidos platônicos subdivididos em suas circunsferas produz três sistemas de simetria esféricos. Cada sistema esférico é definido por um triângulo esférico característico, com um ângulo reto e um segundo ângulo equivalente a um terço de uma meia volta. Os terceiros ângulos desses triângulos são, respectivamente, um terço de uma meia-volta (*linha superior*), um quarto de uma meia-volta (*linha central*) e um quinto de uma meia-volta (*linha inferior*). Essa sequência de 1/3, 1/4 e 1/5 inverte de forma elegante a tríplice pitagórica de números inteiros 3, 4 e 5.



VOLTAS E MAIS VOLTAS

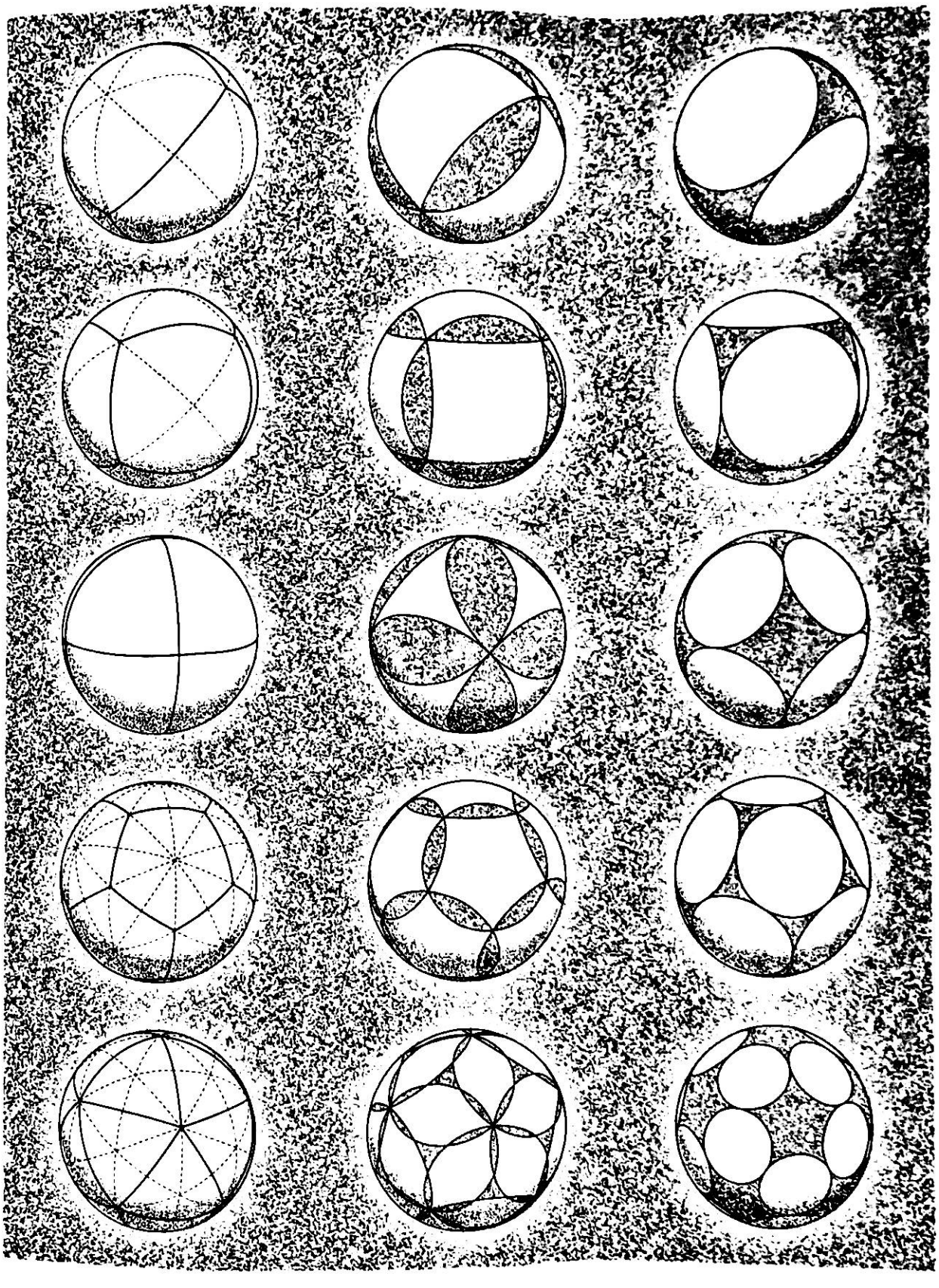
Círculos menores

Qualquer navegador lhe dirá que a menor distância entre dois pontos na superfície de uma esfera é sempre um arco de um *grande círculo*.[12] Quando as arestas de um poliedro são projetadas sobre a sua circunsfera, o resultado é um conjunto de arcos de grande círculo conhecidos como *projeção radial*. Na imagem ao lado, a coluna da esquerda mostra as projeções radiais dos sólidos platônicos com os seus grandes círculos aparecendo em linha pontilhada.

Um círculo menor que um grande círculo é chamado *círculo inferior*. Ao traçar um círculo em torno de todas as faces dos sólidos platônicos, localizados dentro de suas circunsferas, gera-se o padrão de círculos inferiores mostrados na coluna do meio da imagem. O apócrifo Livro IV dos *Elementos* de Euclides prova que, quando definidos na mesma esfera, os círculos inferiores em torno das faces do dodecaedro (*quarta linha*) são iguais aos círculos inferiores em torno das faces do icosaedro (*quinta linha*). O mesmo acontece com o cubo (*segunda linha*) e o octaedro (*terceira linha*) como um par.

Encolha os círculos inferiores que aparecem na coluna do meio até que somente se toquem um ao outro, para definir as cinco curiosidades esféricas na coluna da direita. Muitas esferas de pedra do Neolítico, encontradas na Escócia, foram esculpidas com os mesmos padrões das quatro primeiras dessas disposições (*ver página 76*). As esculturas dodecaédricas de doze círculos em uma esfera, de cerca de 4 mil anos, são os primeiros exemplos conhecidos de modelos criados pelo homem com a simetria icosaédrica.

Grandes modelos de círculo inferior podem ser feitos a partir de círculos de salgueiro ou de bambolês baratos amarrados com corda, arame ou fita.

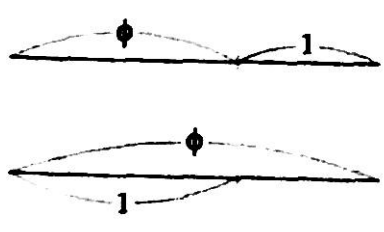


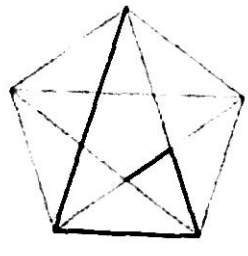
A SEÇÃO ÁUREA

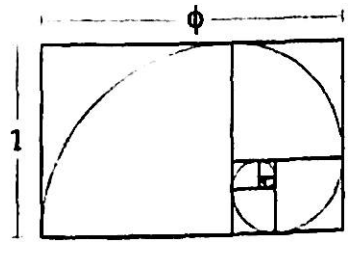
E algumas justaposições intrigantes

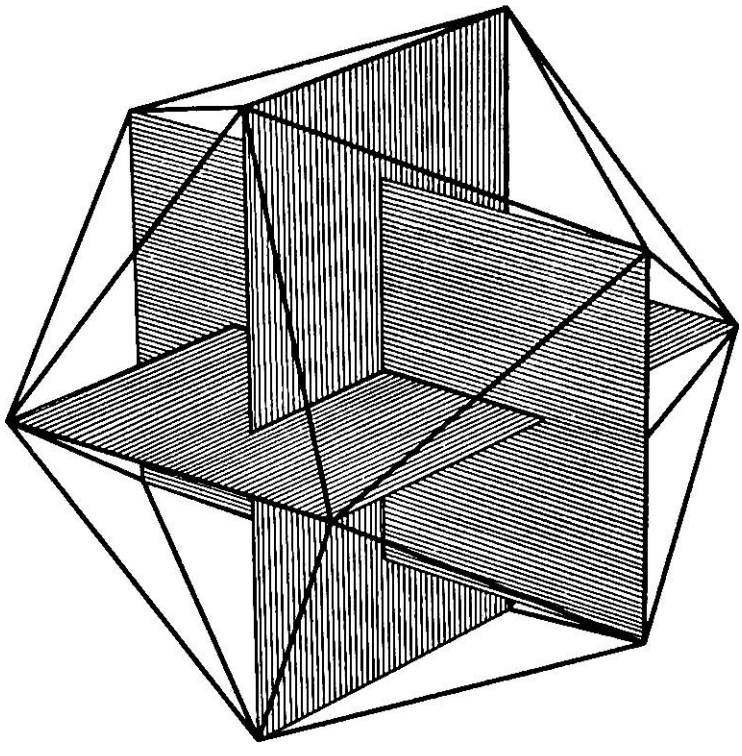
Ao dividir uma linha de modo que a parte mais curta esteja para a mais longa, proporcionalmente, assim como a parte mais longa está para a linha toda, definimos a seção áurea (*imagem abaixo*). A proporção áurea é um número irracional, inexprimível como uma fração simples (*ver páginas 56 e 383*). Seu valor é igual a um mais a raiz quadrada de cinco, dividido por dois – aproximadamente 1,618. É representada pela letra grega Φ (*phi*), ou, algumas vezes, por τ (*tau*). Φ tem ligações íntimas com a unidade; Φ multiplicado por si mesmo (Φ^2) é igual a Φ mais um (2,618...); e um dividido por Φ é igual a Φ menos um (0,618...). A proporção áurea está naturalmente relacionada com a simetria quíntupla. As linhas mais grossas do pentagrama na imagem abaixo formam uma série contínua de relações da proporção áurea.

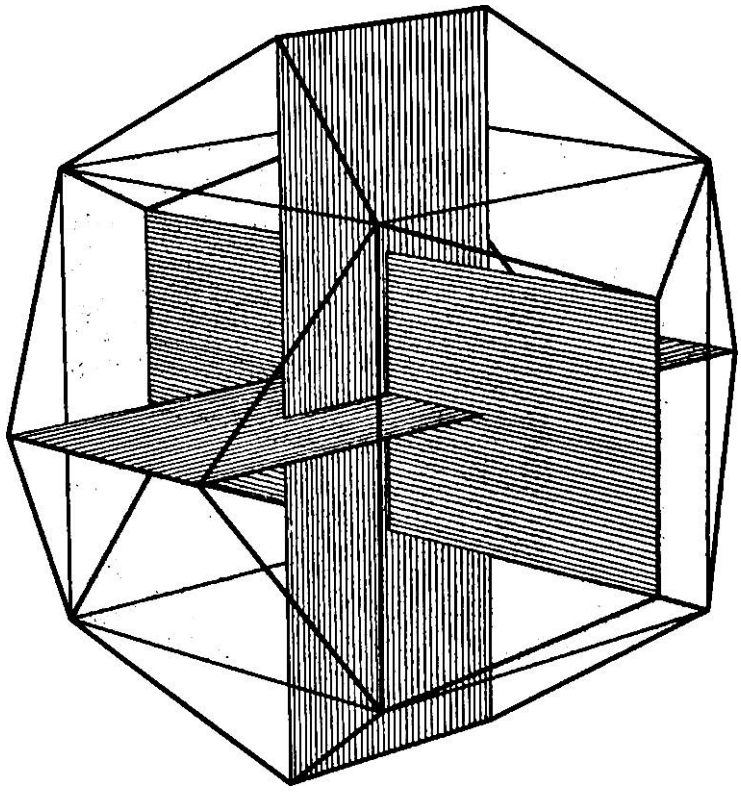
Remova um quadrado de um dos lados de um retângulo áureo, e o retângulo restante terá também lados na seção áurea. Esse processo pode continuar indefinidamente e determina uma espiral áurea (*abaixo à direita*). Surpreendentemente, os doze vértices de um icosaedro são definidos por três retângulos áureos perpendiculares (*imagem ao lado, em cima*). O dodecaedro é mais rico ainda. Doze de seus vinte vértices são definidos por três retângulos Φ^2 perpendiculares, e os oito vértices restantes são encontrados pela adição de um cubo com comprimento de aresta igual a Φ (*imagem ao lado, embaixo*).











POLIEDROS DENTRO DE POLIEDROS

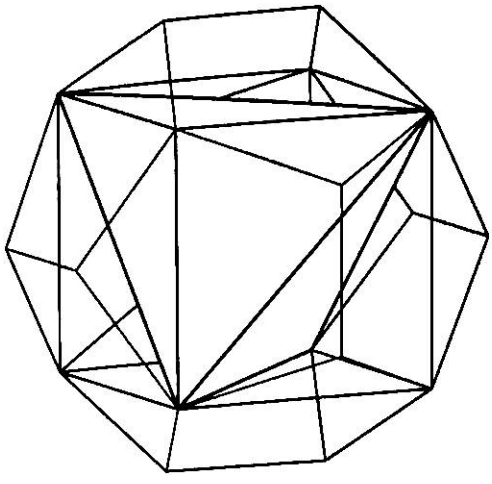
E assim continue ad infinitum

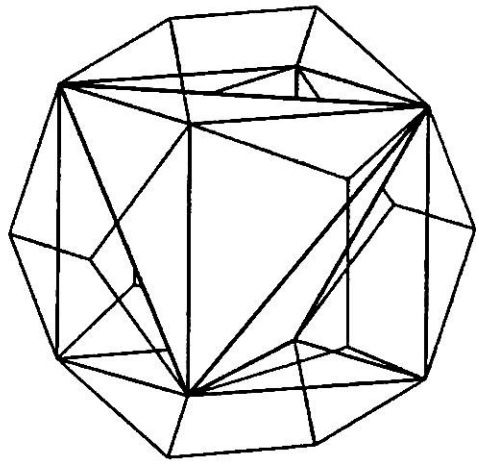
Os sólidos platônicos encaixam-se de modos notáveis e fascinantes, e o apêndice na página 382 mostra muitas dessas relações. O par superior de estereogramas na imagem ao lado mostra um dodecaedro com comprimento de aresta igual a um. Aninhados dentro dele estão um cubo, com comprimento de aresta igual a Φ, e um tetraedro com comprimento de aresta igual a $\sqrt{2}$ vezes a aresta do cubo (*ver página 383*). O tetraedro ocupa um terço do volume do cubo.

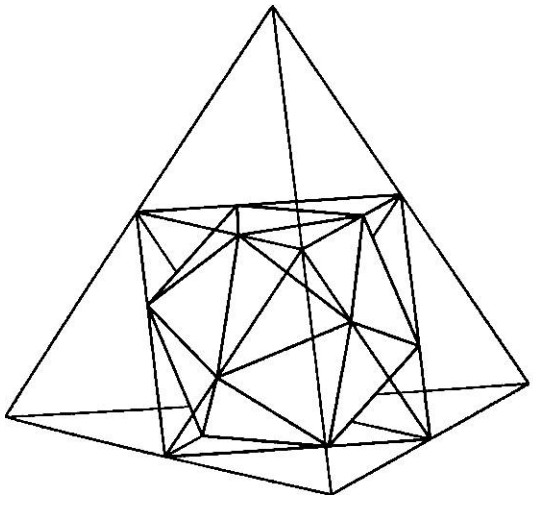
No segundo par de estereogramas, os pontos médios das seis arestas do tetraedro definem os seis vértices de um octaedro. Além de dividir pela metade as arestas do tetraedro, esse octaedro tem metade da área de sua superfície e metade de seu volume, incorporando perfeitamente a razão 1:2 da oitava musical. De modo similar, as doze arestas do octaedro correspondem aos doze vértices de um icosaedro dentro dele. Os vértices desse icosaedro cortam perfeitamente as arestas do octaedro em proporção áurea (*ver página 148 para obter instruções sobre como fazer esses estereogramas se sobressaírem em imagens 3D*).

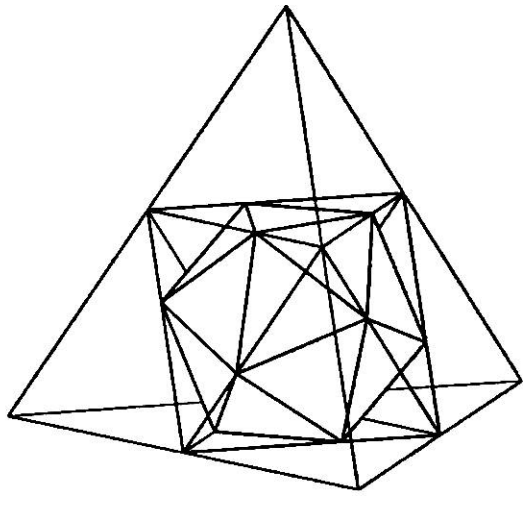
Imagine estes dois conjuntos de poliedros aninhados uns dentro dos outros combinando-se para produzir todos os cinco sólidos platônicos em um elegante arranjo. Uma vez que o dodecaedro externo define um icosaedro maior por sua relação dual, e o icosaedro interno igualmente define um dodecaedro menor, tais encaixes podem continuar, tanto para fora como para dentro, até o infinito.

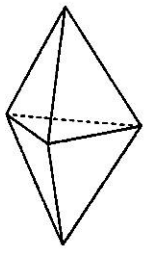
O tetraedro, o octaedro e o icosaedro, feitos inteiramente a partir de triângulos equiláteros, são *deltaedros convexos*.[13] Além destes três, há apenas outros cinco deltaedros convexos possíveis, todos apresentados na parte inferior da imagem.[14]

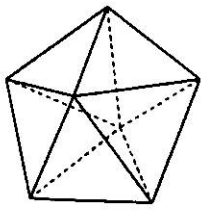


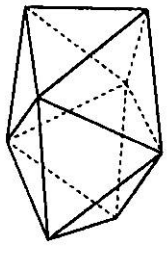


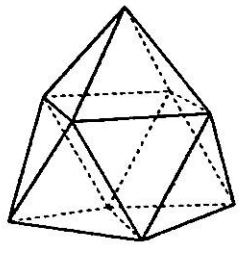


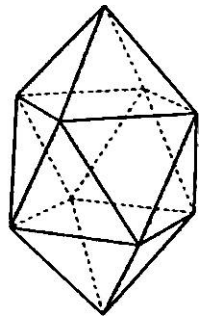












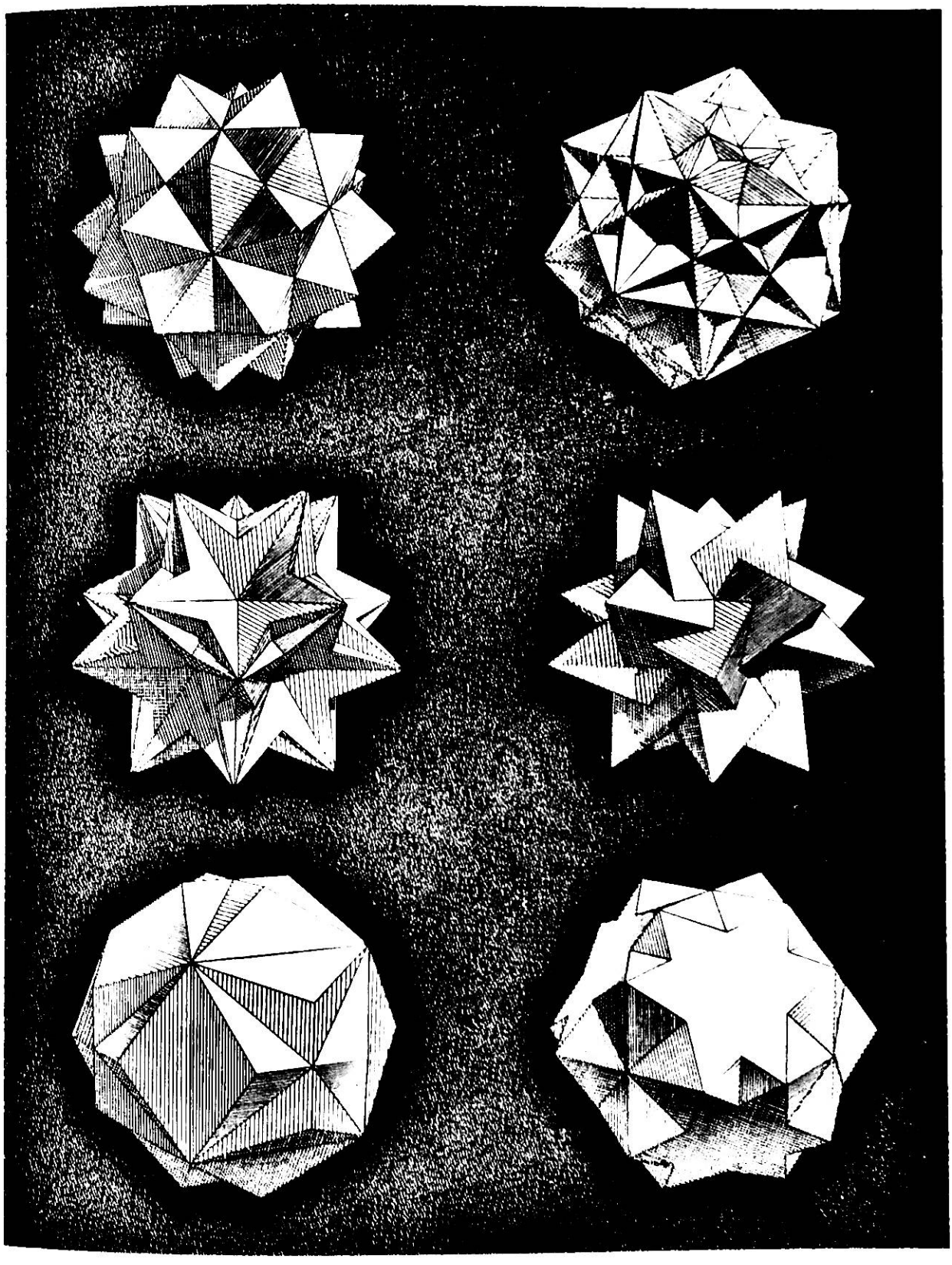
POLIEDROS COMPOSTOS

Um esforço da imaginação

As inter-relações que aparecem na página anterior geram poliedros compostos particularmente belos. Fixando a posição de um icosaedro, é possível colocar octaedros ao redor dele de cinco maneiras diferentes, gerando o composto de cinco octaedros (*canto superior esquerdo da imagem*). De forma semelhante, o cubo dentro do dodecaedro, colocado de cinco maneiras diferentes, gera o composto de cinco cubos (*canto superior direito*). O tetraedro pode ser colocado no cubo de duas maneiras diferentes para gerar o composto de dois tetraedros mostrado na página 148.

Substitua cada um dos cinco cubos no dodecaedro por dois tetraedros para gerar o composto de dez tetraedros (*centro à esquerda*). Remova cinco dos tetraedros desse composto de dez para gerar outro composto de cinco tetraedros (*centro à direita*). Isso ocorre em duas versões: direita, ou destra, e esquerda, ou sinistra. As duas versões não podem ser sobrepostas e são descritas como *enantiomorfas*[15] uma da outra. Os poliedros ou compostos com essa propriedade de "lateralidade" são descritos como quirais.[16]

Voltando ao cubo e ao dodecaedro, desta vez fixando o cubo, existem duas maneiras de colocar o dodecaedro em torno dele. O resultado de utilizarmos ambas as maneiras simultaneamente é o composto de dois dodecaedros (*canto inferior esquerdo*). Da mesma forma, o par octaedro e icosaedro gera o composto de dois icosaedros (*canto inferior direito*). Muitos outros poliedros compostos extraordinários são possíveis, como, por exemplo, o composto Bakos, formado por quatro cubos, e que é mostrado no início deste livro (página 130).



OS POLIEDROS DE KEPLER

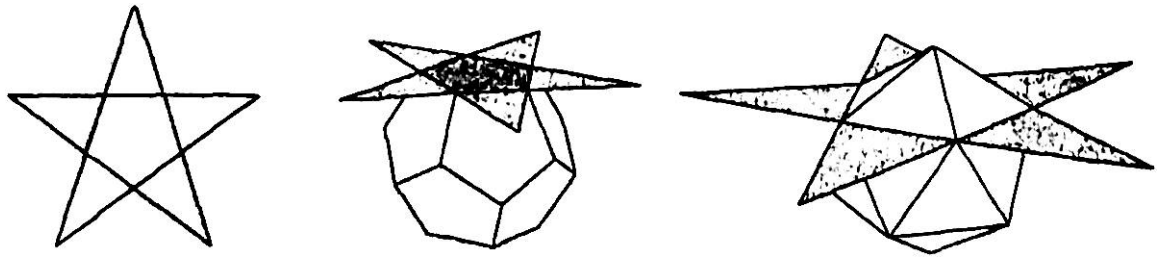
O dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado

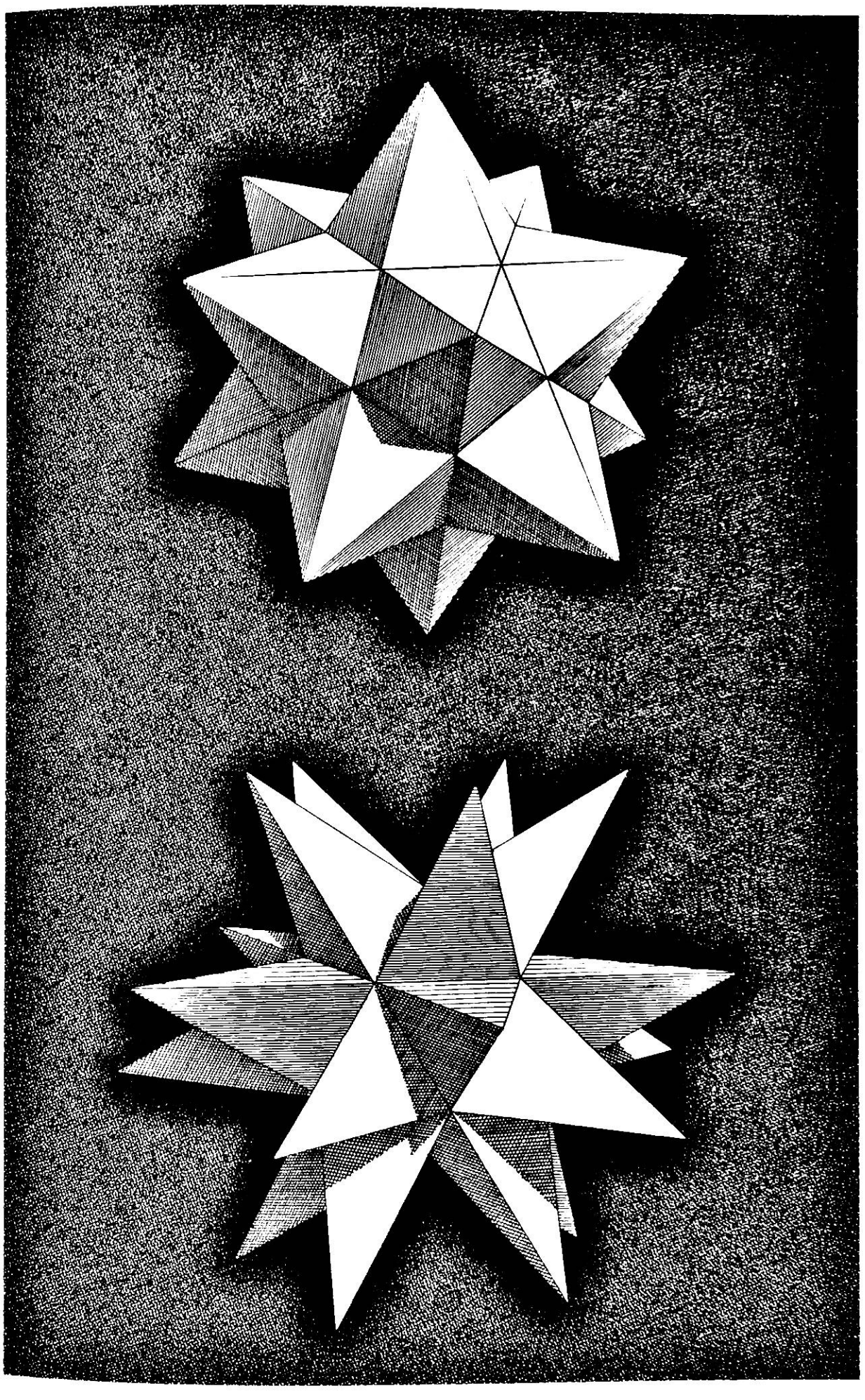
Os lados de alguns polígonos podem ser estendidos até se encontrarem novamente: o pentágono regular, por exemplo, estende-se para formar uma estrela de cinco pontas ou pentagrama (*abaixo à esquerda*). Este processo é conhecido como *estrelamento*.

Kepler sentia grande fascínio pelos poliedros (*veja, por exemplo, a página 308*) e propôs a aplicação do estrelamento neles, observando que há duas possibilidades para esse processo: por extensão das arestas e por extensão dos planos das faces. Aplicando a primeira delas ao dodecaedro e ao icosaedro (*abaixo, centro e direita*), ele descobriu os dois poliedros ilustrados na imagem ao lado e deu-lhes os nomes de ouriços icosaédricos maior e menor!

Seus nomes modernos, dodecaedro estrelado (*acima*) e grande dodecaedro estrelado (*abaixo*), revelam que esses poliedros também são resultado de dois dos estrelamentos de face do dodecaedro. Cada um deles é composto de doze faces em forma de pentagrama, um com cinco e o outro com três pentagramas para cada vértice, e sua simetria é icosaédrica.

Apesar de seus cinco lados se cruzarem, o pentagrama tem arestas e ângulos iguais em seus vértices, e assim pode ser considerado um *polígono regular não convexo*. Da mesma forma, esses poliedros podem ser considerados como *poliedros regulares não convexos*.



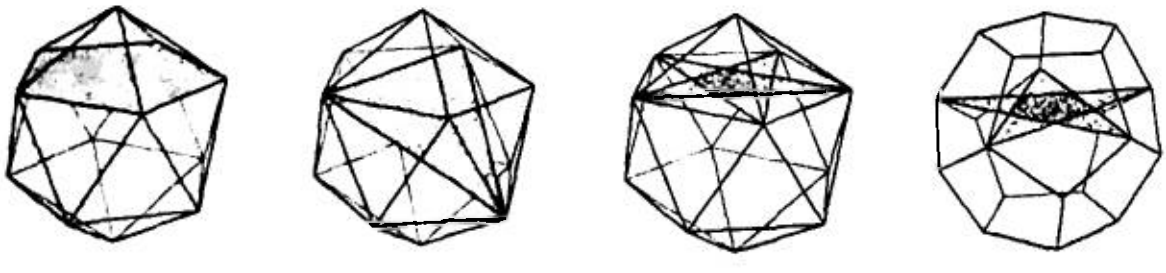


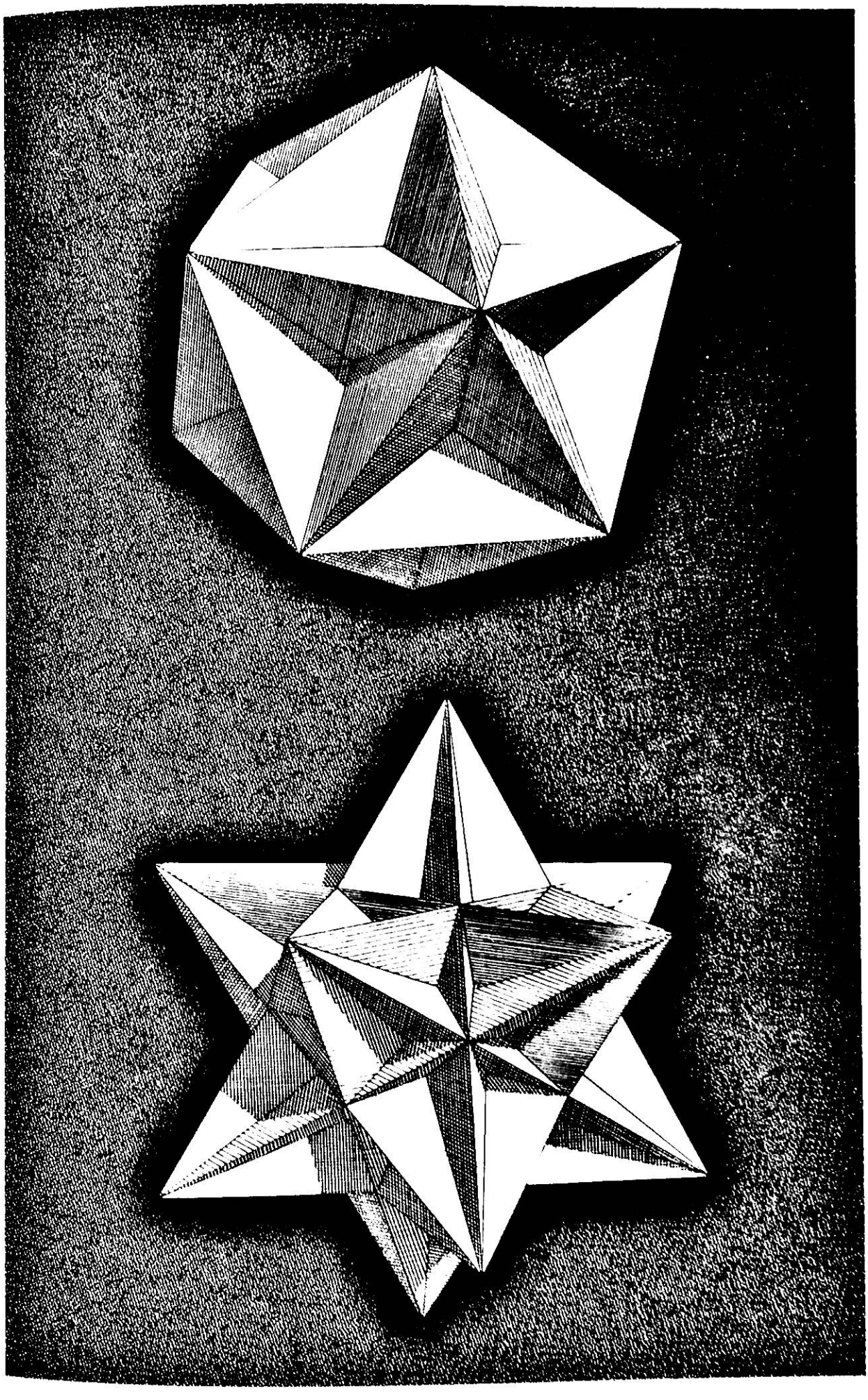
OS POLIEDROS DE POINSOT

O grande dodecaedro e o grande icosaedro

Louis Poinsot (1777-1859) investigou poliedros independentemente de Kepler e redescobriu os seus dois ouriços icosaédricos e também os dois poliedros apresentados aqui: o grande dodecaedro (*superior, ao lado*) e o grande icosaedro (*inferior, ao lado*). Ambos os poliedros têm cinco faces para cada vértice, interceptando-se uma a outra para gerar *figuras vértices* em forma de pentagrama. O grande dodecaedro tem doze faces pentagonais e é o terceiro estrelamento do dodecaedro. O grande icosaedro tem vinte faces triangulares e é um dos incríveis 58 estrelamentos possíveis do icosaedro (muitas vezes, numerados como 59, incluindo o próprio icosaedro). Esses estrelamentos também incluem os compostos de cinco octaedros, de cinco tetraedros e de dez tetraedros.

Um poliedro regular não convexo deve ter seus vértices dispostos como um dos sólidos platônicos. A união dos vértices de um poliedro para formar novos tipos de polígono dentro dele é chamada *facetamento*. As possibilidades de facetamento dos sólidos platônicos produzem os compostos de dois e de dez tetraedros, o composto de cinco cubos, os dois poliedros de Poinsot (*abaixo à esquerda*) e os dois poliedros-estrela de Kepler (*abaixo à direita*). Os quatro poliedros Kepler-Poinsot são, portanto, os únicos poliedros regulares não convexos.





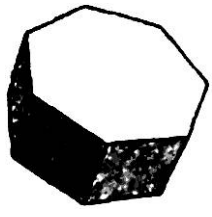
OS SÓLIDOS DE ARQUIMEDES

Treze poliedros semirregulares

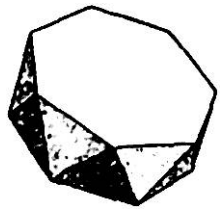
Os treze sólidos de Arquimedes (*imagem ao lado*) são o assunto de grande parte do restante deste livro. Também conhecidos como *poliedros semirregulares*, têm faces regulares de mais de um tipo, e vértices idênticos. Todos se encaixam perfeitamente dentro de uma esfera, com simetria tetraédrica, octaédrica ou icosaédrica. Embora tenham sido inicialmente atribuídos a Arquimedes, Kepler parece ter sido o primeiro, desde a Antiguidade, a descrever todo o conjunto dos treze sólidos em seu *Harmonices Mundi*.[17] Ele ainda observou os dois conjuntos infinitos de prismas regulares e antiprismas (*exemplos abaixo*) que também têm vértices idênticos e faces regulares.

Gire o topo octogonal do rombicuboctaedro em um oitavo de volta para obter o pseudorrombicuboctaedro (*abaixo*). Seus vértices, ainda que rodeados pelos mesmos polígonos regulares, são de dois tipos em relação ao poliedro como um todo.

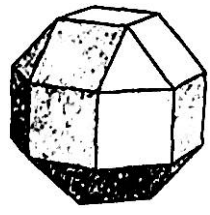
Existem 53 poliedros semirregulares não convexos, sendo um exemplo o dodecadodecaedro (*abaixo*). Juntamente com os sólidos platônicos, os sólidos arquimedianos e os poliedros Kepler-Poinsot, eles formam o conjunto de 75 *poliedros uniformes*.



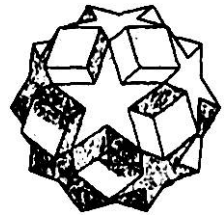
Prisma heptagonal



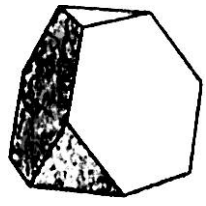
Antiprisma heptagonal



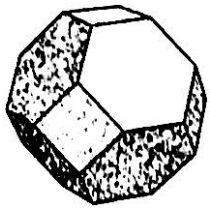
Pseudorrombicuboctaedro



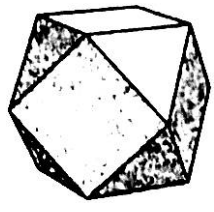
Dodecadodecaedro



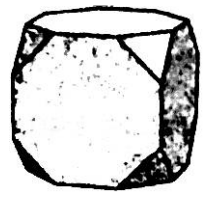
Tetraedro truncado



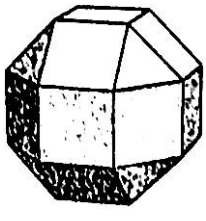
Octaedro truncado



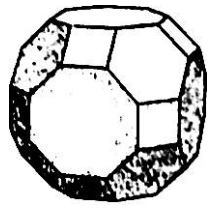
Cuboctaedro



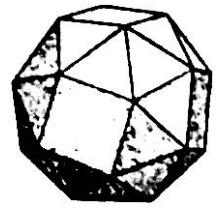
Cubo truncado



Rombicuboctaedro

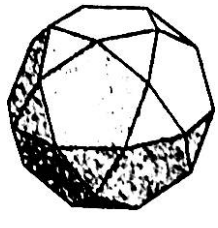


Grande rombicuboctaedro

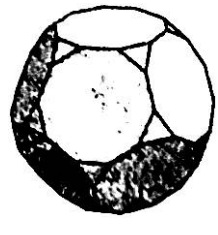


Cubo achatado

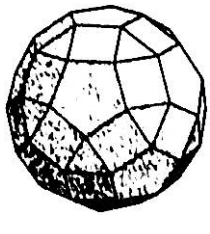
Icosaedro truncado



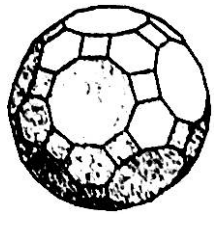
Icosidodecaedro



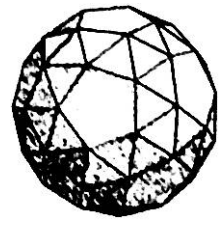
Dodecaedro truncado



Rombicosidodecaedro



Grande rombicosidodecaedro



Dodecaedro achatado

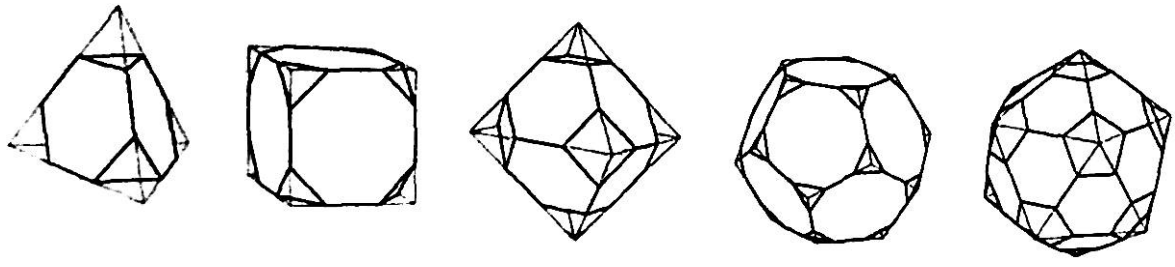
CINCO TRUNCAMENTOS

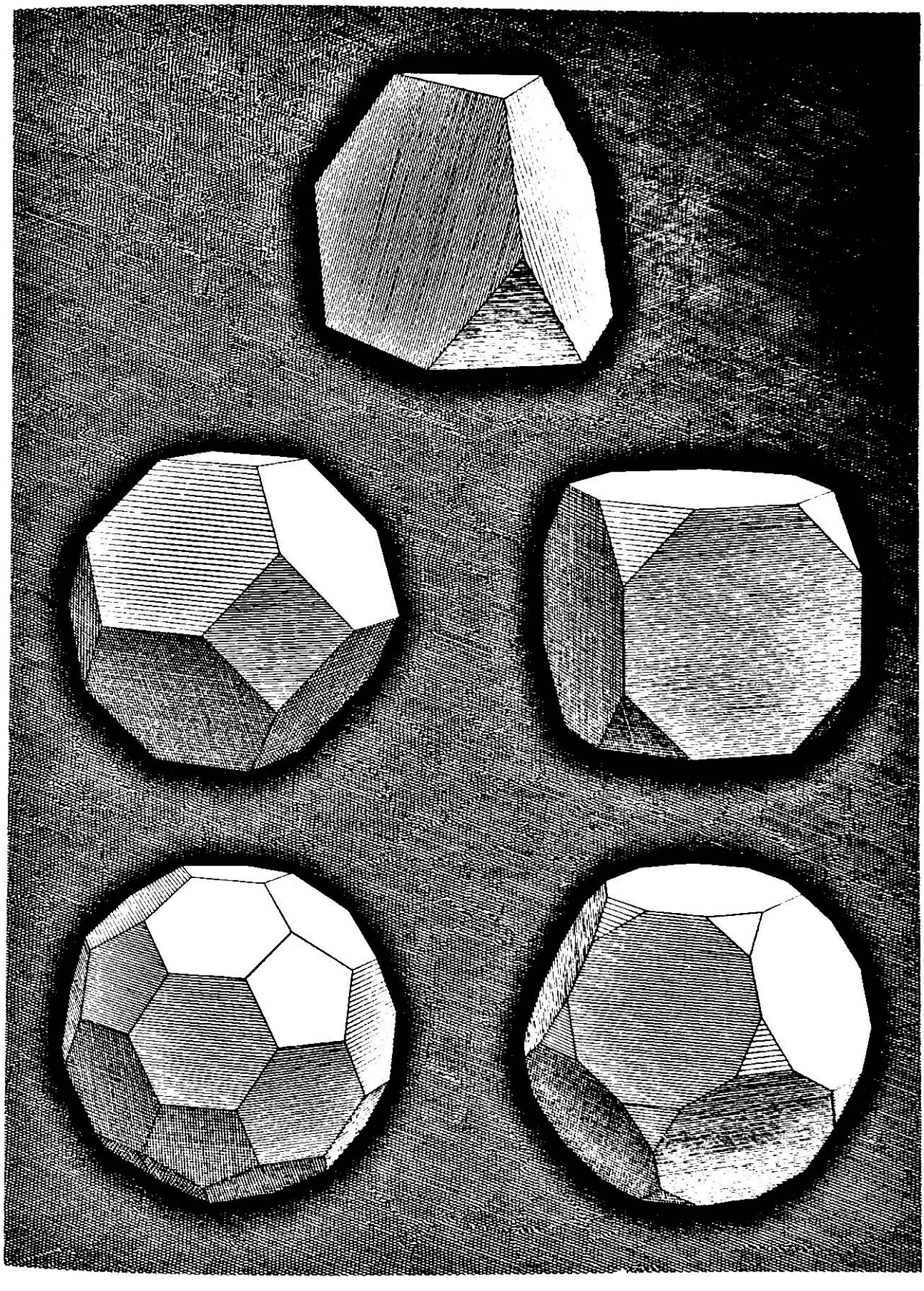
Fora com os cantos!

Ao truncarmos os sólidos platônicos, produzimos os cinco poliedros de Arquimedes de arestas iguais apresentados aqui. Esses sólidos truncados são a demonstração perfeita das figuras vértices dos sólidos platônicos: triangular para o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, quadrangular para o octaedro, e pentagonal para o icosaedro. Cada sólido arquimediano tem uma circunsfera e uma interesfera, bem como uma insfera para cada tipo de face – as faces maiores têm as menores insferas tocando os seus centros. Portanto, cada sólido truncado define quatro esferas concêntricas.

Cada um dos cinco sólidos truncados pode acomodar-se perfeitamente tanto dentro de seu sólido platônico original quanto do dual desse sólido. Por exemplo, o cubo truncado pode repousar suas faces octogonais dentro de um cubo, ou suas faces triangulares dentro de um octaedro (*na imagem abaixo*).

O octaedro truncado é o único sólido arquimediano que pode preencher o espaço com cópias idênticas de si mesmo, sem deixar lacunas. Ele também esconde um segredo menos óbvio: a união das extremidades de uma das suas arestas ao seu centro produz um ângulo central, que é igual ao ângulo agudo do famoso triângulo pitagórico 3:4:5, adorado pelos antigos construtores egípcios por definir um ângulo reto.





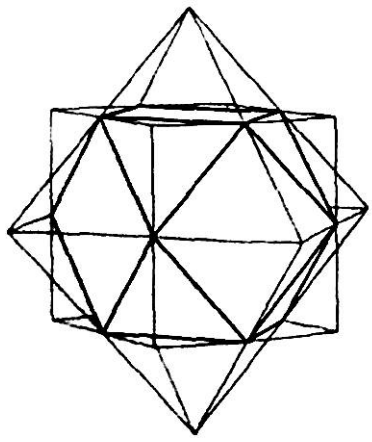
O CUBOCTAEDRO

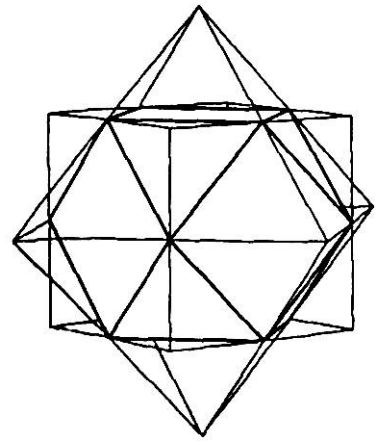
14 faces : 24 arestas : 12 vértices

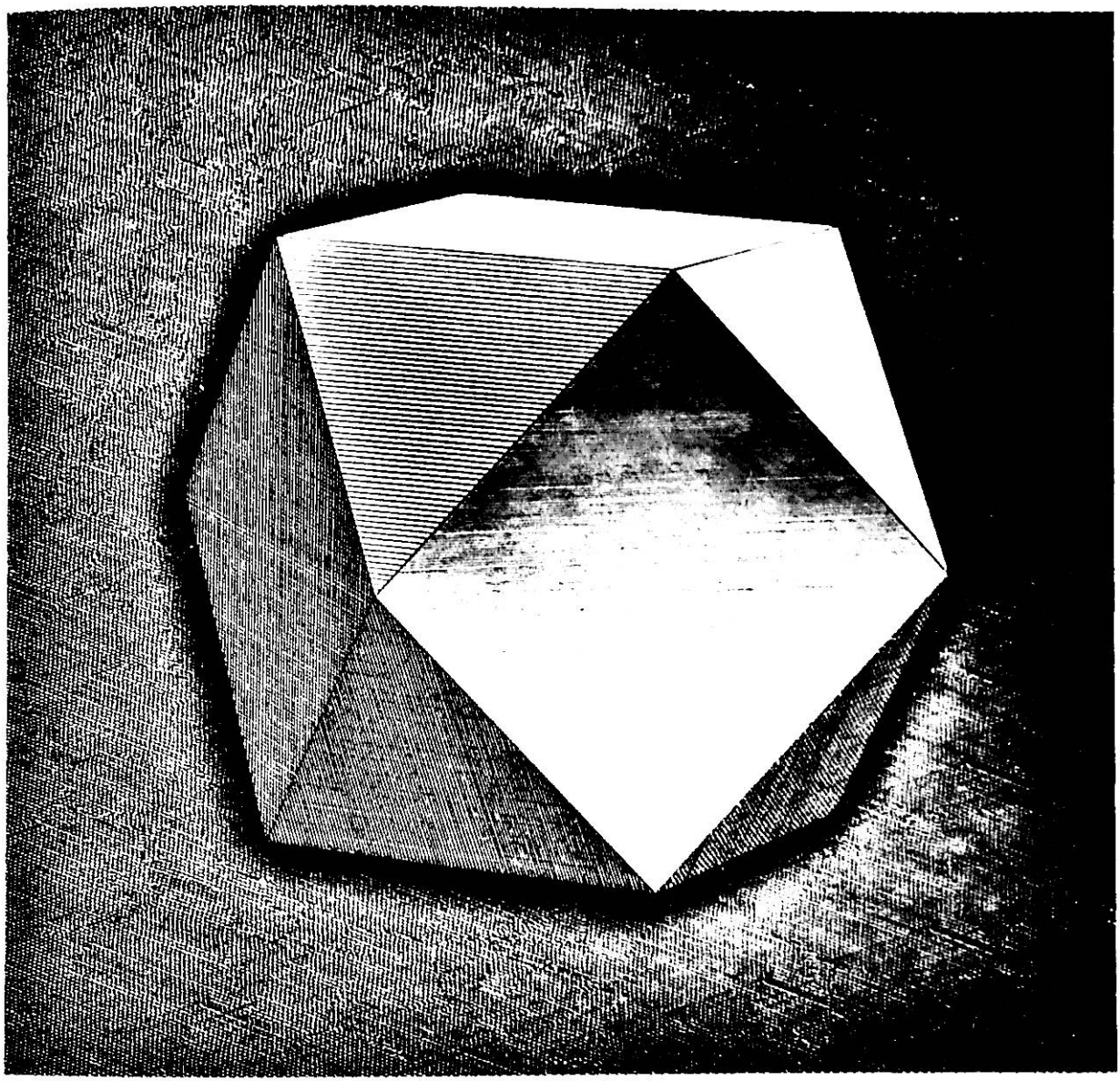
O cuboctaedro combina as seis faces quadradas do cubo com as oito faces triangulares do octaedro, e sua simetria é octaédrica. Para desenhar um cuboctaedro, unimos os pontos médios das arestas do cubo ou das arestas do octaedro (*mostrado abaixo como um par de estereogramas*). De acordo com Heron de Alexandria (10-75 d.C.),[18] Arquimedes atribuiu o cuboctaedro a Platão.

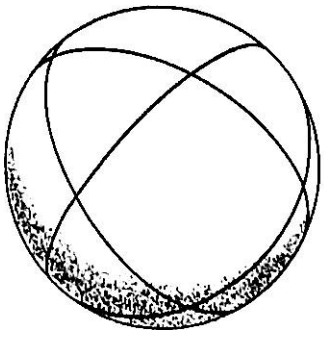
Poliedros *quase regulares*, como o cuboctaedro, são feitos de dois tipos de polígono regular, sendo cada tipo rodeado por polígonos do outro tipo. Além de definirem as faces propriamente ditas, as arestas idênticas também definem polígonos equatoriais. Por exemplo, as arestas do cuboctaedro definem quatro hexágonos regulares (*figura menor central, imagem ao lado*). As projeções radiais de poliedros quase regulares consistem inteiramente em grandes círculos completos (*canto inferior esquerdo, imagem ao lado*).

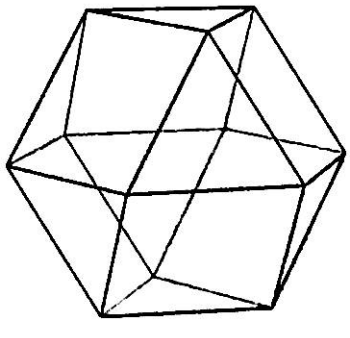
Doze esferas acomodam-se ao redor de uma décima terceira esfera idêntica para produzir um cuboctaedro (*canto inferior direito, imagem ao lado*). Os verdureiros usam este sistema para empilhar laranjas em camadas hexagonais desalinhadas. Conhecido pelos químicos como empacotamento hexagonal fechado, cada esfera é rodeada por outras doze, com os seus centros definindo uma robusta treliça de tetraedros e octaedros.

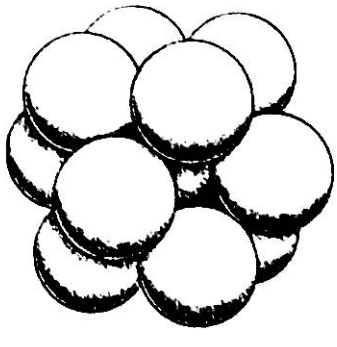










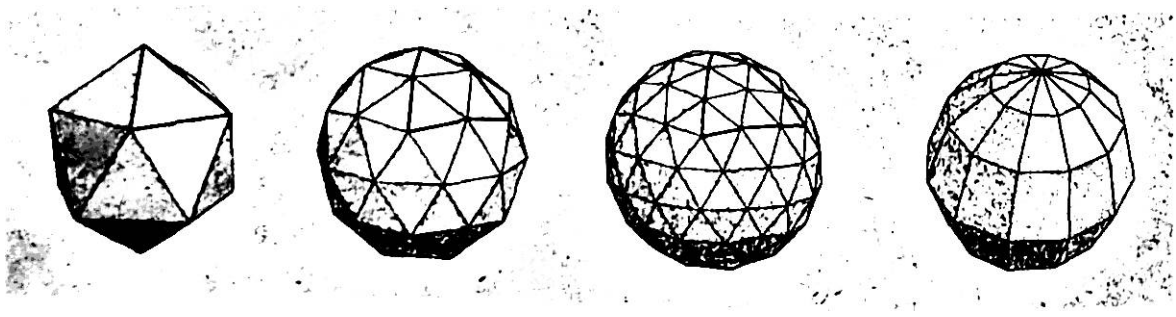


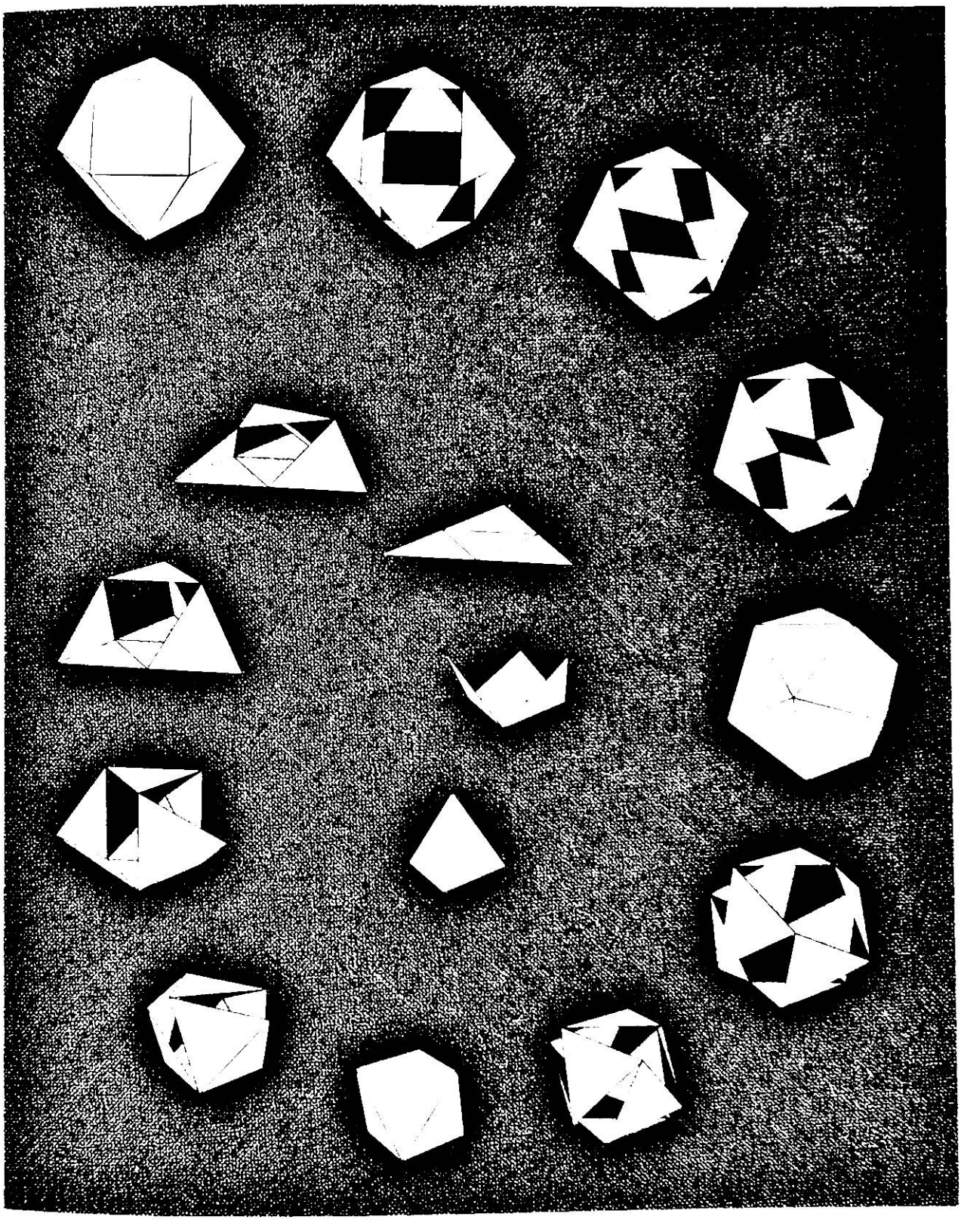
UMA HABILIDOSA TORÇÃO

E uma maravilha estrutural

Imagine um cuboctaedro feito de hastes rígidas unidas por vértices flexíveis. Esta estrutura foi chamada *jitterbug*[19] por R. Buckminster Fuller (1895-1983),[20] e aparece na imagem ao lado com as faces triangulares rígidas preenchidas para maior clareza. O *jitterbug* pode desmoronar ou fechar-se lentamente sobre si mesmo de duas maneiras, de modo que os "buracos" quadrados se tornem distorcidos. Quando a distância entre os cantos que se aproximam é igual ao comprimento da aresta dos triângulos, um icosaedro é definido. Continuando a fechar a estrutura, ela transforma-se em um octaedro. Então, se o triângulo do topo receber uma torção, a estrutura é achatada para formar quatro triângulos que, em seguida, se fecham produzindo o tetraedro (*no sentido horário, imagem ao lado*).

Os domos geodésicos são outras das descobertas estruturais de Buckminster Fuller. Eles são parte de esferas geodésicas formadas pela subdivisão das faces de um poliedro triangular, geralmente o icosaedro, em triângulos menores cujos novos vértices são, então, projetados externamente à mesma distância do centro, como os originais (*figuras abaixo*). Um parente distante da esfera geodésica é o popular poliedro renascentista de 72 lados, conhecido como esfera de Campanus (*abaixo à direita*).





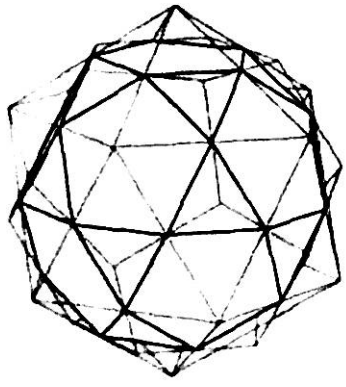
O ICOSIDODECAEDRO

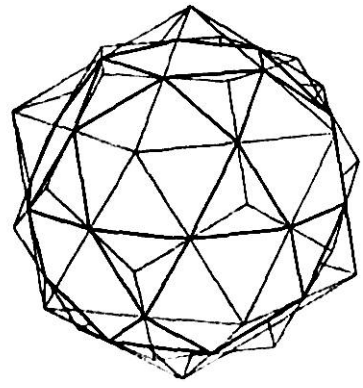
32 faces : 60 arestas : 30 vértices

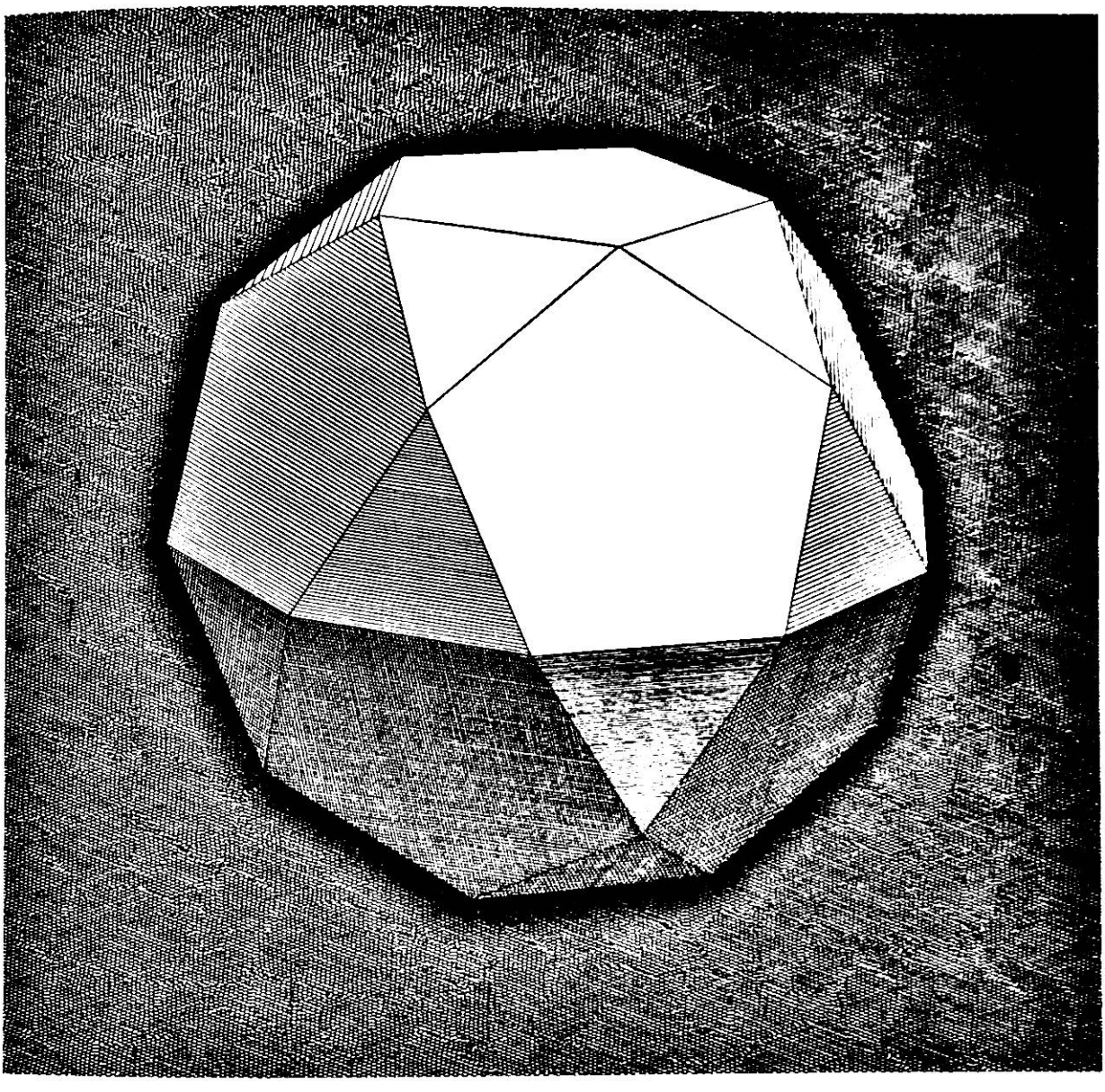
O icosidodecaedro combina as doze faces pentagonais do dodecaedro com as vinte faces triangulares do icosaedro. Unindo os pontos médios das arestas do dodecaedro ou do icosaedro, traçamos o icosidodecaedro quase regular (*ambos apresentados abaixo como um par de estereogramas*). Suas arestas formam seis decágonos equatoriais que geram uma projeção radial de seis grandes círculos (*canto inferior esquerdo, imagem ao lado*).

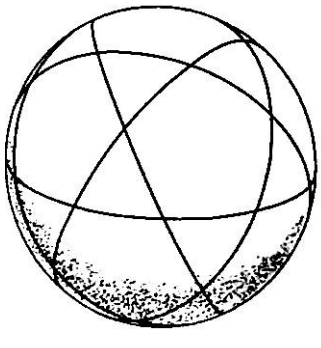
A mais antiga representação do icosidodecaedro que conhecemos é a de Leonardo da Vinci (1452-1519), que aparece na obra *De Divina Proportione*, de Frei Luca Pacioli (1445-1517).[21] Apropriadamente, o tema principal desse trabalho é a seção áurea, que é perfeitamente representada pela relação entre a aresta do icosidodecaedro e seu circunraio.

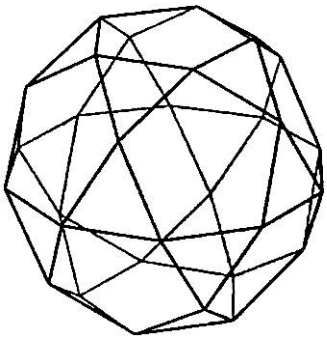
Definir o icosidodecaedro a partir de trinta esferas iguais deixa espaço para uma grande esfera central que é $\sqrt{5}$ (*ver página 383*) vezes maior do que as demais (*canto inferior direito, imagem ao lado*).

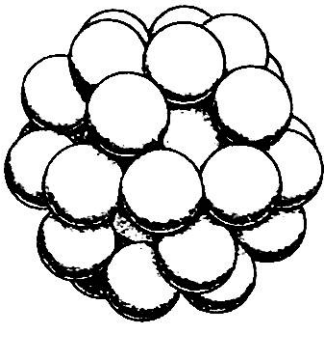












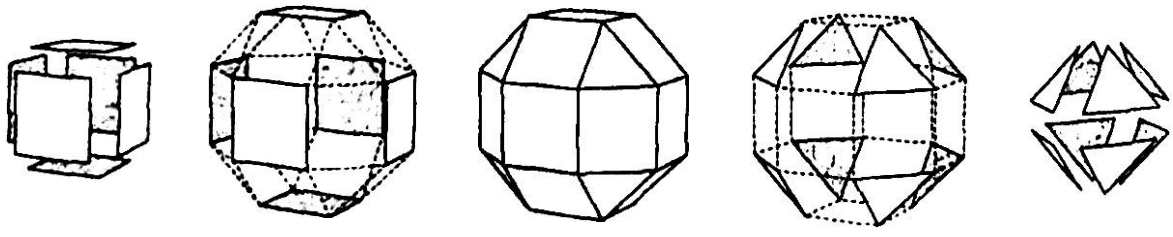
QUATRO EXPLOSÕES

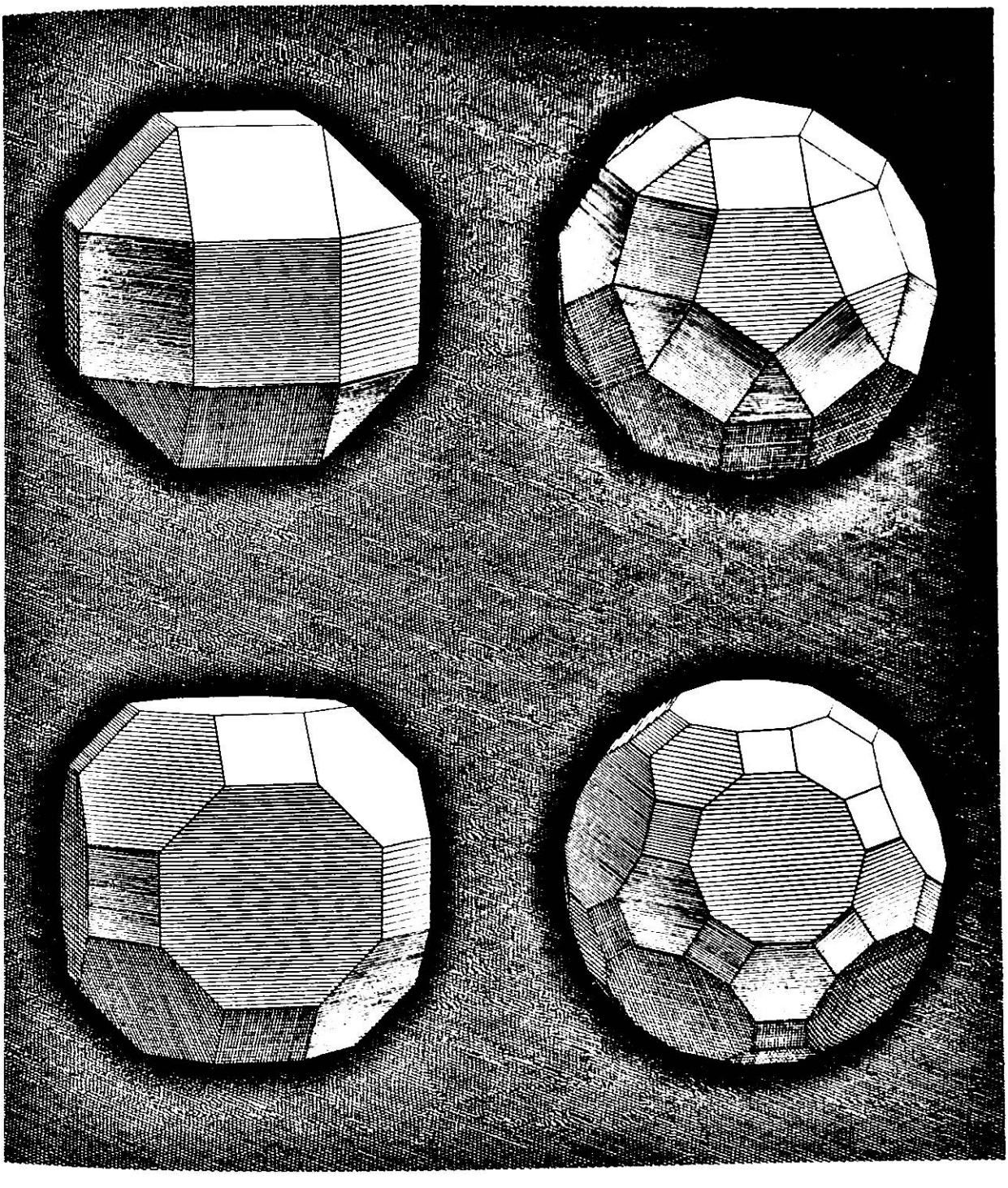
Expandindo a partir do centro

Ao explodir as faces do cubo ou do octaedro para o exterior, até que estejam separadas pela distância equivalente ao comprimento de uma aresta (*imagem abaixo*), define-se o rombicuboctaedro (*canto superior esquerdo, ao lado*). O mesmo processo aplicado ao dodecaedro ou ao icosaedro define o rombicosidodecaedro (*canto superior direito, ao lado*). As faces octogonais do cubo truncado, ou as faces hexagonais do octaedro truncado, explodem para definir o grande rombicuboctaedro (*canto inferior esquerdo, ao lado*). As faces decagonais do dodecaedro truncado, ou as faces hexagonais do icosaedro truncado, explodem para definir o grande rombicosidodecaedro (*canto inferior direito, ao lado*).

Kepler chamou o grande rombicuboctaedro de *cuboctaedro truncado*, e o grande rombicosidodecaedro de *icosidodecaedro truncado*. Os dois truncamentos a que ele se refere, contudo, não produzem faces quadradas, mas retângulos $\sqrt{2}$ e Φ, respectivamente.

Esses quatro poliedros têm planos de face em comum com o cubo, o octaedro e o dodecaedro rômbico (*ver página 181*), ou com o icosaedro, o dodecaedro e triacontaedro rômbico (*ver página 181*), donde o prefixo *rombi-* em seus nomes.





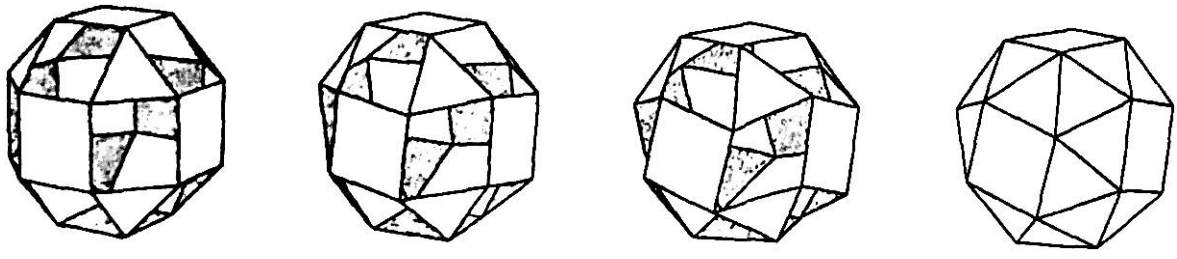
GIRANDO

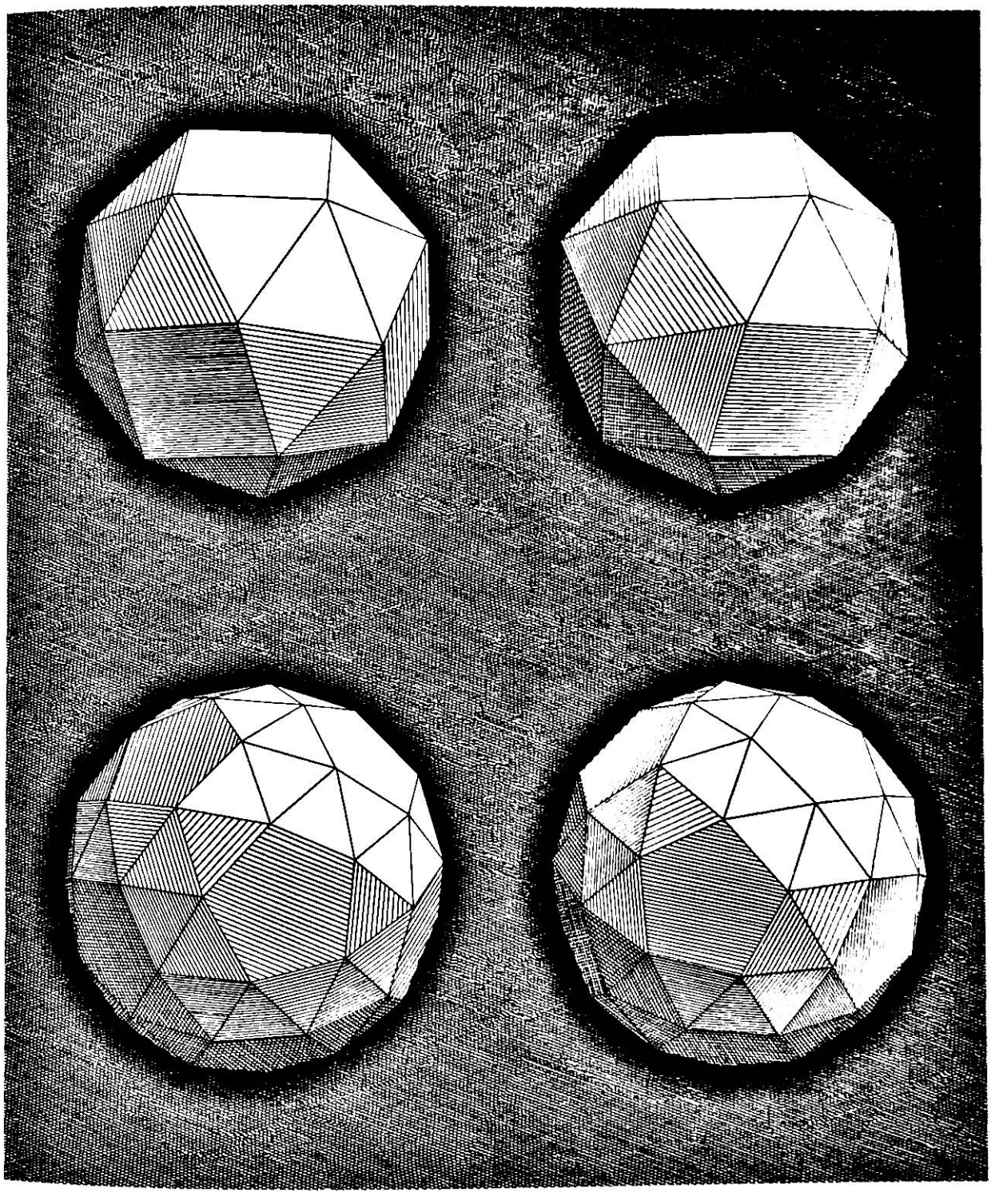
O cubo e o dodecaedro achatados

O termo "cubo achatado" (do inglês, *snub*) é uma tradução livre para *cubus simus*, nome dado por Kepler que significa, literalmente, "cubo amassado". Tanto o cubo quanto o dodecaedro achatados são *quirais*, aparecendo nas versões *destra* (em sentido horário) e *sinistra* (em sentido anti-horário). Ambas são ilustradas pela imagem ao lado, com as versões destras à direita. O cubo achatado tem simetria octaédrica, e o dodecaedro achatado tem simetria icosaédrica. Nenhum dos dois tem planos espelhados. Dos sólidos platônicos e arquimedianos, o dodecaedro achatado é o mais próximo da esfera.

O rombicuboctaedro (*página anterior*) pode ser usado para criar uma estrutura semelhante ao *jitterbug* (*ver página 171*). A aplicação de uma torção a essa nova estrutura produz o cubo achatado (*abaixo*). Torcendo para um lado, produzimos a versão destra e, para o outro, a versão sinistra. Existe uma relação correspondente entre o rombicosidodecaedro e o dodecaedro achatado.

Até aqui, os cinco sólidos platônicos foram truncados, combinados, explodidos e torcidos para produzir os treze sólidos de Arquimedes. O espaço tridimensional está revelando sua complexidade, sutileza e ordem. Que outras maravilhas nos aguardam?



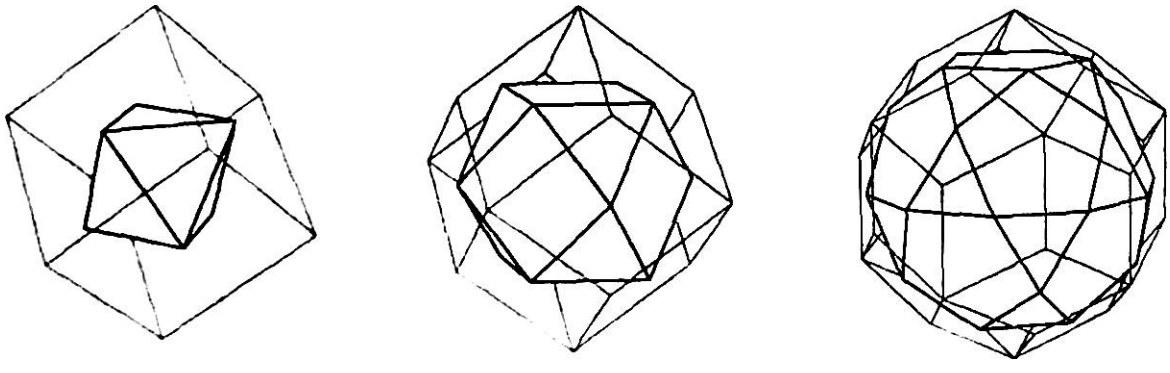


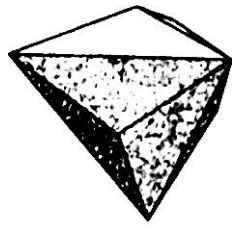
OS DUAIS DE ARQUIMEDES

Tudo tem o seu oposto

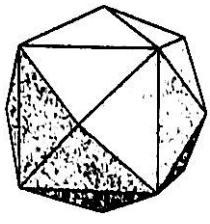
Os duais dos sólidos de Arquimedes foram primeiramente descritos como um grupo por Eugène Charles Catalan (1814-1894), e estão posicionados na imagem ao lado de modo a mostrar a correspondência com os seus parceiros da página 165. Para criar o dual de um sólido arquimediano, prolongue linhas perpendiculares, a partir dos pontos médios de suas arestas, tangenciando a interesfera do sólido. Essas linhas são as arestas do dual; os pontos onde elas se cruzam primeiro são seus vértices. Os sólidos arquimedianos possuem um tipo de vértice e diferentes tipos de faces; portanto, seus duais possuem um tipo de face, mas diferentes tipos de vértices.

Os dois sólidos arquimedianos quase regulares, o cuboctaedro e o icosidodecaedro, possuem duais rômbicos que foram descobertos por Kepler. Os compostos de pares duais platônicos (*páginas 148, 168 e 172*) definem as diagonais de face desses poliedros rômbicos, que estão na proporção $\sqrt{2}$ para o dodecaedro rômbico e na proporção Φ para o triacontaedro rômbico. Kepler percebeu que as abelhas terminam suas células de favo de mel hexagonais com três desses losangos $\sqrt{2}$. Também descreveu os três pares duais que envolvem sólidos quase regulares (*abaixo*), em que o cubo é visto como um sólido rômbico, e o octaedro, como um sólido quase regular.

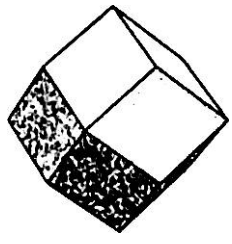




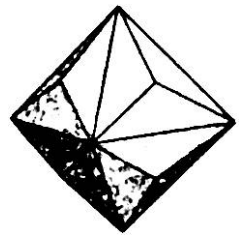
Tetraedro triakis



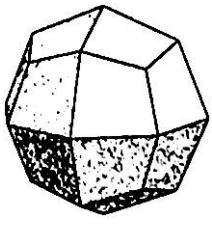
Hexaedro tetrakis



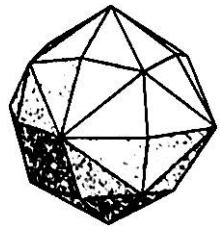
Dodecaedro rômbico



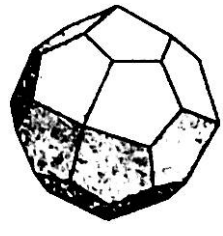
Octaedro triakis



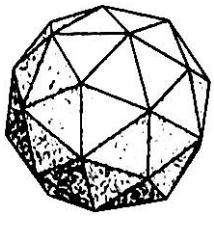
Icositetraedro trapezoidal



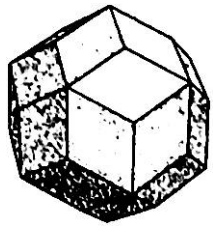
Dodecaedro disdiakis



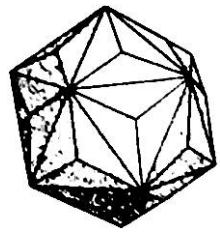
Icositetraedro pentagonal



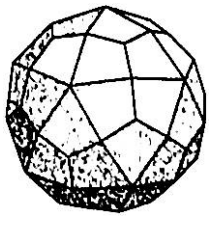
Dodecaedro pentakis



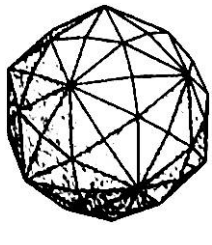
Triacontaedro rômbico



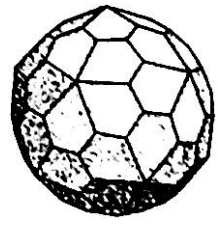
Icosaedro triakis



Hexecontaedro trapezoidal



Triacontaedro disdiakis



Hexecontaedro pentagonal

MAIS EXPLOSÕES

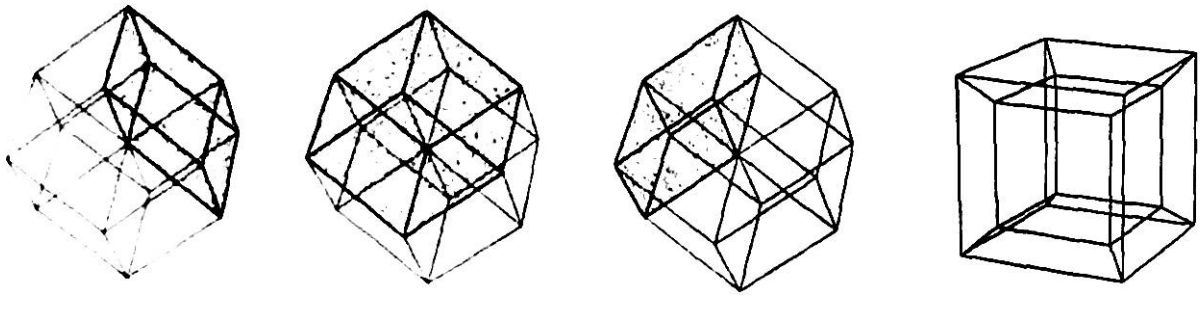
E dimensões não percebidas

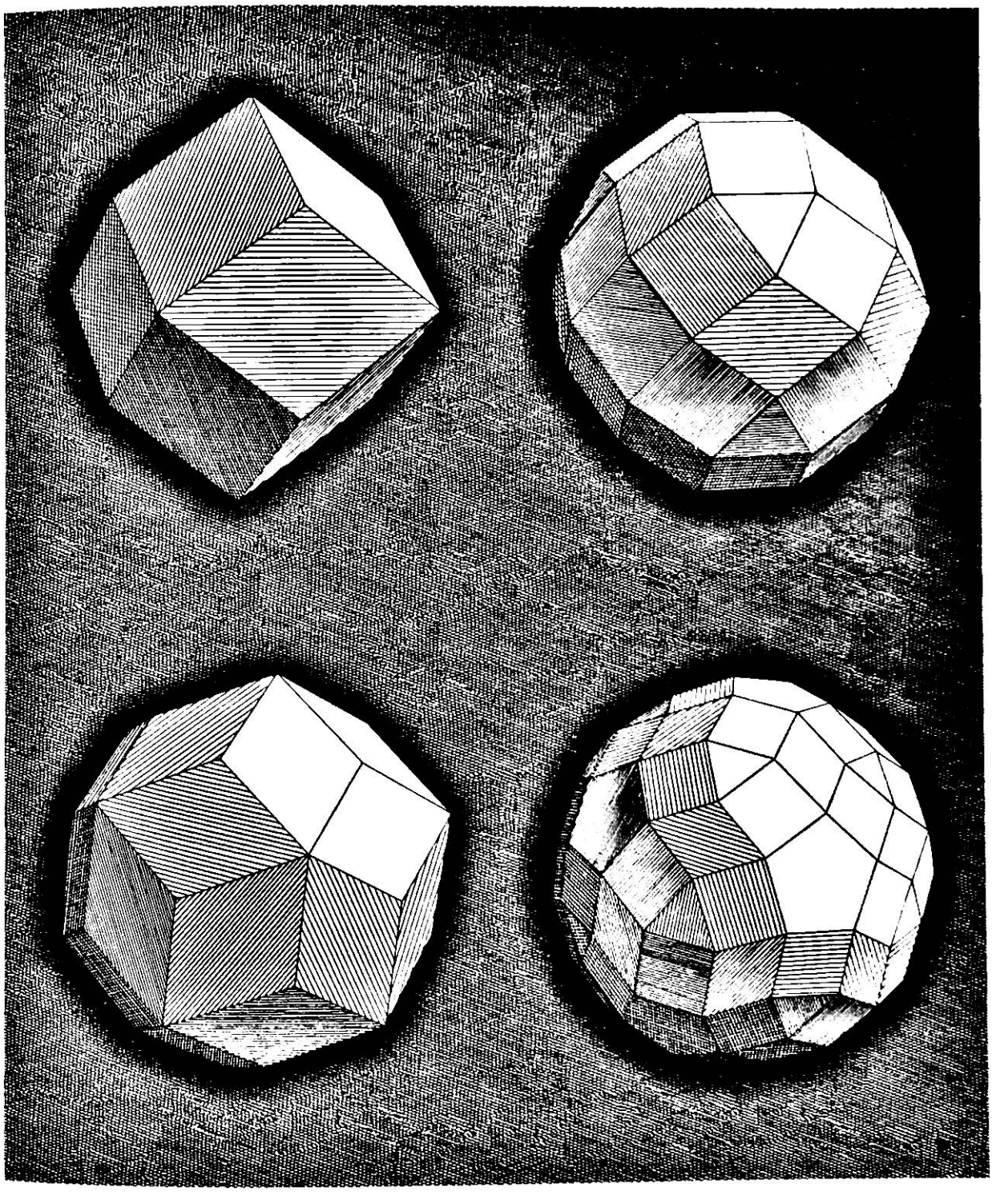
Explodir o dodecaedro rômbico ou o seu dual, o cuboctaedro, resulta em um poliedro convexo de arestas iguais com cinquenta faces (*canto superior direito, imagem ao lado*). Enquanto isso, o triacontaedro rômbico explodido, que é idêntico a um icosidodecaedro explodido, tem cento e vinte e duas faces (*canto inferior direito, imagem ao lado*).

Ludwig Schläfli (1814-1895)[22] demonstrou que há seis *polítopos* (generalizações de poliedros) regulares quadridimensionais: o de cinco células[23] feito de tetraedros; o de oito células, ou *tesserato*, feito de cubos; o de dezesseis células feito de tetraedros; o de vinte e quatro células feito de octaedros; o de cento e vinte células feito de dodecaedros; e o de seiscentas células feito de tetraedros.

O dodecaedro rômbico é uma sombra tridimensional do tesserato quadridimensional, análogo ao hexágono como uma sombra bidimensional do cubo. Em um cubo, dois quadrados encontram-se em cada aresta. Em um tesserato, três quadrados encontram-se em cada aresta (*figura abaixo à direita*). Através da mesma aresta, os quadrados definem três cubos (*sombreados abaixo, com uma projeção do tesserato alternativa*).

Schläfli também demonstrou que, em cinco ou mais dimensões, os únicos polítopos regulares são o *simplex*, ou tetraedro generalizado, o *hipercubo*, ou cubo generalizado, e o *orthoplex*,[24] ou octaedro generalizado.





Notas da Tradutora

[1] Do grego *polyédros* ou *polúedros* (a grafia varia conforme o etimologista), que significa "de vários lugares ou degraus, que tem muitas faces".

[2] Esta descrição se refere aos três modos de visualização de um sólido platônico, com uma de suas partes constituintes em destaque (para a frente): primeiro, as *arestas*; em seguida, as *faces*; e, por último, os *vértices*. As figuras que os exemplificam aparecerão sempre nesta ordem até o final deste livro.

[3] A *esfera circunscrita* ou *circunsfera* (em inglês, *circumscribed sphere* ou *circumsphere*) de um poliedro é a esfera cuja superfície contém todos os vértices do poliedro. Todos os poliedros regulares possuem uma circunsfera, mas o mesmo não pode ser dito da maioria dos poliedros irregulares.

[4] Do inglês *midsphere* ou *intersphere*, é a esfera que está entre a esfera *circunscrita* e a *esfera inscrita*. O nome parece ter sido adaptado para o português a partir de outras línguas latinas como o italiano e o espanhol, pois não se encontra nos dicionários tradicionais de língua portuguesa, mas apenas em obras que tratam de geometria e dos sólidos platônicos.

[5] Ponto em que uma linha vertical imaginária passando por um lugar qualquer encontra a esfera celeste acima do horizonte.

[6] Ponto da abóbada celeste oposto ao zênite.

[7] Construção cúbica considerada pelos muçulmanos o local mais sagrado do mundo.

[8] Todo poliedro limita uma região do espaço chamada *interior* deste poliedro. Dizemos que um poliedro é *convexo* se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Em um poliedro convexo, toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. Referência: E. L. Lima et al., *A Matemática do Ensino Médio* (*Coleção do Professor de Matemática*). Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[9] Trata-se do equivalente tridimensional do ângulo ordinário e, por isso, pode ser definido como a elevação ao quadrado dos graus ordinários. Se um ângulo plano é determinado quando duas semirretas se encontram em um vértice, o ângulo sólido será determinado por uma figura tridimensional que tem sua origem também em um ponto. Em outras palavras, visto do centro de uma esfera, esse ângulo percorre dada área sobre a superfície dessa esfera. A unidade de medida de um ângulo sólido é o *esferorradiano* (símbolo: sr), que é equivalente ao *radiano* (razão entre o comprimento de um arco e o seu raio) elevado ao quadrado.

[10] Esta relação entre o número de faces (F), de vértices (V) e de arestas (A) de um poliedro, descoberta pelo matemático suíço, leva o seu nome – *Relação de Euler* – e pode ser expressa da seguinte forma: $F + V = A + 2$.

[11] Diagrama, quadro ou desenho que representa objetos de modo a dar a impressão de tridimensionalidade ou relevo.

[12] Também chamado *círculo máximo*, é o círculo traçado sobre a superfície de uma esfera com o mesmo perímetro de sua circunferência, ou seja, é o círculo de maior diâmetro que pode ser traçado sobre essa superfície.

[13] O nome *deltaedro* vem da letra maiúscula grega Δ, que tem a forma de um triângulo equilátero.

[14] Na ordem em que aparecem, da esquerda para a direita: *bipirâmide triangular* (seis faces), *bipirâmide pentagonal* (dez faces), *biesfenoide romo* (doze faces), *prisma triangular triaumentado* (quatorze faces) e *bipirâmide quadrada giralongada* (dezesseis faces).

[15] Palavra com origem no grego antigo, a partir de *enantios*, que significa "oposto", e *morphê*, que significa "forma". Refere-se àquilo que é relativo ou pertencente ao *enantiomorfismo* ou que o apresenta. O enantiomorfismo é definido como a simetria de dois objetos que não se podem sobrepor. Assim, um par de elementos é *enantiomorfo* quando eles são opostamente simétricos (como um par de luvas, por exemplo). Um exemplo bem simples é uma imagem formada no espelho: enquanto se levanta a mão direita, a imagem refletida levanta a mão esquerda.

[16] Do grego *kheir*, que significa "mão", este termo é usado em química, física e matemática para definir elementos que não podem ser sobrepostos à sua própria imagem especular. Por isso, um objeto quiral e a sua imagem especular são designados *enantiomorfos* e, no caso de moléculas, *enantiomeros*. A *quiralidade* é uma

propriedade de assimetria importante em vários ramos da ciência, como, por exemplo, *a estereoquímica*, que é o ramo da química que estuda a disposição espacial das moléculas.

[17] A obra *Harmonices Mundi – A Harmonia do Mundo*, em português – foi escrita em latim em 1619 e considerada por Kepler como seu trabalho mais importante. Discute a harmonia e o *conceito de congruência* em relação a diversas categorias do domínio físico: regularidades em geometria tridimensional, as relações entre diferentes espécies de magnitude, os princípios da harmonia na música e a organização do sistema solar. Kepler dividiu esta obra em cinco grandes capítulos: o primeiro é sobre polígonos regulares; o segundo, sobre a congruência de figuras; o terceiro, sobre a origem de proporções harmônicas na música; o quarto trata das configurações harmônicas em astrologia; e o quinto, da harmonia dos movimentos planetários. No Brasil, um exemplar da primeira edição do *Harmonices Mundi* foi incorporado ao acervo de obras raras da Biblioteca Nacional e, após o término do processo de restauro e higienização, estará disponível para consulta (segundo nota publicada no jornal *O Globo* em 28/03/2012). Para saber mais: Johannes Kepler, *The Harmony of the World*. Philadelphia, The American Philosophical Society, 1997; Johannes Kepler, *Harmonies of the World (On the Shoulders of Giants, Book 5)*. Ed. Stephen Hawking. Philadelphia, Running Press, 2005.

[18] Matemático e engenheiro da Grécia antiga, considerado o maior pesquisador da Antiguidade, com uma obra que representa a tradição científica helenística. Entre suas invenções mais famosas, está uma roda movida pelo vento, a qual é o primeiro exemplo conhecido no Ocidente de aproveitamento de energia eólica em terra. Muitos de seus escritos originais e desenhos se perderam, mas algumas de suas obras foram conservadas em manuscritos árabes. Referência: Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*. Vol. 2. Oxford, Clarendon Press, 1921.

[19] Nome dado a certo tipo de dança norte-americana extravagante que envolve movimentos descontrolados e não necessita de nenhum conhecimento prévio. A palavra foi inicialmente utilizada, no começo da década de 1920, como uma gíria para descrever alcoólatras que sofriam de excessiva agitação (em inglês, *jitters*), como, por exemplo, o *delirium tremens* (geralmente, provocado pela abstinência). Somente depois, foi associada à dança, e tornou-se popular quando Cab Calloway gravou, em 1934, a música "Call of the Jitter Bug".

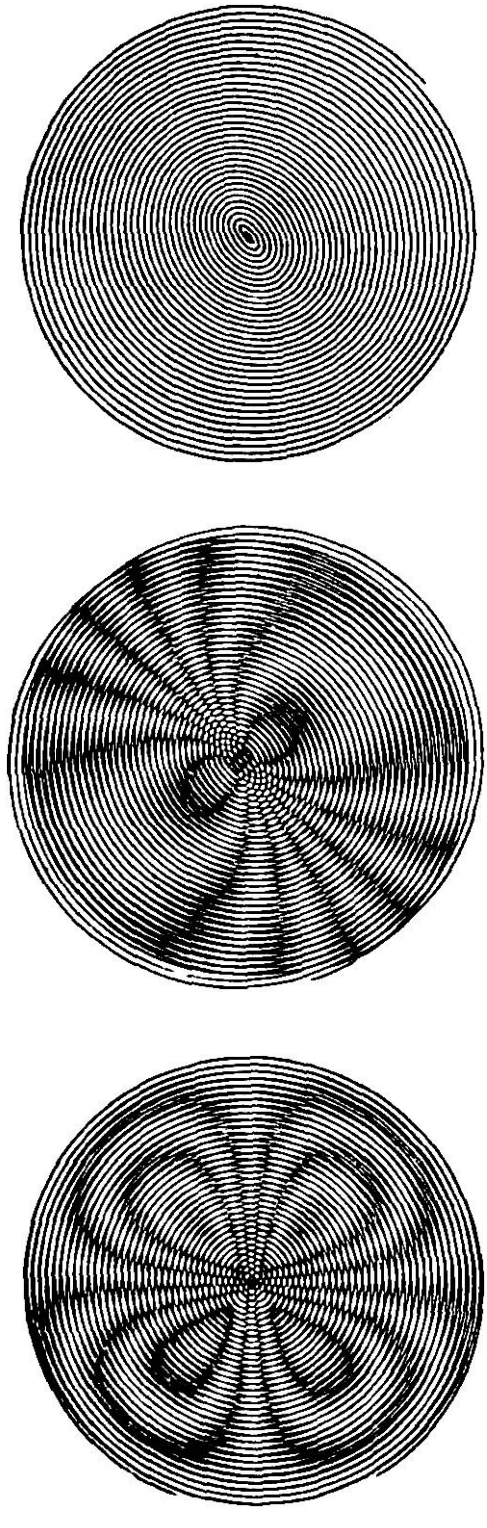
[20] De acordo com o Buckminster Fuller Institute, criado em 1983 e localizado atualmente na cidade de Nova York, Richard Buckminster Fuller – engenheiro, arquiteto e inventor americano – foi um visionário que demonstrava suas ideias através de invenções chamadas por ele "artefatos", sendo a mais famosa delas a *cúpula geodésica*. Muitos de seus trabalhos envolveram problemas relacionados à moradia, ao transporte, à educação, à energia, à destruição ecológica e à pobreza, entre outros. Escreveu 28 livros, registrou um número igual de patentes, e, apesar de sua cúpula geodésica ter sido reproduzida mais de 300 mil vezes ao redor do mundo, parece que seu maior legado é sua contínua influência sobre inúmeros *designers*, arquitetos, cientistas e artistas que trabalham para criar ambientes mais sustentáveis no planeta.

[21] Luca Bartolomeo de Pacioli, nascido em Borgo Sansepolcro, na região da Toscana, foi um matemático italiano, humanista e frade franciscano que colaborado com Leonardo da Vinci e ficou famoso por suas obras no campo hoje conhecido como *contabilidade*. O opúsculo *De Divina Proportione* foi escrito em 1498 e editado onze anos depois, em 1509, sendo impresso em Veneza, nessa época o centro de tipografia e comércio livreiro da Itália. Nessa obra, encontra-se, além do icosidodecaedro, a primeira ilustração conhecida do *rombicuboctaedro*, também de Da Vinci. Referência: Antonio Lopes de Sá, *Luca Pacioli: Um Mestre do Renascimento*. Brasília, Fundação Brasileira de Contabilidade, 2004.

[22] Geômetra suíço e analista complexo (de algo que, na época, se chamava Teoria da Função) que foi uma das figuras-chave no desenvolvimento da noção de *espaços dimensionais superiores*. O conceito de multidimensionalidade, desde então, passou a desempenhar papel central na física. Referência: *Complete Dictionary of Scientific Biography*. Editores: Vol. 1-16, Charles Coulston Gillispie; Vol. 17-18, Frederic L. Holmes; Vol. 19-26, Noretta Koertge. Nova York, Charles Scribner's Sons, 2007.

[23] Célula é o nome dado a uma face tridimensional que consiste em um poliedro, assim como uma face bidimensional consiste em um polígono, e uma face unidimensional (linha) é chamada aresta.

[24] Também chamado *hiperoctaedro*.

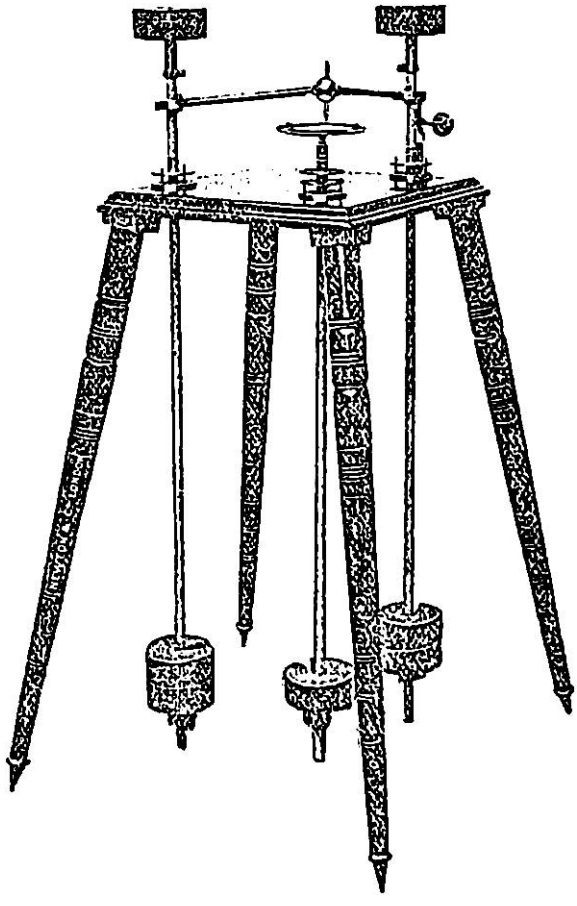


Uníssono (1:1): uma espiral (superior), uma espiral desenhada da mesma forma sobre outra espiral (central), e uma espiral desenhada para o lado oposto sobre outra espiral (inferior).

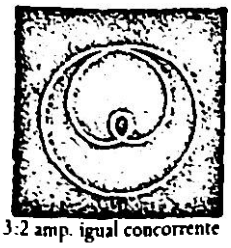
L I V R O I V

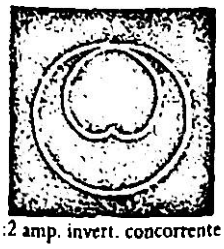
HARMONÓGRAFO

Um Guia Visual para a Matemática da Música

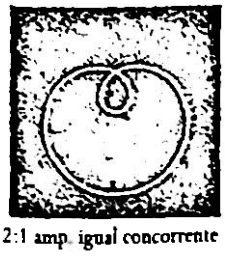


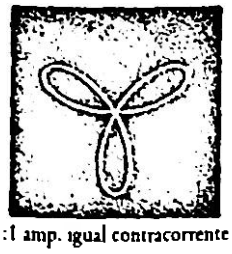
Anthony Ashton

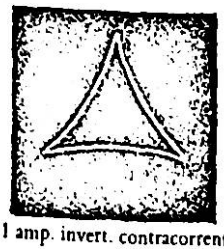

3:2 amp. igual concorrente

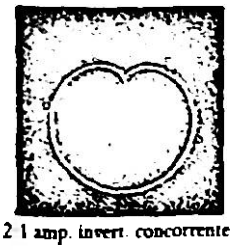

3:2 amp. invert. concorrente

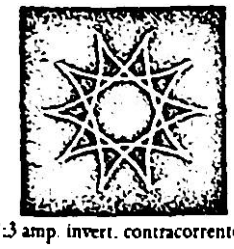
3:2 amp. invert. contracorrente

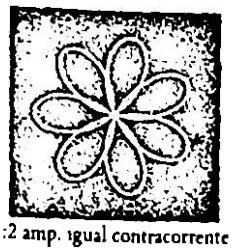

2:1 amp. igual concorrente


2:1 amp. igual contracorrente

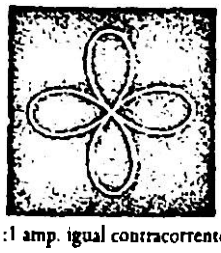

2:1 amp. invert. contracorrente

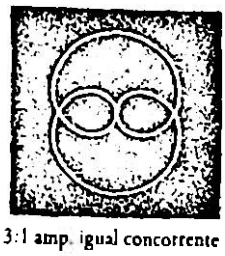

2:1 amp. invert. concorrente

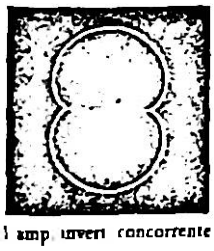

7:3 amp. invert. contracorrente

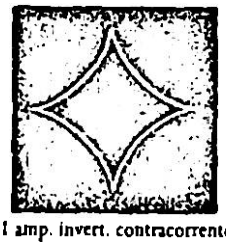

5:2 amp. igual contracorrente

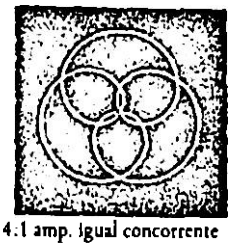
5:2 amp. invert. contracorrente

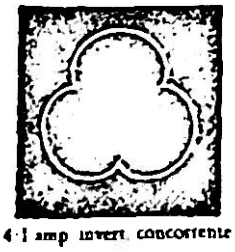

3:1 amp. igual contracorrente

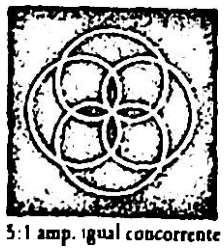

3:1 amp. igual concorrente

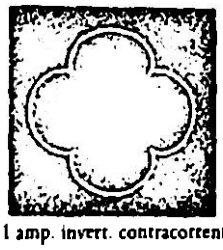

3:1 amp. invert. concorrente


3:1 amp. invert. contracorrente


4:1 amp. igual concorrente


4:1 amp. invert. concorrente


5:1 amp. igual concorrente


5:1 amp. invert. contracorrente

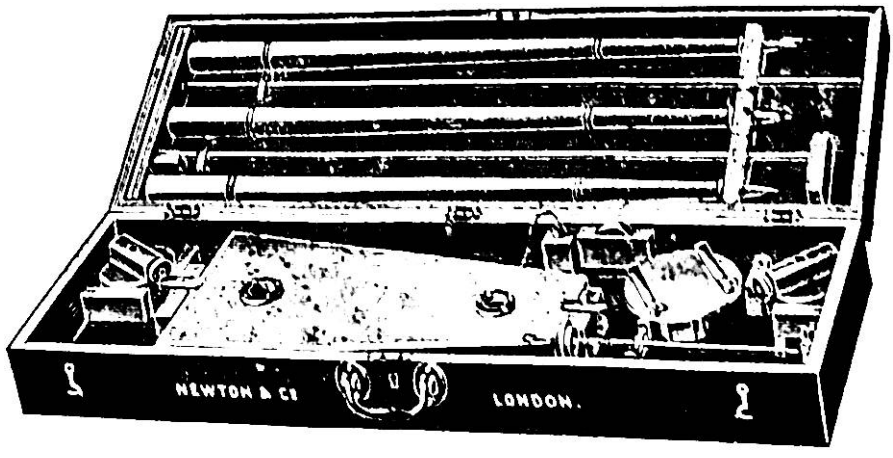
Padrões harmônicos do Index to the Geometric Chuck *(1875), de Sir Thomas Sebastian Bazley, que mostram fases concorrentes e contracorrentes com amplitudes iguais e invertidas.*

Introdução*

Muitos dos desenhos neste livro foram produzidos por um instrumento científico simples conhecido como harmonógrafo, uma invenção atribuída, em 1844, a um certo professor Blackburn.[1] Ao final do século XIX, esses instrumentos parecem ter atingido certa popularidade. Senhores e senhoras vitorianas compareciam a *soirées* – reuniões sociais, como saraus – ou *conversaziones*,[2] reunindo-se em volta desses instrumentos e exclamando com espanto quando viam aparecer os bonitos e misteriosos desenhos. Uma loja de Londres chegou a vender modelos portáteis que podiam ser dobrados, acondicionados em uma maleta e levados para uma festa. É bem possível que, hoje em dia, alguns desses instrumentos ainda estejam escondidos em sótãos por todo o país.

A partir do momento em que vi pela primeira vez desenhos deste tipo, fiquei encantado: não só por causa de sua estranha beleza, mas porque pareciam ter um significado – que se tornou mais claro e profundo quando descobri como construir e operar um harmonógrafo. O instrumento desenha ilustrações de harmonias musicais, unindo som e imagem.

No entanto, antes de prosseguir, sinto que deveria emitir um alerta de saúde. Se você também se sentir tentado a seguir este caminho, cuidado! Ele é tão fascinante quanto demorado.



* Os livros IV - Harmonógrafo e V - Os Elementos da Música tiveram a revisão técnica de Leandro Oliveira. (N. E.)

Devo reconhecer minha dívida para com um livro chamado *Harmonic Vibrations*. Foi ao me deparar com esse livro em uma biblioteca, logo após o fim da Segunda Guerra Mundial, que fui apresentado ao harmonógrafo. Vendo que o livro havia sido publicado por uma empresa de fabricantes de instrumentos científicos localizada em Wigmore Street, um dia fui verificar se eles ainda estavam lá. Estavam, embora reduzidos a meros fabricantes e vendedores de projetores. Entrei na loja e levantei minha cópia do livro encontrado na biblioteca para que o velho atrás do balcão o visse.

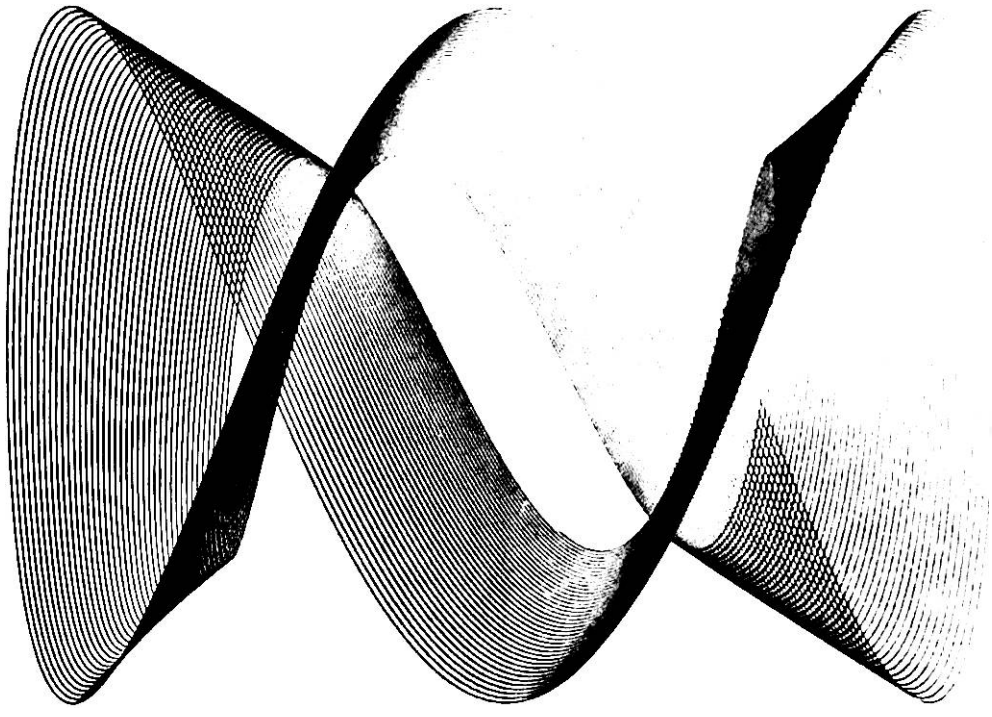
– Você tem alguma cópia deste livro sobrando? – perguntei a ele.

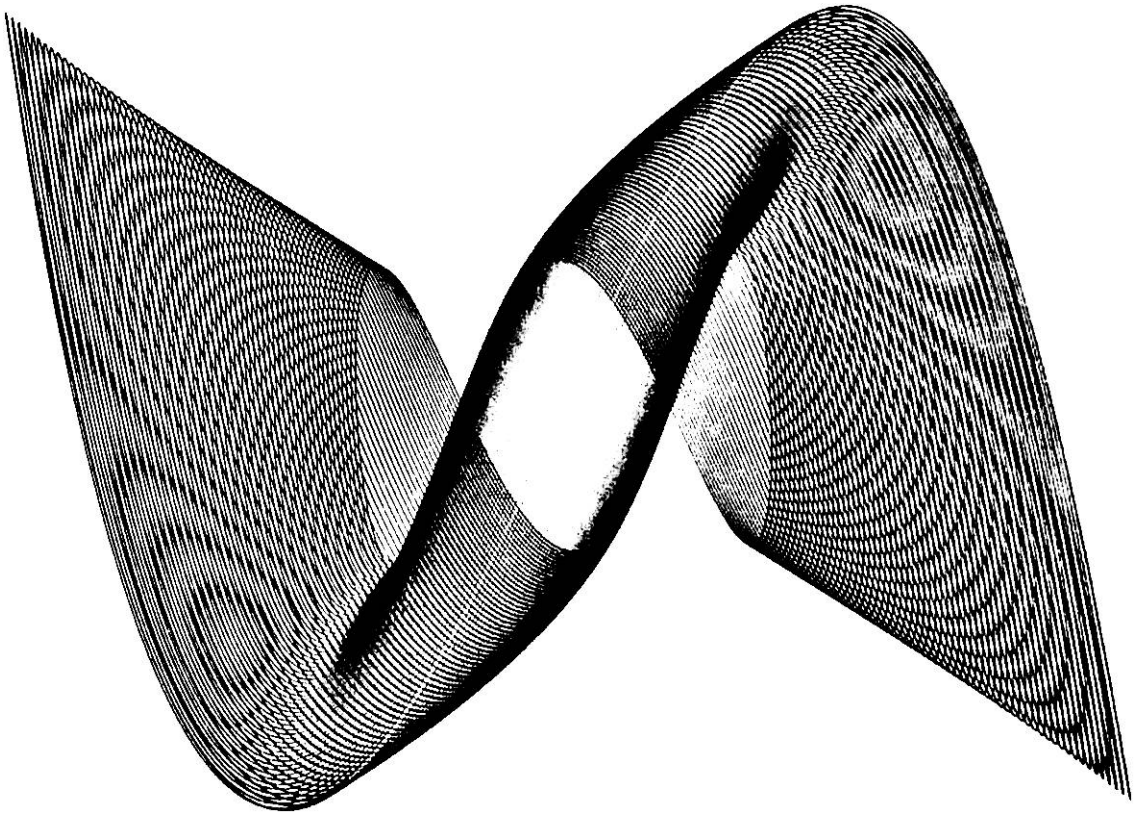
Encarou-me como se eu fosse algum tipo de fantasma, e saiu, arrastando-se, sem dizer palavra; retornou em poucos minutos com uma cópia empoeirada e não encadernada do livro.

– Isso é maravilhoso – disse eu . – Quanto quer por ele?

– Leve-o – disse ele. – É a nossa última cópia, e estamos fechando amanhã.

Desde então, sempre senti que, um dia, deveria escrever este livro.





A DESCOBERTA DA HARMONIA

Ao passar por um ferreiro

Para entender o que o harmonógrafo faz, precisamos primeiro olhar para os elementos da teoria musical.

É creditada a Pitágoras, cerca de 2.500 anos atrás, a descoberta de que a agradável experiência da harmonia musical surge quando a relação entre frequências consiste em números simples. Uma história extensamente recontada sobre o filósofo diz que, durante uma caminhada, ele passou pela loja de um ferreiro. Ao ouvir harmonias familiares nos tons emitidos pelo toque dos martelos na bigorna, Pitágoras resolveu entrar, e foi capaz de determinar que os pesos dos martelos eram os responsáveis pelas respectivas notas.

Um martelo que pesava metade de outro martelo emitia o som de uma nota duas vezes mais alta, ou seja, uma oitava (2:1). Um par de martelos que pesavam o equivalente a 3:2 emitia belas notas, um quinto distantes uma da outra. Relações simples criavam sons atraentes.

A imagem ao lado mostra os experimentos que Pitágoras passou a fazer (a partir da *Theorica Musice*, de Garufio, 1492) quando descobriu que todos os instrumentos musicais simples trabalham basicamente do mesmo modo, sejam eles golpeados, tocados ou soprados.

Profundamente impressionado por essa ligação entre música e número, Pitágoras chegou à conclusão metafísica de que toda a natureza consiste em harmonia resultante do número, ideia precursora da hipótese da física moderna de que a natureza obedece a leis expressas em forma matemática. Olhando para a imagem, você verá que, em cada exemplo – martelos, sinos, copos, pesos e tubos –, aparecem os mesmos números: 16, 12, 9, 8, 6 e 4. Esses números podem ser emparelhados de várias maneiras, todas elas agradáveis ao ouvido e, como veremos, também agradáveis aos olhos.

IV BAL
PYTACORA
PITAGORAS
PYTACORA
PHYLOLAVS

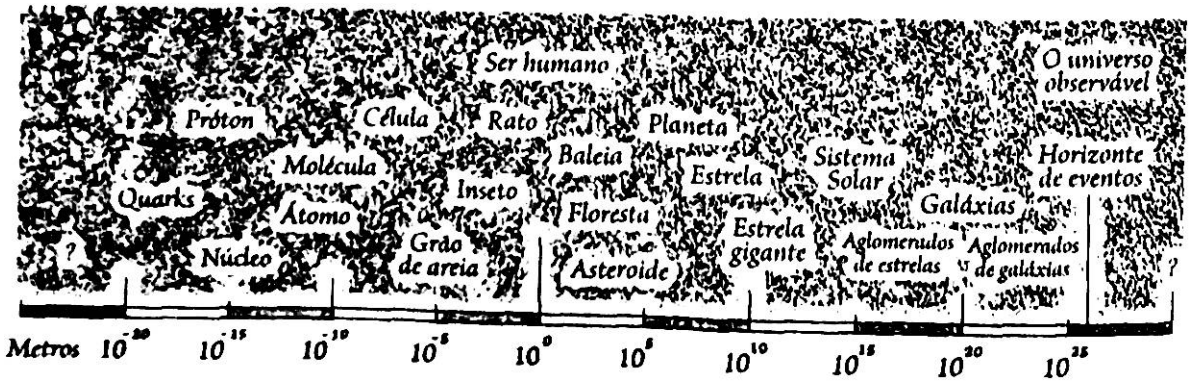
O MONOCÓRDIO DA CRIAÇÃO

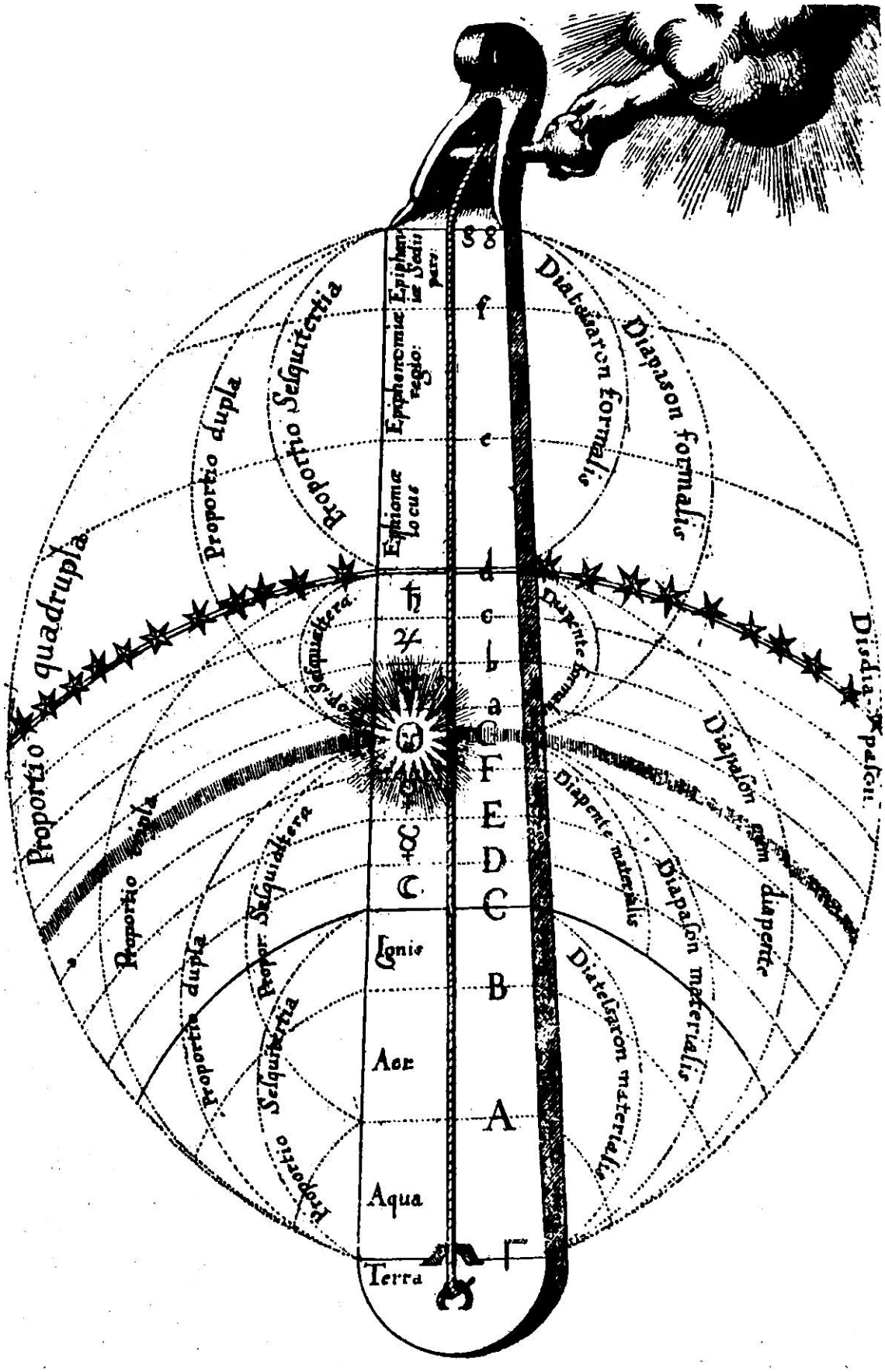
Uma teoria das cordas singular

Há sete oitavas no teclado de um piano, e quase onze na faixa total de som ouvido por uma pessoa comum. A nota mais alta de cada oitava tem uma frequência duas vezes maior que a primeira nota, de modo que a frequência aumenta *exponencialmente*, em uma escala que inicia em 16 ciclos por segundo (16 Hertz), com a menor nota do órgão, e termina com cerca de 20 mil ciclos por segundo. Abaixo de 16 Hertz experimentamos o *ritmo*. Uma série de dez oitavas representa um aumento de mil vezes na frequência ($2^{10} \approx 10^3$).

Há uma dica aqui do que podemos pensar como o "grande monocórdio"[3] do universo, também em uma escala, desta vez alongando-se a partir de uma única flutuação quântica na parte inferior, para o universo observável no topo, passando pelas várias "oitavas" de átomo, molécula, quantidades de matéria sólida, líquida e gasosa, criaturas grandes e pequenas, planetas, estrelas e galáxias. Aqui, a escala também é exponencial, mas geralmente medida em potências de dez, e cobre uma gama de mais de 10^{40}.

A gravura de Robert Fludd (*página ao lado*), do século XVII, conta uma história semelhante: a escala musical segue o mesmo princípio exponencial subjacente ao modelo do universo.




Proportio quadrupla
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Diatessaron formalis
Diapason formalis
Disdiapason
Diapason cum diapente
Diapente materialis
Diapason materialis
Diatessaron materialis
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Proportio Sesquialtera
Ignis
Aer
Aqua
Terra
A
B
C
D
E
F
a
b
c
d
e
f
g
g

SOBRETONS E INTERVALOS

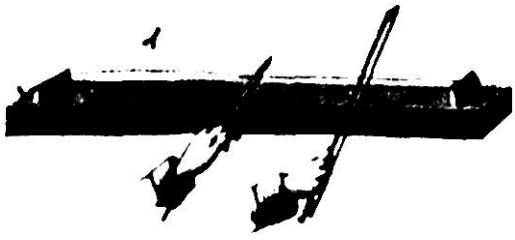
Relações harmônicas dentro e fora da oitava

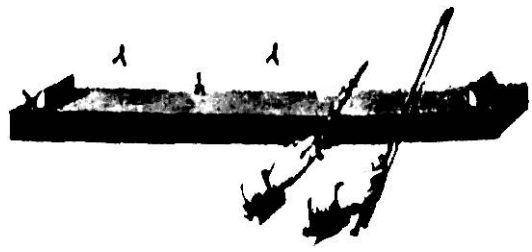
Como são construídas as escalas musicais? Ouça com muita atenção quando puxar uma corda de um instrumento, e ouvirá não apenas a nota principal, ou *tônica*, mas também uma infinidade de outros harmônicos, os *sobretons*.

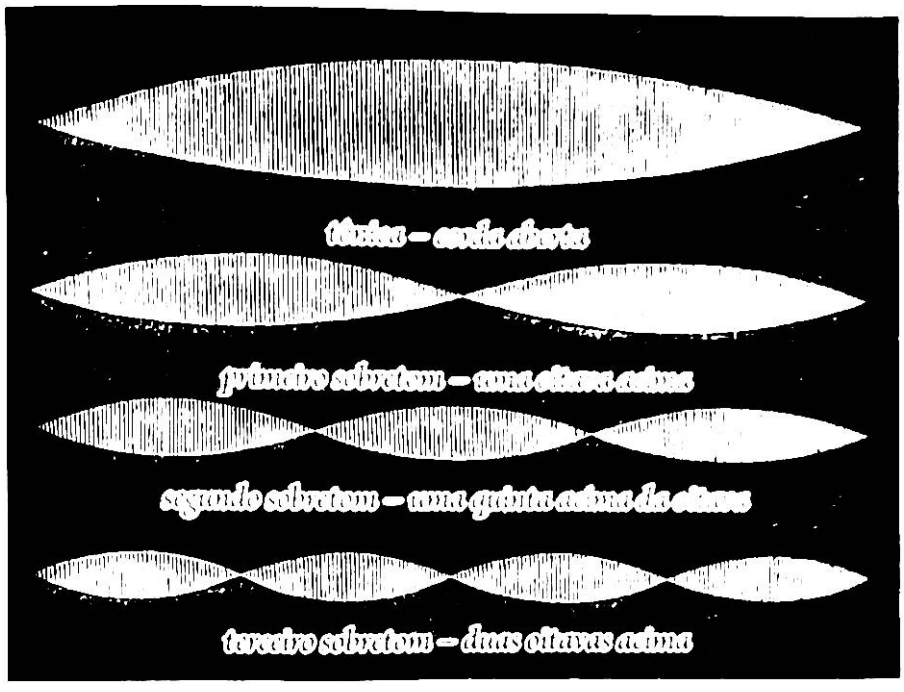
O princípio é o da ressonância harmônica, e afeta não apenas cordas e martelos de toque, mas também as colunas de ar e as placas. Tocando uma corda com uma pena, na metade ou no terceiro ponto, como mostra a figura abaixo, favorecemos pontos fixos espaçados regularmente, chamados *nós*, e podemos produzir um sobretom ao curvar o lado mais curto. Os primeiros três sobretons são mostrados na imagem ao lado.

Os músicos, no entanto, precisam de notas com intervalos um pouco mais próximos do que a série de sobretons, que se harmonizem *dentro* de uma oitava. O diagrama inferior, na imagem ao lado, mostra a série de sobretons, à esquerda, e os intervalos desenvolvendo-se dentro da oitava, à direita, em ordem de dissonância crescente, ou de complexidade.

"Toda discórdia, harmonia não compreendida",[4] escreveu Alexander Pope. O cérebro parece entender facilmente as relações implícitas em harmonias simples, uma conquista que traz prazer; mas, com uma complexidade crescente, ele vacila e falha, e a falha é sempre desagradável. Para a maioria das pessoas, o prazer diminui conforme a desarmonia aumenta, ao final da série na imagem ao lado. E, como veremos, é neste ponto que os desenhos do harmonógrafo também desaparecem.







Tônica, 1:1

O primeiro sobretom
2:1 – oitava

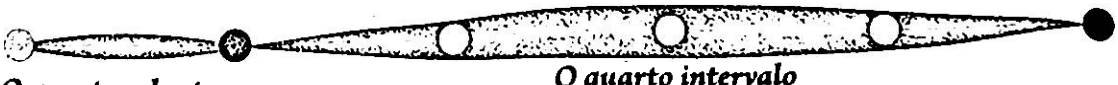
O primeiro intervalo
oitava, 2:1

O segundo sobretom
3:1 – quinta acima da oitava

O segundo intervalo
quinta, 3:2

O terceiro sobretom
4:1 – duas oitavas

O terceiro intervalo
quarta, 4:3



O quarto sobretom
5:1 – duas oitavas e uma terça maior

O quarto intervalo
terça maior, 5:4

O quinto sobretom
6:1 – duas oitavas e uma quinta

O quinto intervalo
terça menor, 6:5

TONS E SEMITONS

A quarta e a quinta recebem seus nomes

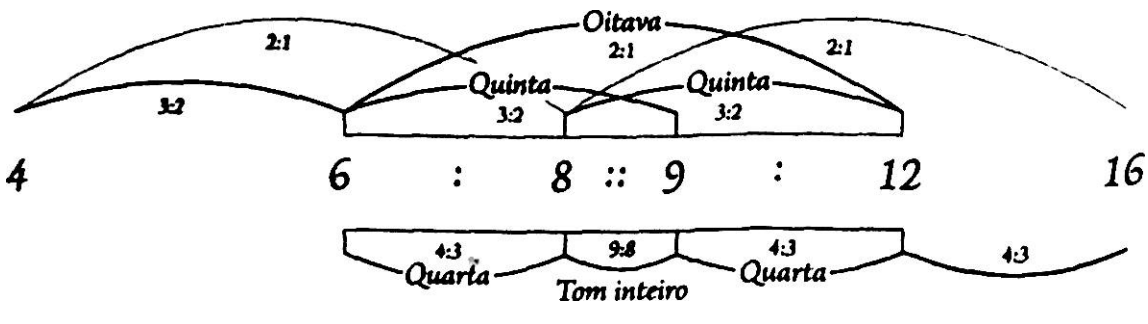
Os martelos de Pitágoras escondem um conjunto de relações dominadas por oitavas (2:1), quintas (3:2) e quartas (4:3). A quinta e a quarta juntam-se para formar uma oitava (3:2 x 4:3 = 2:1), e a diferença entre elas (3:2 ÷ 4:3) é chamada *tom*, valor 9:8.

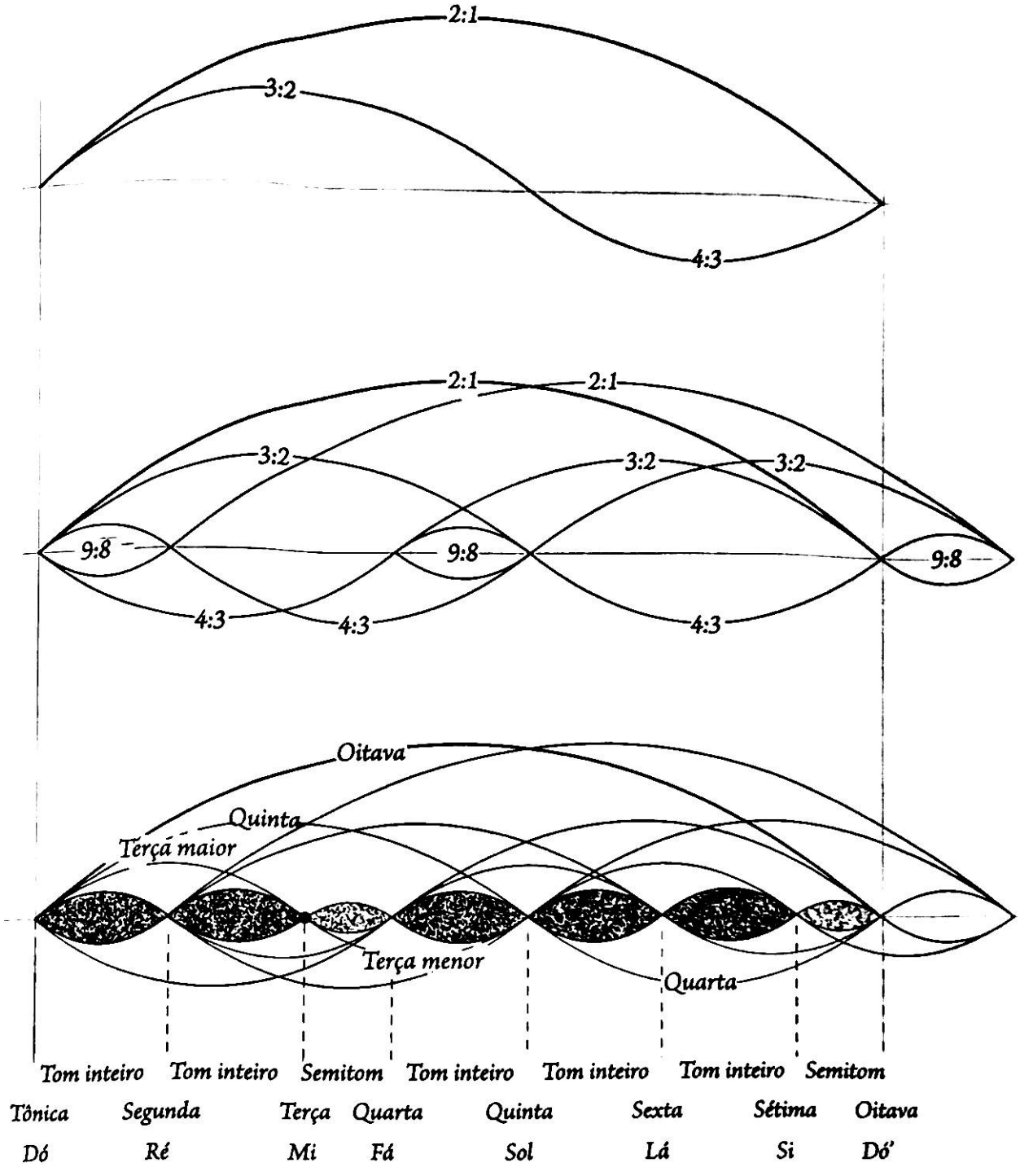
Um padrão natural evolui rapidamente, produzindo sete *nós* discretos (ou *notas*) a partir do tom inicial (ou *tônica*), separados por dois *semitons* e cinco tons, como o Sol, a Lua e os cinco planetas do mundo antigo.

O intervalo da quinta (3:2), o salto para a *dominante*, divide-se naturalmente em uma terça maior e uma terça menor (3:2 = 5:4 x 6:5): a terça maior compreende essencialmente dois tons, e a terça menor compreende um tom e um semitom. As terças maiores podem ser colocadas antes das menores (*para produzir a escala maior apresentada na terceira linha da imagem ao lado*), ou colocadas de outras maneiras.

Dependendo de seus movimentos harmônicos, ou *melodia*, aparecem *afinações* diferentes; por exemplo, dois tons perfeitos (9:8 x 9:8 = 81:64) *não* são, de fato, a terça maior perfeita 5:4, mas são levemente elevados como 81:80 (a *coma sintônica* ou *sinóptica*, a *shruti* indiana, ou a *coma de Dídimo*).

Relações simples, a oitava e a quinta, deram origem a uma *escala* básica, um padrão de tons e semitons; e, dependendo do ponto na sequência que chamarmos origem, são possíveis sete *modos* (*ver página 388*).





Acima: A manifestação fundamental da escala maior. Em sintonia pitagórica, todos os tons são exatamente 9:8, criando o semitom leimma, *na razão 256:243, entre a sua terça maior (81:64) e a quarta perfeita (4:3). A sexta e a sétima são definidas como tons perfeitos sucessivos acima da quinta. Em sintonia diatônica, a terça maior é perfeita em 5:4, o que comprime o segundo tom para 10:9 (um tom menor), deixando 16:15 como o semitom diatônico até a quarta. A sexta diatônica é 5:3, uma terça maior acima da quarta, um tom menor acima da quinta. A sétima diatônica (15:8) é um tom maior acima disso, uma terça maior acima da quinta e um semitom abaixo da oitava.*

DERIVANDO A ESCALA

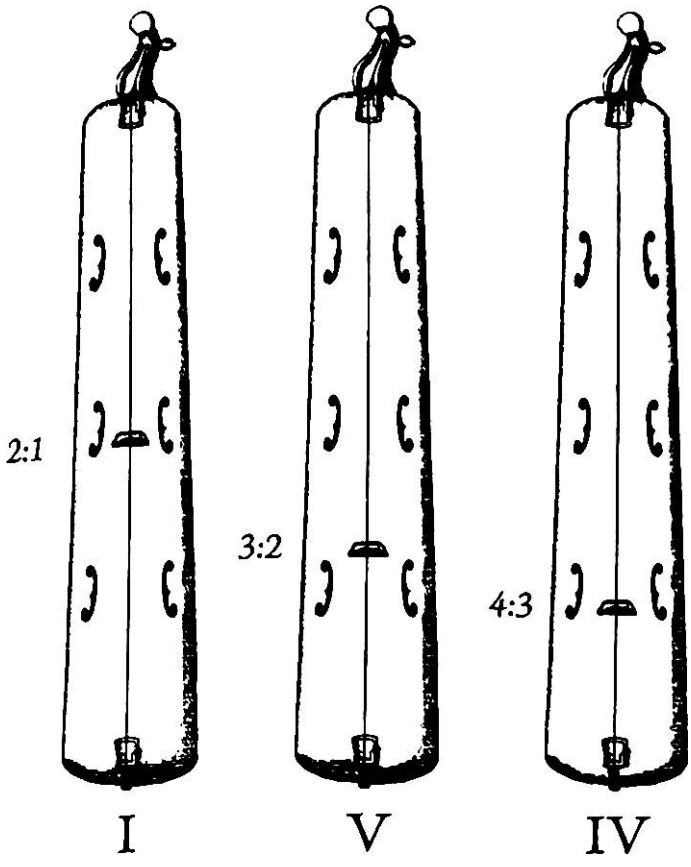
Monocórdio, tetracórdio e acorde maior

As relações puras entre quarta, quinta e oitava compõem a trindade paradoxal do Tetracórdio de Pitágoras:[5] simples, ainda que curiosamente mistificadora, já que nela as duas notas da oitava soam como uma. Assim, uma quinta acima é uma quarta abaixo, e vice-versa (*ver ilustração da página 196*), e quatro notas, dentro da unidade da oitava, tornam-se três. A relação reflexiva desses tons puros forma a base da melodia ocidental, e a partir deles é derivada a escala maior (*figura superior, imagem ao lado*).

Quando a quarta é abaixada, uma oitava – a fundamental ou tônica – torna-se agora a sua quinta. Isso resulta no círculo de quintas, em que cada novo tom é o segundo sobretom (isto é, a quinta) de seu predecessor (*figura inferior, imagem ao lado*). O Dó, fundamental, é ladeado pelo Fá subdominante e pelo Sol dominante. Quando a tônica e a quarta são tocadas juntas, a tônica (I) é enfraquecida, e quase subordinada, pela subdominante (IV). Os três elementos constitutivos do tetracórdio, em seu delicado equilíbrio, definiram a nossa maneira de ouvir e entender a música.

As escalas podem ser derivadas de vários princípios básicos. A escala harmônica consiste na terceira oitava da série de sobretons – Dó, Ré, Mi, Fá sustenido, Sol, Lá, Si bemol, Si, Dó. Na música indiana, Saraswati, a deusa da música e da ciência, tem um *raga*[6] que contém sete dessas oito notas. As afinações indianas, no entanto, estendem-se até 22 tons ou *shrutis*, para permitir a coma sintônica 81:80 (*ver página 196*). A partir desses tons, são escolhidas sete notas. A escala musical persa de dezessete tons inclui as sete notas brancas de um piano, mais as notas pretas, que são divididas ao meio, pois sustenidos *não são* bemóis (*figura abaixo*).

Sol♭ Ré♭ Lá♭ Mi♭ Si♭ Fá Dó Sol Ré Lá Mi Si Fá♯ Dó♯ Sol♯ Ré♯ Lá♯

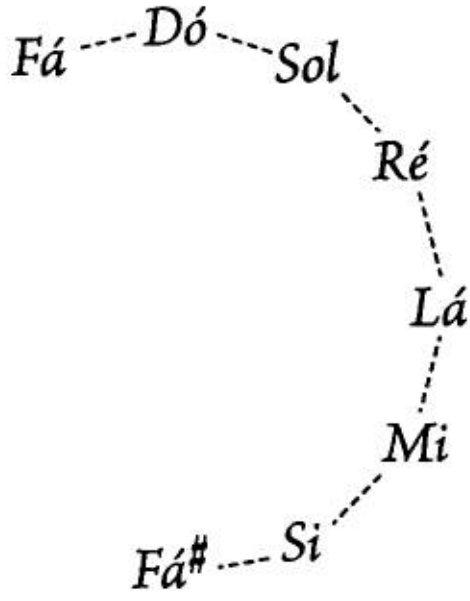


Esquerda: Usando um monocórdio com uma ponte móvel, Pitágoras demonstrou a relação entre o comprimento de corda e os tons musicais. Os tons mais simples são a tônica, a quinta e a quarta, também conhecidos como tetracórdios. Os sobretons iniciais de cada um deles produzem os três acordes principais, ou tríades, I, IV e V (por exemplo, os sobretons iniciais do Dó são Dó' [uma oitava acima], Sol' [uma oitava acima], Dó" [duas oitavas acima], Mi" [duas oitavas acima]). As oitavas fundem-se acusticamente. Assim, com o Dó como nota fundamental:

Acorde I:	*Dó, Mi, Sol*
Acorde IV:	*Fá, Lá, Dó*
Acorde V:	*Sol, Si, Ré*

A combinação dessas notas dentro do espaço de uma única oitava gera a escala maior: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó

Direita: A derivação da escala maior, a partir de um círculo de quintas, exige que se comece no Fá subdominante. Com um círculo de quintas iniciando em Dó, e trazendo as sete primeiras notas para baixo em uma única oitava, chega-se a um modo lídio puro – Dó Ré Mi Fá# Sol Lá Si Dó, conhecido pelos gregos antigos como sintolídio. Este modo contém a quarta "elevada", ou Fá# (sustenido). Curiosamente, tanto a escala harmônica (ao lado) quanto o modo lídio contêm a "quarta aumentada", de difícil sonoridade, ou trítono, conhecida pelos musicólogos medievais como "diabolus in musica."



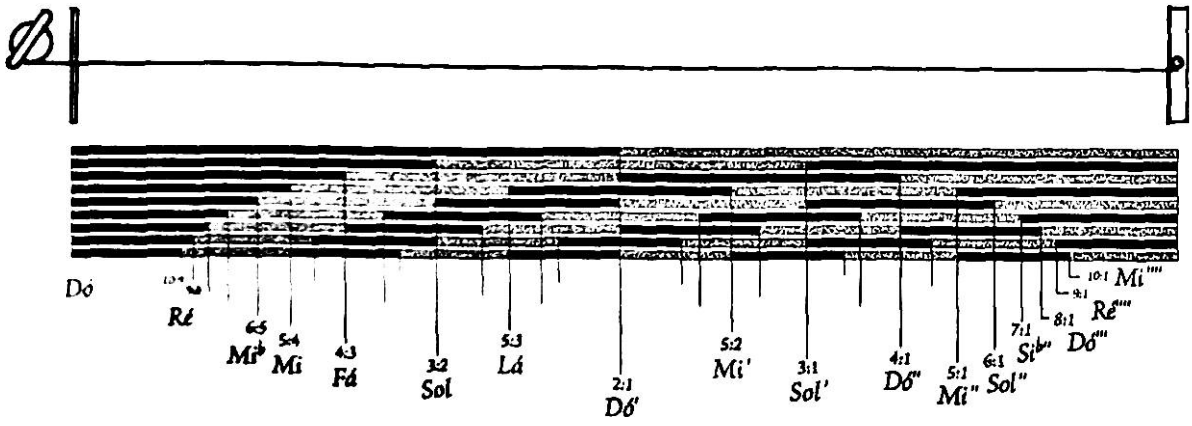
ORGANIZANDO AS HARMONIAS

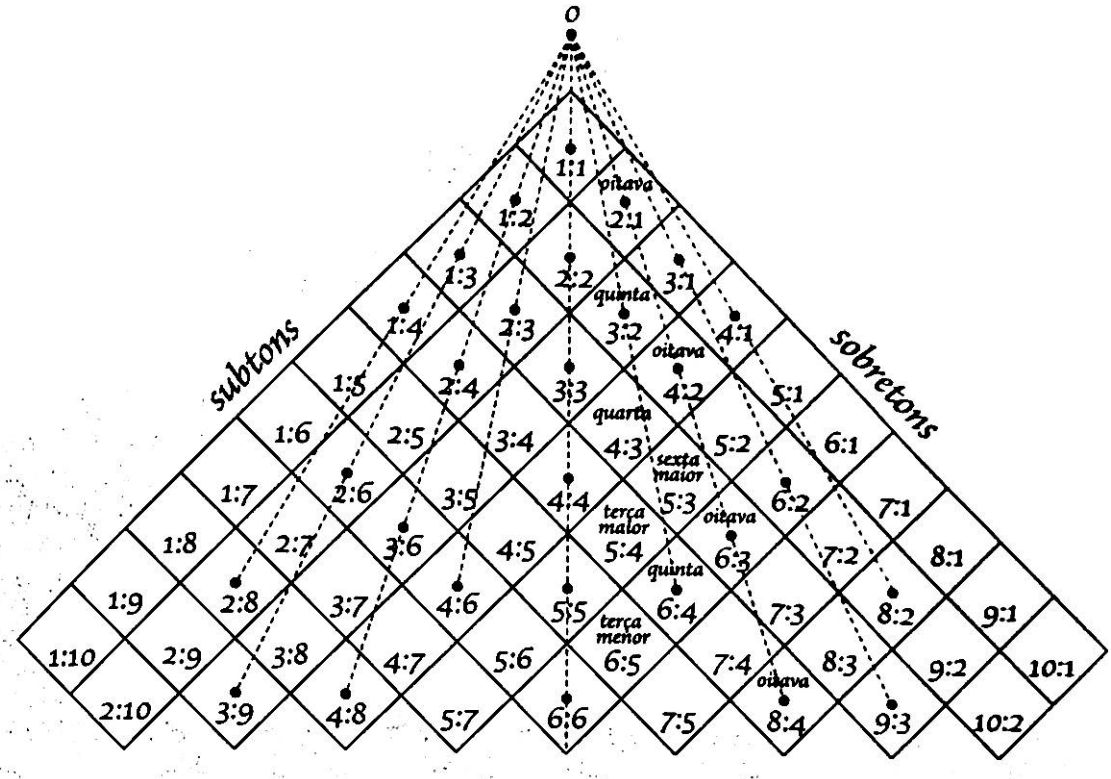
O poder do silêncio

As relações simples dos sobretons e subtons (ou meios-tons) primários podem ser representadas em uma antiga grade conhecida como *lambdoma* (*figura superior, imagem ao lado*), a partir da letra grega λ (lambda). Alguns intervalos têm o mesmo valor (por exemplo, 8:4 = 6:3 = 4:2 = 2:1), e, se forem desenhadas linhas através deles, rapidamente se torna evidente que as identidades convergem na silenciosa e misteriosa relação 0:0, que está "fora do diagrama".

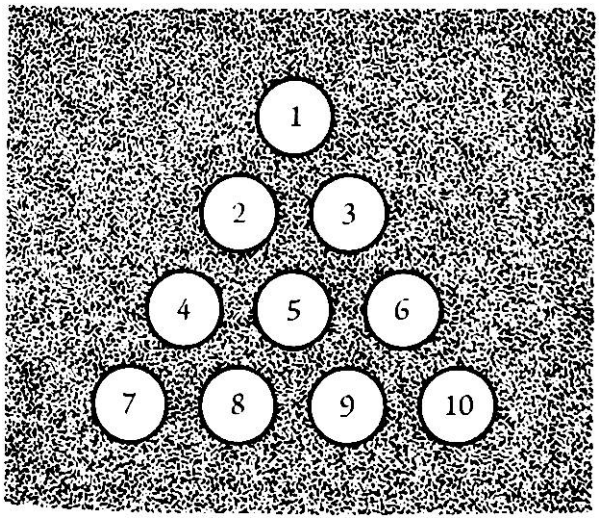
Um dispositivo mais contemplativo, usado pelos pitagóricos, era o *tetraktys*, um arranjo triangular de dez elementos em quatro linhas (1 + 2 + 3 + 4 = 10). A forma básica é dada na figura inferior esquerda, na imagem ao lado, com as primeiras três linhas produzindo os intervalos simples. Em outro lambdoma (*figura inferior direita*), os números são dobrados do lado esquerdo e triplicados do lado direito, o que cria tons horizontalmente separados de seus vizinhos por quintas perfeitas. Após a trindade (1, 2 e 3), observe os números produzidos – 4, 6, 8, 9, 12 – e, depois, olhe novamente para a figura da página 191.

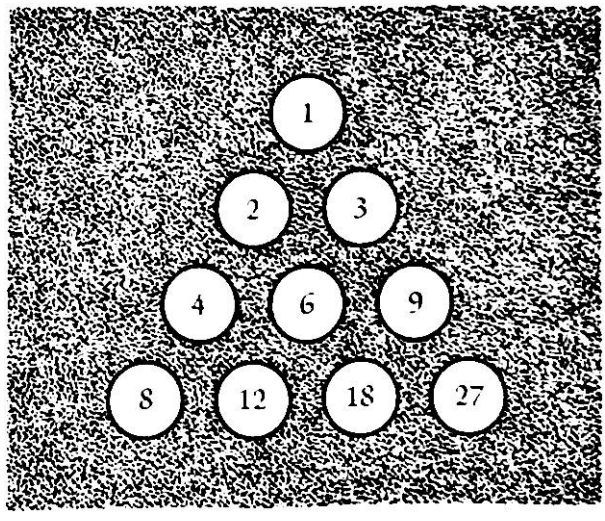
Abaixo, vemos um leque mais amplo de posições do monocórdio, com os sobretons à direita e os intervalos à esquerda (*ver páginas 195 e 197*).





As afinações pitagóricas e medievais, chamadas "limite-três", não reconheciam intervalos verdadeiros, a não ser para as relações que envolvem 1, 2 e 3. O lambdoma abaixo à direita expressa isso numericamente, já que qualquer elemento se relaciona a qualquer vizinho por razões que envolvem apenas 1, 2 e 3, a fim de podermos nos mover por oitavas e quintas. Também aparecem relações quadradas ($4 = 2^2$, $9 = 3^2$) e cúbicas ($8 = 2^3$, $27 = 3^3$). Acrescente linhas adicionais, e os números para a escala pitagórica logo surgem: 1, 9:8, 64:81, 4:3, 3:2, 27:16, 16:9 e 2:1. São quatro quintas e cinco quartas, mas não há terças perfeitas ou sextas. Estas surgiram depois, com a escala diatônica e suas terças perfeitas (6:5:4), conforme a polifonia e os acordes foram lentamente tornando-se mais comuns que o cantochão, o organum *e outras práticas pré-polifônicas.*





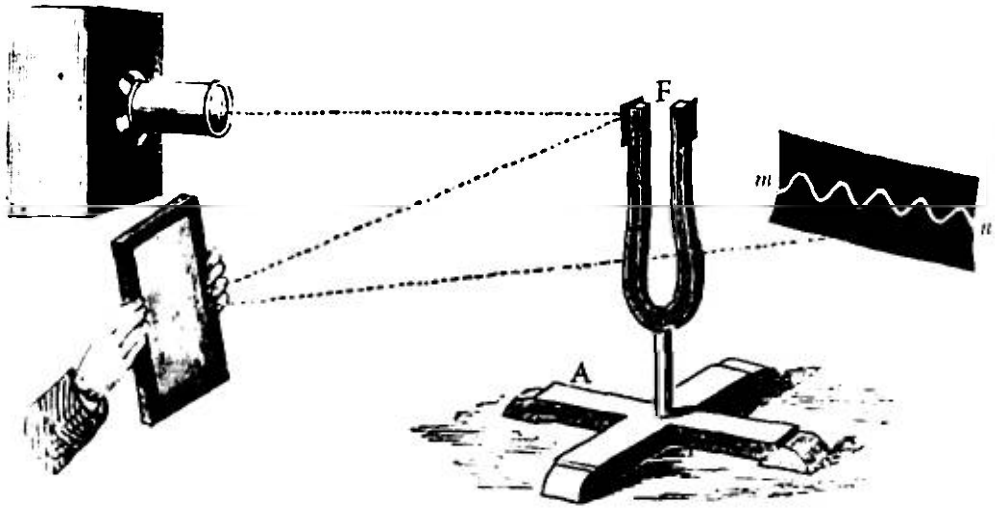
AS FIGURAS DE LISSAJOUS

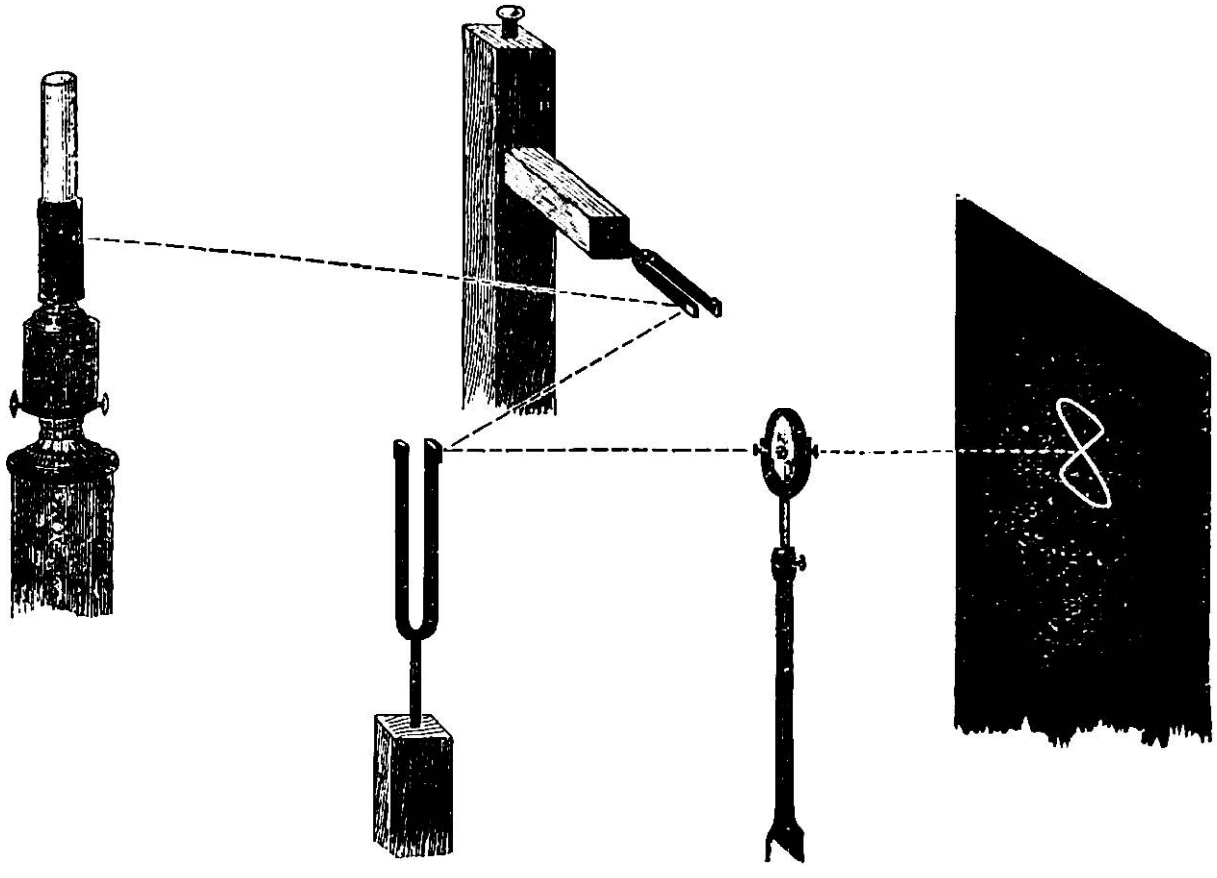
Som feito forma

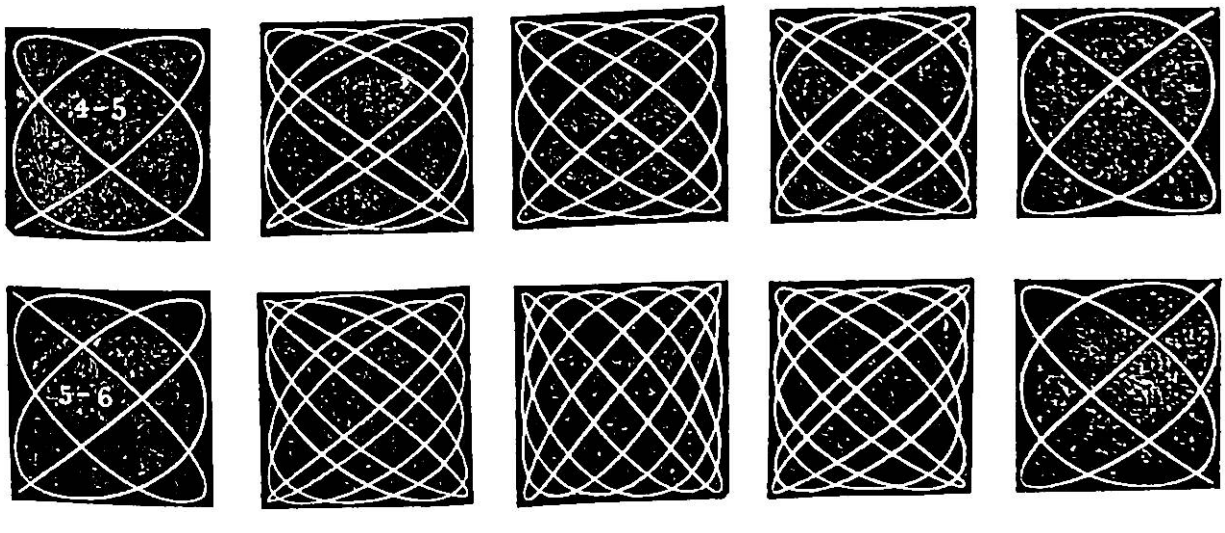
Em meados do século XIX, um matemático francês, Jules Lissajous, concebeu um experimento: descobriu que, se um pequeno espelho fosse colocado na ponta de um diapasão, e um feixe de luz fosse apontado para ele, a vibração poderia ser projetada em uma tela escura. Quando o diapasão era golpeado, produzia uma pequena linha vertical que, se lançada rapidamente para os lados com a ajuda de outro espelho, produzia uma onda senoidal (*imagem abaixo*).

Lissajous imaginou o que aconteceria se, em vez de lançar a onda para os lados, colocasse outro diapasão em ângulo reto com o primeiro, para produzir o movimento lateral. Ele descobriu que os diapasões, com frequências relativas em proporções simples, produziam belas formas, conhecidas atualmente como figuras de Lissajous.

Na tela escura (*imagem ao lado, acima*), vemos a oitava (2:1) como a figura de um oito e, abaixo, várias fases das terças maior e menor. Essas são algumas das primeiras imagens fugazes de harmonia que, indubitavelmente, se tornaram familiares ao professor Blackburn quando criou o harmonógrafo.






4-5
5-6

O PÊNDULO

Mantendo o tempo

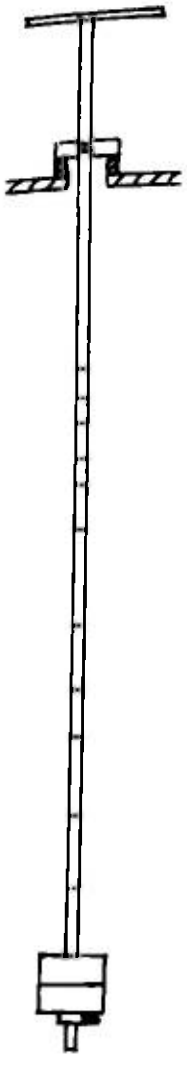
A lei fundamental da física afirma (em uma formulação) que qualquer sistema fechado, se abandonado a si mesmo, sempre passará a um estado de equilíbrio a partir do qual nenhuma outra mudança é possível.

Um pêndulo é um bom exemplo disso. Quando puxado do centro para começar a oscilar, encontra-se em estado de extremo desequilíbrio. Uma vez solto, a força cinética de seu movimento carrega-o até quase o mesmo ponto do lado oposto. Mas, enquanto balança, o pêndulo vai perdendo energia, em forma de calor, devido ao atrito em seu ponto de articulação, e por atravessar o ar. Em consequência disso, seu movimento enfraquece até que, finalmente, ele descansa em estado de equilíbrio na posição central.

Retornando 500 anos, temos Galileu, que, ao observar uma lamparina oscilando na catedral de Pisa, percebe que a frequência de oscilação de um pêndulo depende de seu comprimento: quanto mais longo o braço do pêndulo, menor a frequência. Assim, a frequência pode variar à vontade, fixando-se o peso em diferentes alturas. Mais importante ainda, enquanto o pêndulo não parar, a frequência de oscilação permanecerá a mesma.

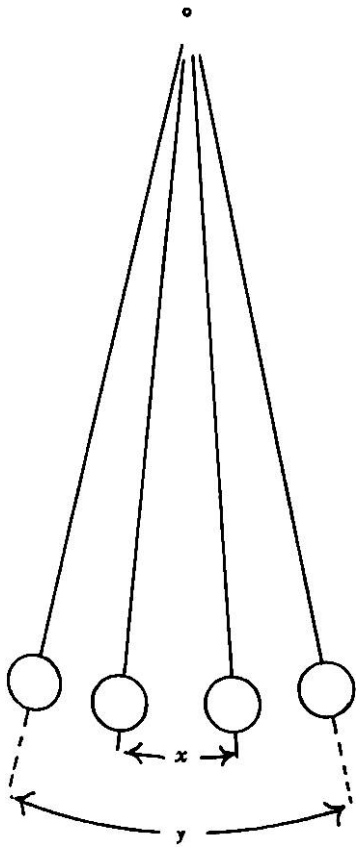
Por consequência, temos aqui uma maneira perfeita para representar um tom musical, desacelerado cerca de mil vezes até o nível de percepção visual humana. Para um harmonógrafo simples, são usados dois pêndulos para representar uma harmonia, um deles com o peso mantido em seu ponto mais baixo, enquanto, no outro, o peso é movido para onde quer que se produza a relação necessária.

Como veremos, o harmonógrafo combina essas duas vibrações em um único desenho, assim como dois tons musicais, quando tocados juntos, produzem um único som complexo.



Nome do intervalo	*Nota aproximada*	*Relação diatônica*	*Comprimento (cm)*	*Frequência (S)*
Oitava	Dó'	2:1	20	66,0
Sétima maior	Si	15:8	22,8	62,8
Sétima menor	Si♭	9:5	24,7	59,4
Sexta maior	Lá	5:3	28,8	55,8
Sexta menor	Sol♯	8:5	31,2	53,6
Quinta	Sol	3:2	35,6	50,3
Quarta	Fá	4:3	45,0	44,7
Terça maior	Mi	5:4	51,2	41,9
Terça menor	Mi♭	6:5	55,6	40,2
Segunda	Ré	9:8	63,2	37,7
Semitom	Dó♯	16:15	70,3	35,7
Uníssono	Dó	1:1	80	33

O comprimento teórico do pêndulo variável que produzirá cada harmonia pode ser calculado, pois a frequência de um pêndulo é inversamente proporcional à raiz quadrada de seu comprimento. Isso significa que, embora a frequência dobre dentro da oitava, o comprimento do pêndulo é reduzido por um fator de quatro. As figuras são de um pêndulo de 80 cm de comprimento, conveniente para um harmonógrafo. Esses marcadores teóricos fornecem "tiros de teste" úteis para a maioria das harmonias.[7] Note que o comprimento do pêndulo é medido a partir do fulcro até o centro do peso.



Quando um pêndulo é puxado e, em seguida, liberado, o peso tenta cair em direção ao centro da Terra, acelerando enquanto faz o movimento. À medida que vai parando de oscilar, a taxa de aceleração, e, portanto, a velocidade de deslocamento, é reduzida, mas em proporção equivalente à distância do percurso. O resultado é que o período (o tempo necessário para duas batidas), ou o número de períodos em dada unidade de tempo (a frequência), permanece inalterado. Na figura à esquerda, as frequências das batidas x e y são as mesmas. Para a fórmula do pêndulo, consultar a página 389.

DOIS HARMONÓGRAFOS

Lateral e rotativo

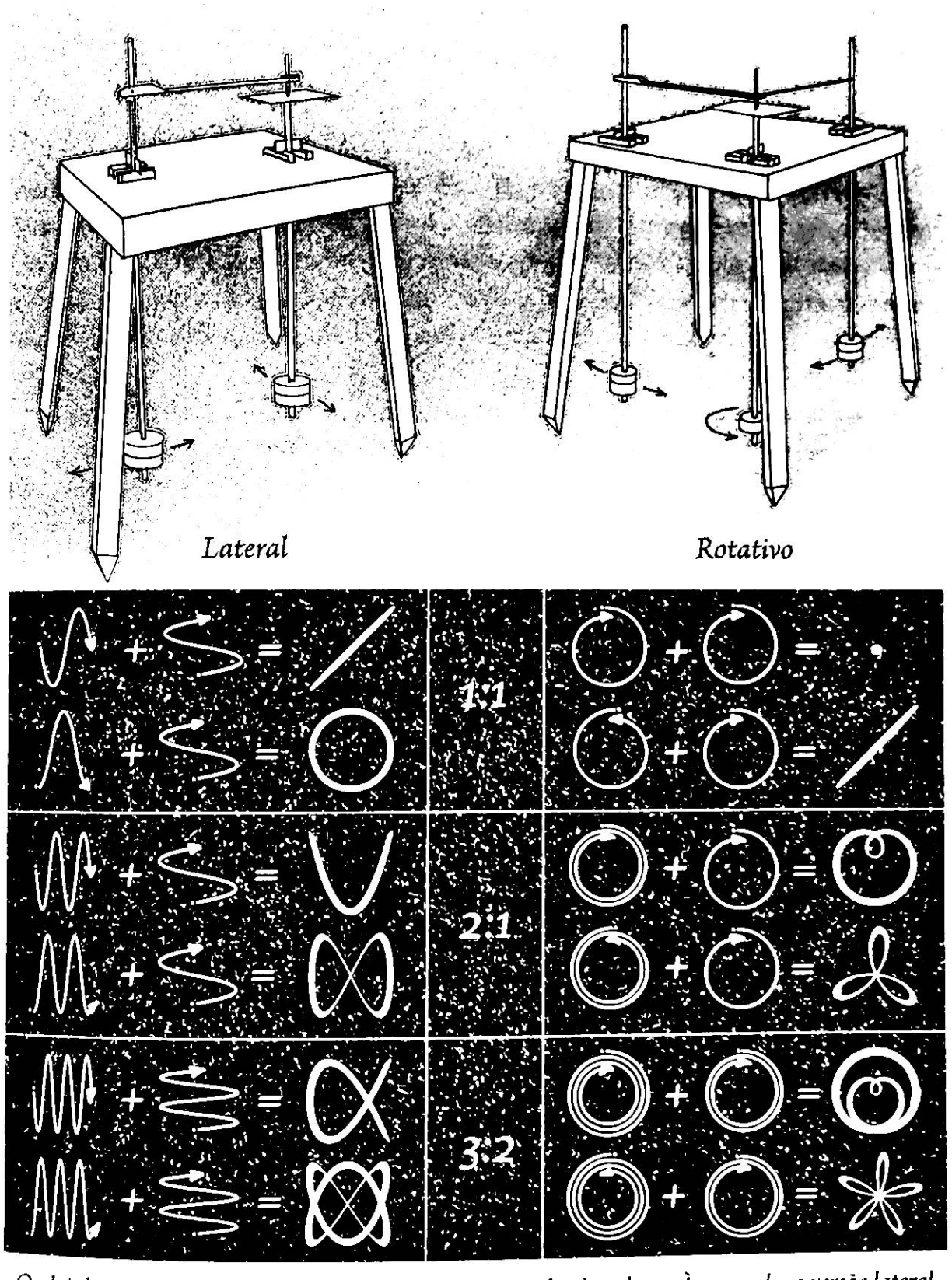
Na versão mais simples do instrumento, dois pêndulos são pendurados em uma mesa através de furos, balançando em ângulos retos entre si. Prolongando-se acima da mesa, o eixo de um dos pêndulos segura uma pequena plataforma com um pedaço de papel preso nela, enquanto o eixo do outro pêndulo carrega um braço com uma caneta.

À medida que os pêndulos balançam, a caneta faz um desenho que é o resultado de seus movimentos combinados (*lado esquerdo, imagem ao lado*). Ambos os pêndulos começam com o mesmo comprimento, mas desenhos adicionais podem ser obtidos quando o comprimento de um deles é reduzido, deslizando-se seu peso para cima e prendendo-o com uma braçadeira em diversos pontos. Por sua vez, as relações harmônicas podem ser reveladas pelos desenhos.

Ao utilizar três pêndulos, no entanto, dois movimentos circulares, ou *rotativos*, podem ser combinados, com resultados fascinantes (*lado direito, imagem ao lado*). Dois dos pêndulos oscilam em ângulos retos como antes, mas agora estão ambos conectados à caneta, que desenha um círculo simples em todos os modelos rotativos.

Situado sob a caneta que gira, o terceiro pêndulo, variável, está elevado por argolas de suspensão, um dispositivo familiar a qualquer pessoa que tenha usado uma bússola ou um fogão no mar. Neste caso, o dispositivo funciona como um ponto de apoio giratório, permitindo que esse pêndulo, segurando a plataforma com o papel, balance sob a caneta em um segundo círculo. À medida que a caneta é abaixada, os dois círculos são combinados no papel.

Outra fonte de variação também é introduzida aqui, pois os dois movimentos circulares podem oscilar na mesma direção (concorrente) ou em direções opostas (contracorrente), produzindo desenhos espantosos com características muito diferentes (*ver apêndices nas páginas 390 e 391*).



Os dois harmonógrafos e alguns dos padrões simples que eles desenham. À esquerda, a versão lateral simples e seus padrões (fases aberta e fechada). À direita, o harmonógrafo rotativo de três pêndulos e seus desenhos (concorrente e contracorrente). Veja também o harmonógrafo de dupla elíptica, ilustrado no canto inferior direito da página 393.

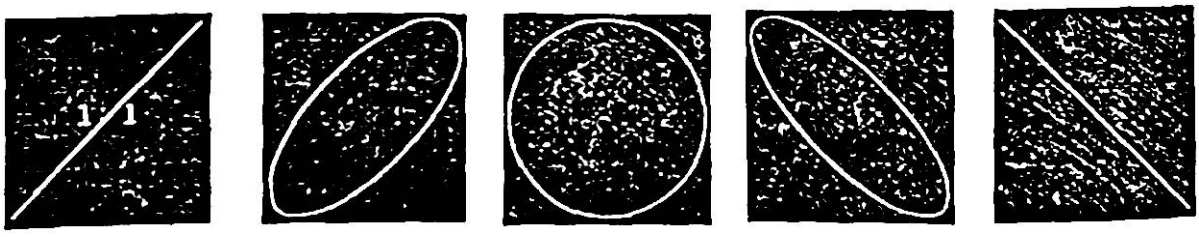
UNÍSSONO SIMPLES 1:1

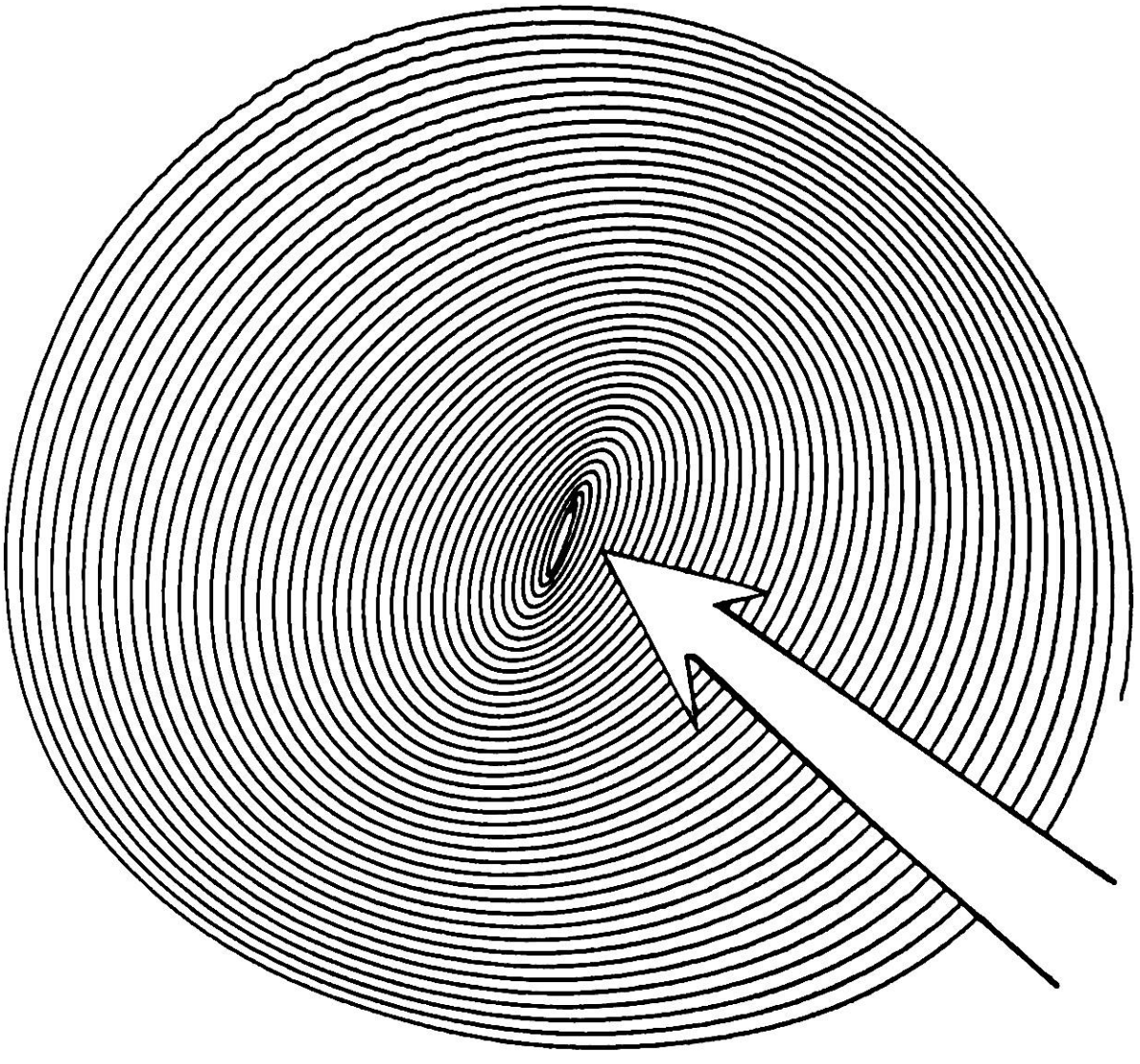
E a seta do tempo

O desenho mais simples do harmonógrafo é produzido quando ambos os pêndulos têm o mesmo comprimento e a mesa é fixa. Com a caneta sem tocar o papel, os dois pêndulos são puxados para os seus pontos mais altos. Um deles é posto em movimento, seguido pelo outro quando o primeiro está em seu ponto médio. A caneta é, então, baixada sobre o papel para produzir um círculo que se desenvolve em uma única espiral.

Se os dois pêndulos forem lançados juntos, então o resultado será uma linha reta diagonal através do papel, a fase "fechada" da harmonia, em oposição à fase circular "aberta". Nos pontos de fase intermediária, aparecem formas elípticas (*imagem abaixo*).

A cessação do movimento dos pêndulos do harmonógrafo é um paralelo exato com o desvanecimento de notas musicais produzidas por cordas dedilhadas, e também pode ser pensada como a representação gráfica da "seta do tempo" (*imagem ao lado*), com as relações imutáveis das frequências representando o caráter eterno da lei natural. As características dos desenhos resultam do encontro desse processo de cessação com as "leis" representadas pelas várias relações entre as frequências. Assim, vemos que a música, como o mundo, é formada a partir de princípios matemáticos imutáveis, implementados no tempo, criando complexidade, diversidade e beleza.





A direção inexorável da mudança, ligada à assimetria do tempo (antes-agora-depois), foi vividamente descrita pelo cientista Arthur Eddington (1882-1944) como "a seta do tempo". Durante o processo de contínua degradação universal, a diminuição do estoque de energia "útil" encontra uma hierarquia de leis físicas fixas, em conformidade com fórmulas matemáticas, e é pela interação dessas leis imutáveis com a seta do tempo que surge um mundo em transformação, de surpreendente complexidade, diversidade e beleza. O pêndulo passa de um estado de desequilíbrio para um de equilíbrio, e isso também é verdade, dizem-nos, quanto ao universo, o derradeiro "sistema fechado". De um estado de desequilíbrio extremo, o universo mergulhou, através do "Big Bang", em seu futuro estado final de total equilíbrio gélido e escuro. Entre o início e o fim, há uma transformação contínua e crescente de energia "útil" – capaz de formar estruturas temporárias e causar eventos – em energia "inútil" perdida para sempre.

QUASE UNÍSSONO

Fases laterais e frequências de batimento

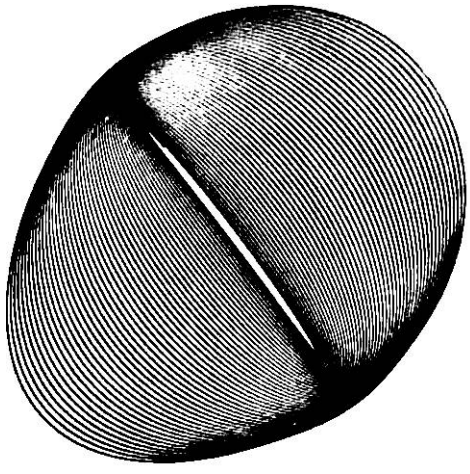
Uma fonte de agradável variedade nos desenhos do harmonógrafo vem de pequenos desvios a partir de harmonias perfeitas. Isso parece envolver um princípio difundido na natureza, bem como na obra de muitos artistas. Há certo encanto especial nas situações de "quase erro".

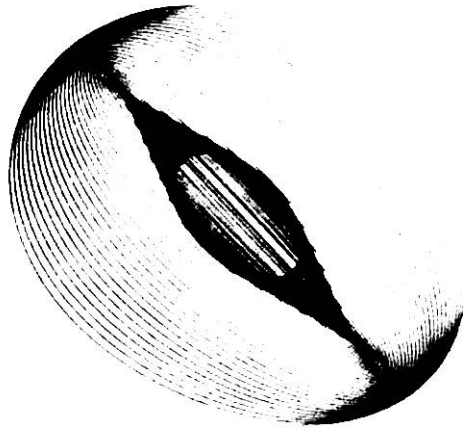
Um exemplo da música pode ser sugerido aqui. Quando duas notas são tocadas em *quase uníssono*, a pequena diferença em suas frequências pode, muitas vezes, acrescentar riqueza ou personalidade ao som. As duas palhetas que produzem uma única nota em um acordeão têm frequências ligeiramente diferentes, um pequeno desvio do uníssono que causa "batimentos", um som sutil, gorjeante ou latejante (*ver página 389*).

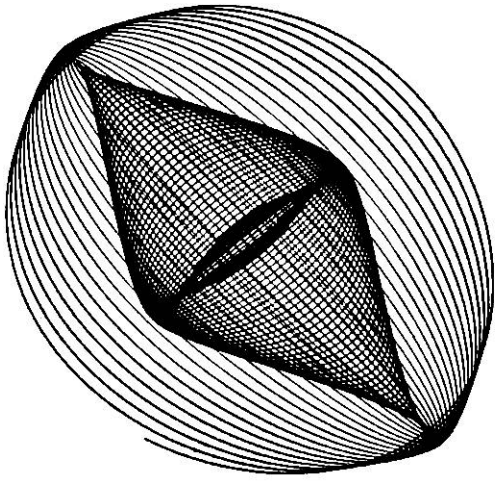
No harmonógrafo, definimos os pesos para o uníssono e encurtamos ligeiramente o pêndulo variável. Balançando os pêndulos em fase aberta, produzimos um círculo que se transformará em uma elipse cada vez mais estreita e, em seguida, em uma linha. Se deixarmos a caneta continuar a desenhar, a linha se transformará em uma elipse que se ampliará até virar um círculo e, novamente, uma linha perpendicular à primeira; e assim por diante. O instrumento está atravessando as fases do uníssono que são apresentadas na página 208.

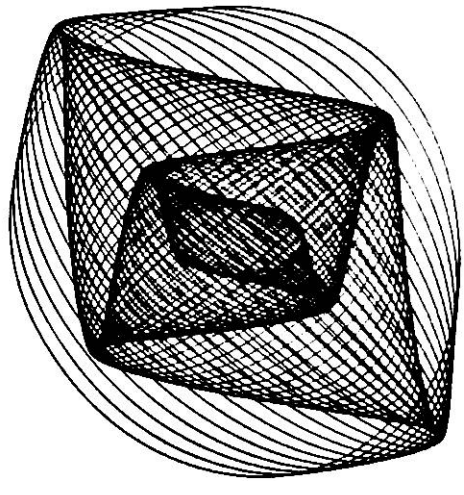
Em seguida, se o pêndulo variável for encurtado ainda mais, por etapas, será produzida uma série de desenhos como os que aparecem na imagem ao lado. O padrão repetitivo representa "batimentos" de frequência cada vez mais alta, conforme aumenta a discrepância entre as notas. Ao final, a série se enfraquece até virar um rabisco, que é uma boa representação da dissonância, ainda que haja, aqui, uma sugestão de algum padrão numérico mais elevado.

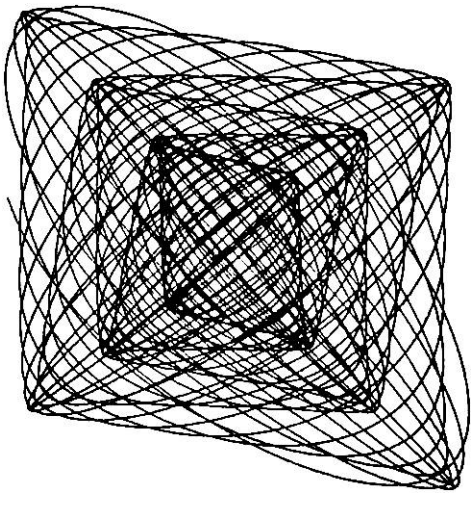
Para a maioria das pessoas, esse gradual desaparecimento da harmonia visual ocorre aproximadamente no mesmo ponto em que as harmonias audíveis também desaparecem.

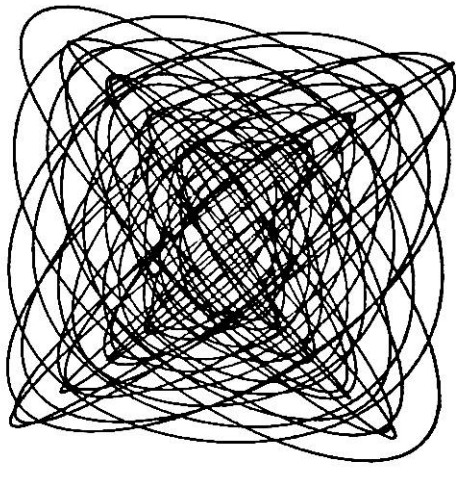












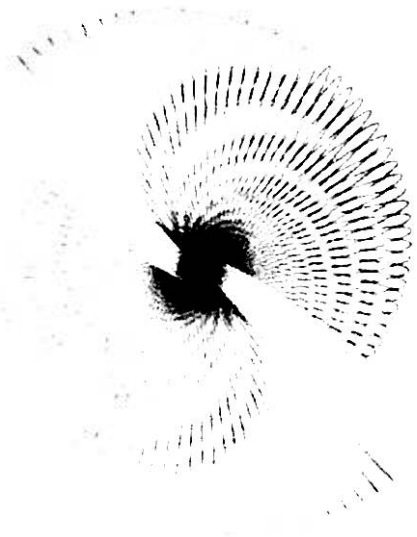
UNÍSSONO ROTATIVO 1:1

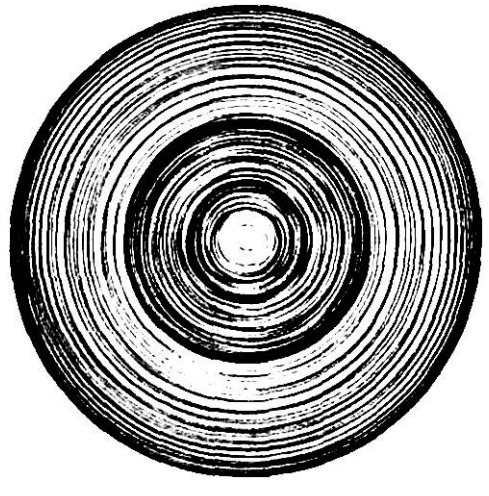
Ovos e conchas

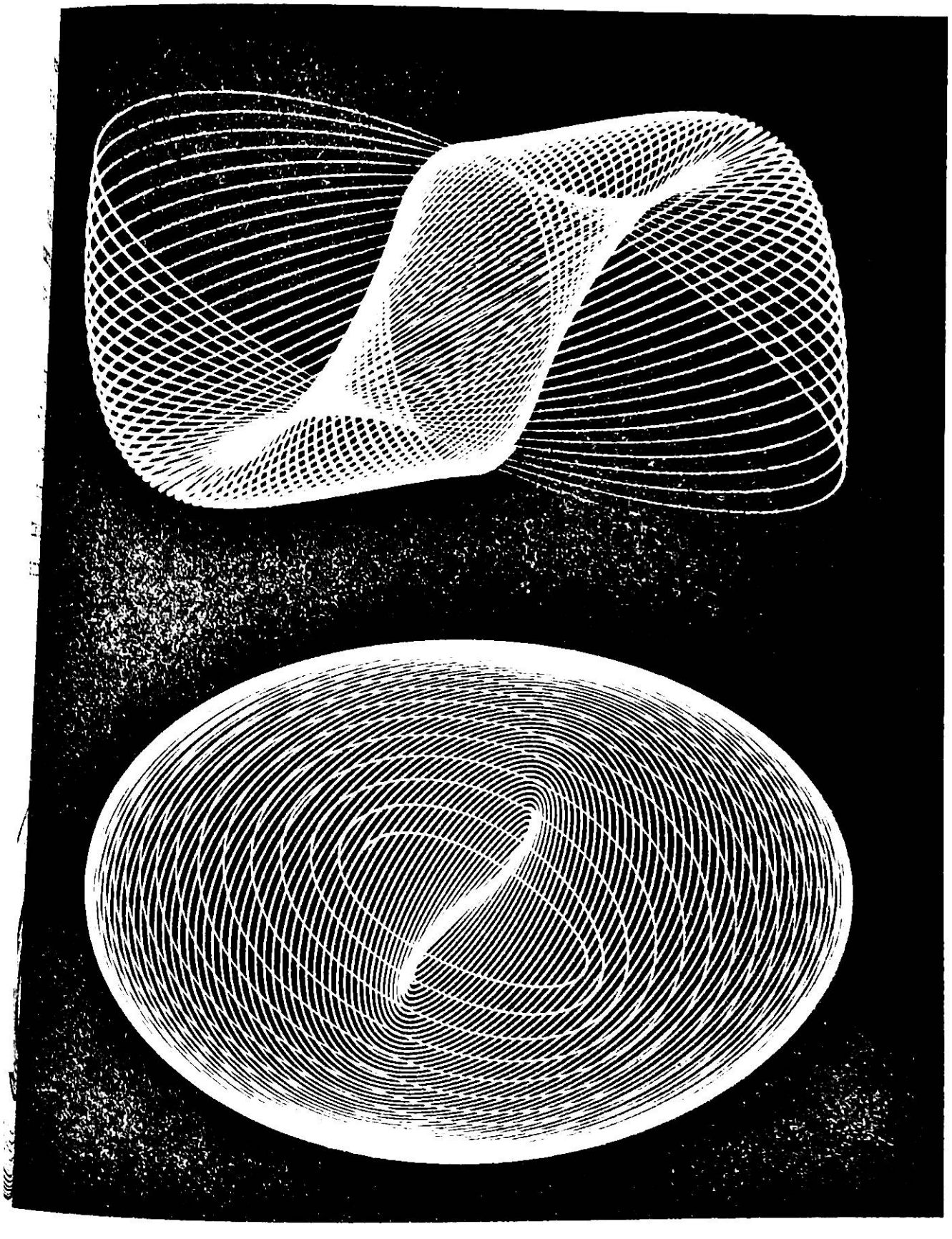
No início, é decepcionante: o uníssono, em movimento contrário, produz uma linha reta ao longo do papel, como a fase fechada do uníssono lateral. Do movimento concorrente dos pêndulos surge um simples ponto que se transforma em uma linha, lutando em direção ao centro; caneta e papel girando juntos.

Apesar disso, alterar o quase uníssono é recompensador. Em movimento contrário, aparece uma variedade de belas formas, frequentemente semelhantes a conchas, com hachuras finas. Para melhores resultados, desencoste a caneta do papel bem antes de o pêndulo atingir o equilíbrio.

Surpreendentemente, a partir do movimento concorrente de quase erro, surgem diversas formas esféricas ou ovais. Para produzir um "ovo", a caneta deve ser abaixada quando estiver sem fazer nada no centro. A partir daí, ela moverá em espiral para fora, atingindo certo limite antes de retornar, à medida que o balanço dos pêndulos se vai enfraquecendo. Uma vez que as linhas fiquem mais próximas em direção ao perímetro, o desenho parecerá tridimensional.







A OITAVA LATERAL 2:1

Figuras em forma de oito e asas

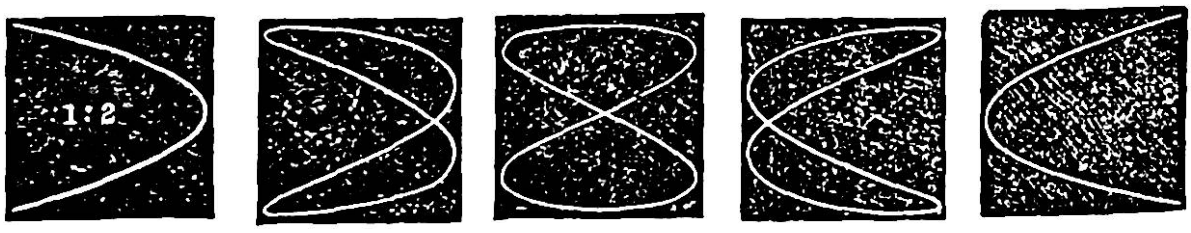
Depois do uníssono, a próxima harmonia por experimentar é a oitava. Aqui, há uma dificuldade técnica, pois o pêndulo variável tem de ser muito curto e, devido à maior quantidade de atrito envolvido, seu movimento se enfraquece rapidamente. O truque é adicionar um peso ao topo do pêndulo não variável, para retardá-lo (*ver página 185*); assim, o pêndulo variável pode ser mais longo.

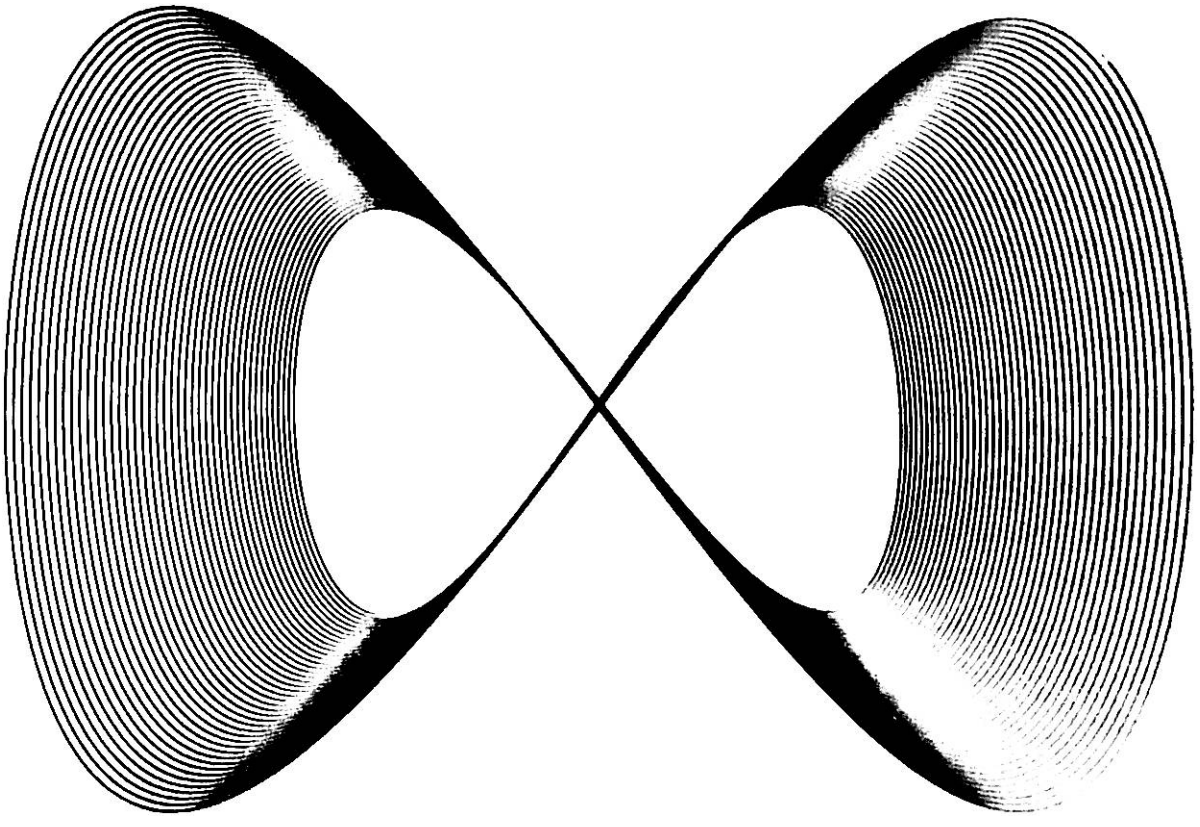
Infelizmente, isso significa que, para a oitava e outras relações nas quais um pêndulo é muito mais rápido que o outro, os marcadores teóricos têm de ser ignorados, e o ponto certo deve ser encontrado por tentativa e erro.

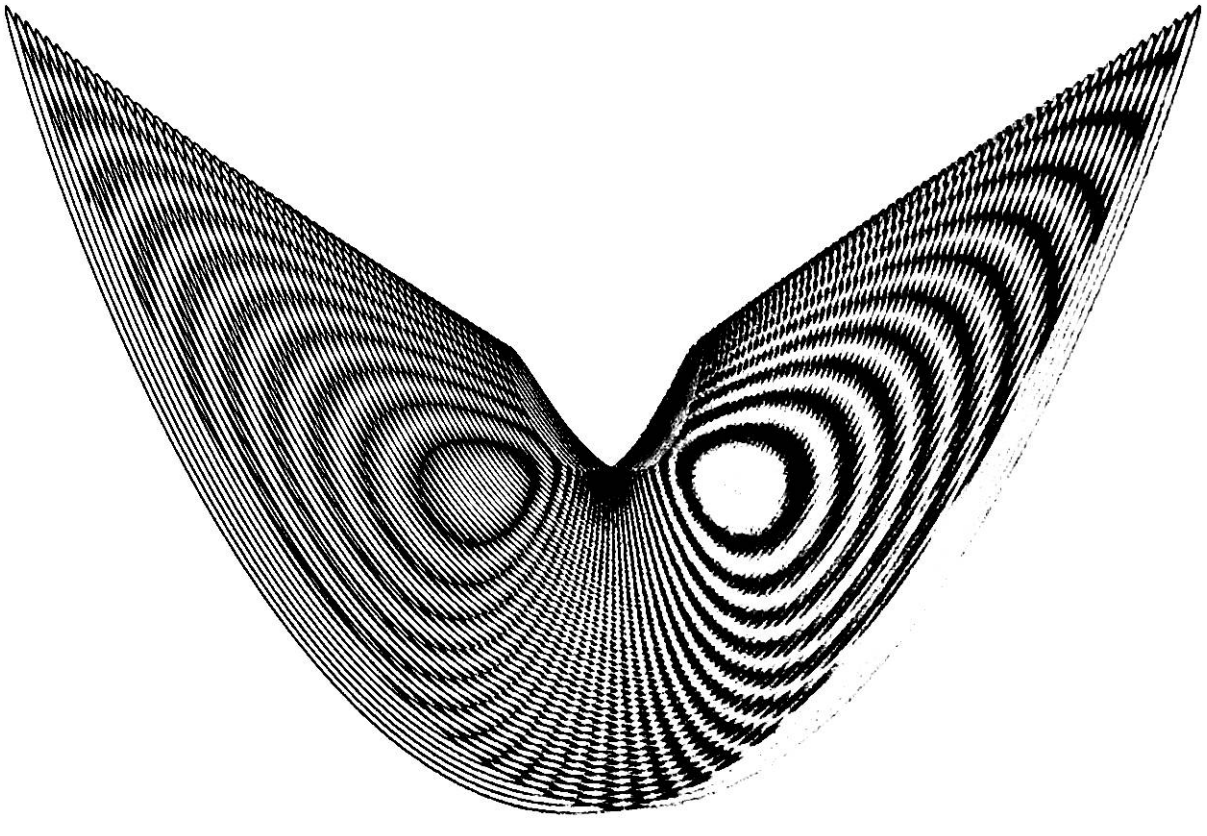
Com um pêndulo batendo duas vezes mais rápido, e em ângulo reto com o outro, a oitava em fase aberta produz uma figura com a forma de um oito (uma coincidência), que se vai repetindo em tamanhos menores conforme o pêndulo vai parando.

Se ambos os pêndulos forem soltos ao mesmo tempo, para produzir a fase fechada, o resultado é uma linha em forma de taça que se desenvolve em uma bela forma alada, com finas hachuras e padrões de interferência. Pequenos ajustes produzem variações notáveis.

A oitava é o primeiro sobretom (*ver página 194*).







A OITAVA ROTATIVA 2:1

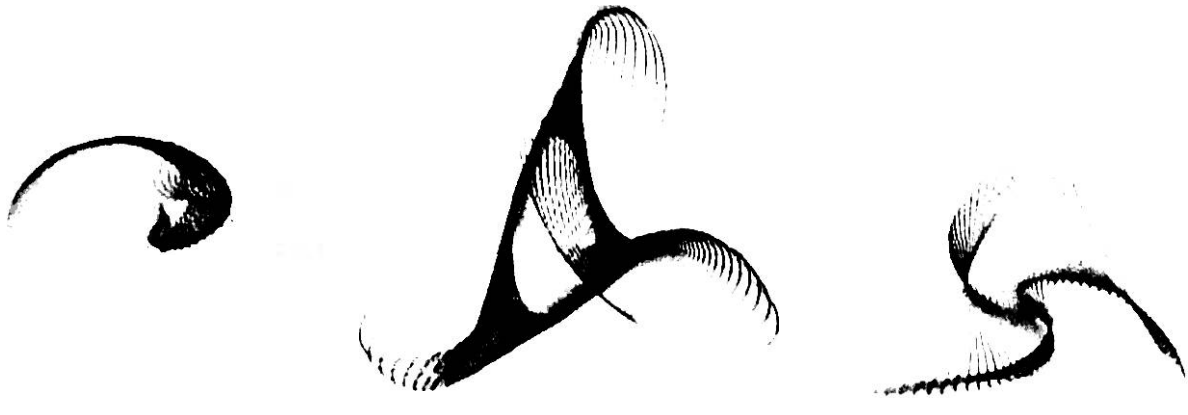
Corações e triângulos

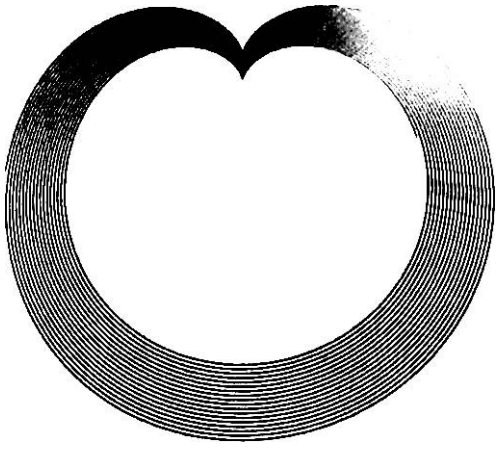
A partir do movimento rotativo com uma relação 2:1, surgem alguns dos mais belos desenhos produzidos pelo harmonógrafo: simples, graciosos e muitas vezes surpreendentes. Lembre-se, tudo o que acontece aqui é que dois movimentos circulares – um quase duas vezes mais rápido que o outro – são somados.

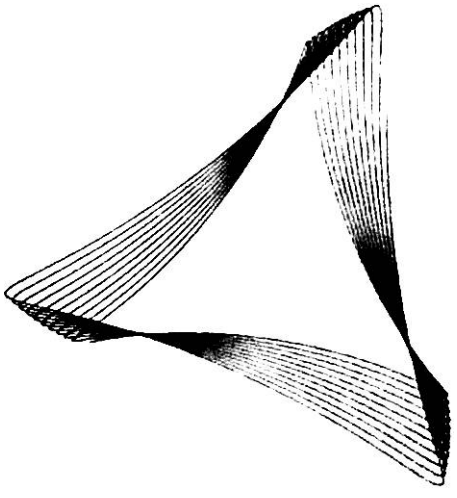
O movimento contrário produz uma figura em forma de trevo com muitas variações refinadas (*coluna direita, imagem ao lado*). Começando com um tamanho ou amplitude menor na rotação mais rápida, produzimos um triângulo ou uma pirâmide.

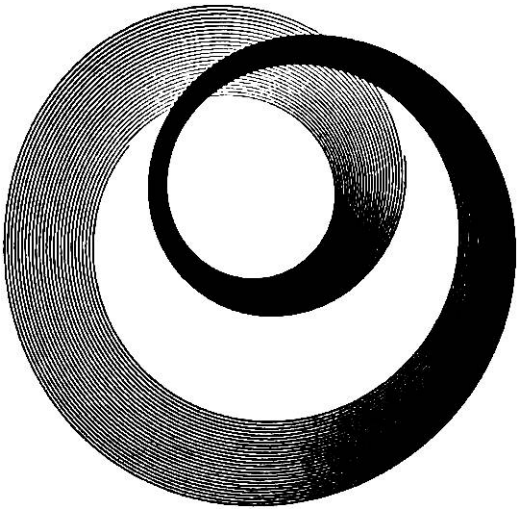
Em movimento simultâneo (concorrente), a oitava produz uma figura em forma de coração com um laço interno simples (*abaixo à esquerda, e coluna esquerda na imagem ao lado*). Aqui, há uma ligação com a antiga tradição da *música das esferas*,[8] pois essa é a forma que um observador em Urano atribuiria ao movimento de Netuno, ou vice-versa. Isso porque os planetas orbitam o Sol simultaneamente, Urano em 84 anos e Netuno em 165, executando aproximadamente uma oitava. O planeta Mercúrio canta, por si só, uma oitava perfeita, já que um de seus dias são dois de seus anos (*ver o Livro VI desta obra para muito mais informações sobre relações como estas*).

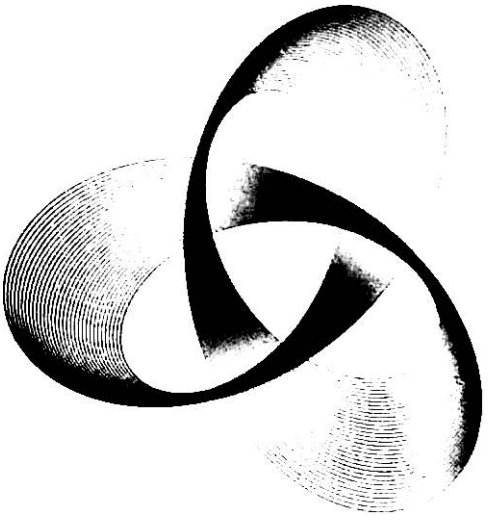
Quase erros nas relações dos desenhos rotativos colocam os modelos a girar (*linha inferior, imagem ao lado*).

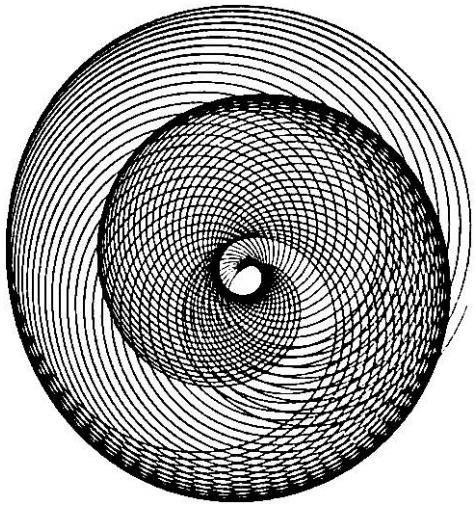


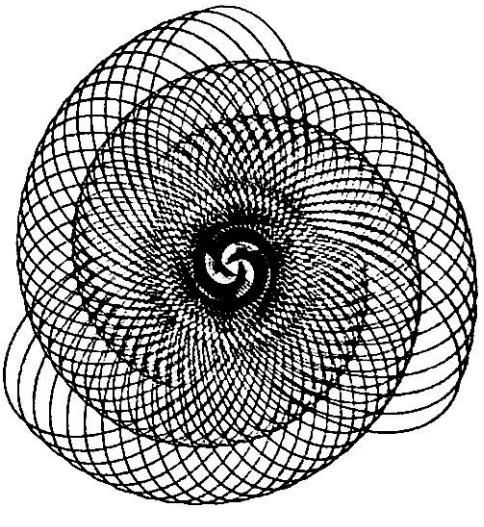












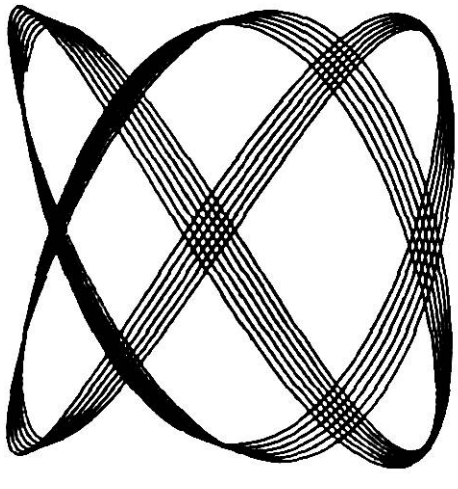
A QUINTA LATERAL 3:2

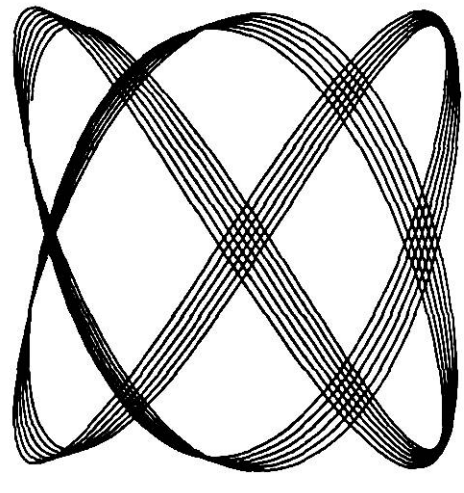
E o segundo sobretom 3:1

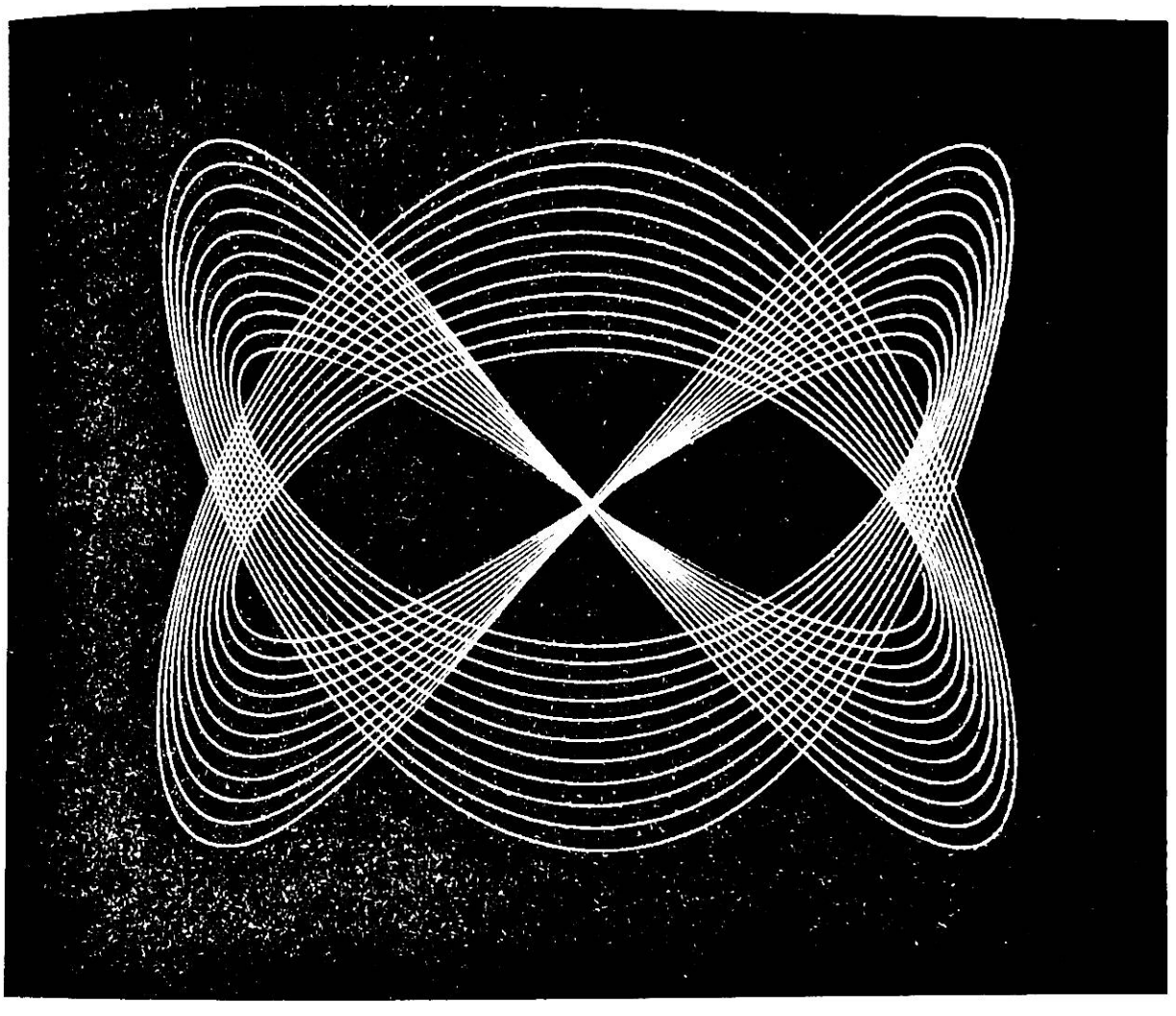
A quinta é a próxima harmonia por experimentar, intermediária entre a simplicidade do uníssono, a oitava e as harmonias mais complexas que se seguem.

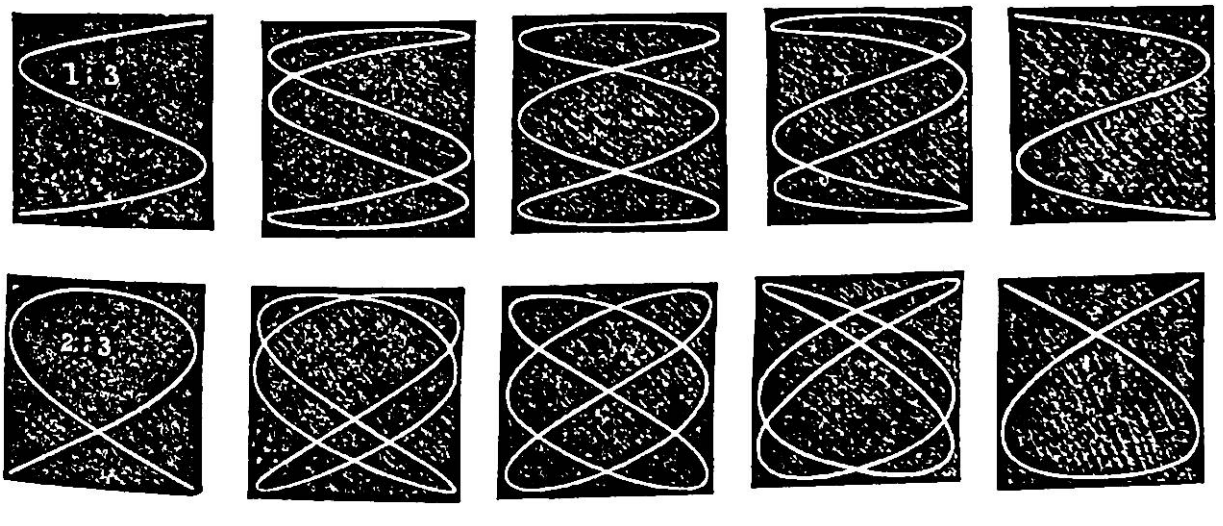
A partir do desenho de fase aberta, na página ao lado, pode-se observar que a quinta tem três voltas ao longo do lado horizontal, e duas ao longo do vertical. O número de voltas em cada lado proporciona a relação 3:2. Olhando para a oitava novamente, há duas voltas para uma; com o uníssono, por sua vez, há apenas um "laço", de qualquer maneira que se olhe para ele. Essa é a regra geral para todas as relações laterais do harmonógrafo; e, se uma harmonia aparecer inesperadamente durante os experimentos, em geral ela pode ser identificada através da contagem das voltas ou laços em dois lados adjacentes.

A quinta também aparece como 3:1, o segundo sobretom, uma quinta acima da oitava (*ver os desenhos de fases aberta e fechada, da relação 3:1, na página 189*). As relações dos desenhos que estão fora da oitava podem exigir um harmonógrafo de elíptica dupla (*ver página 393*). O par defasado abaixo é estereográfico. Se você ficar estrábico, ele saltará em 3D.








1 : 3
2 : 3

A QUINTA ROTATIVA 3:2

Corações envolvidos e cincos

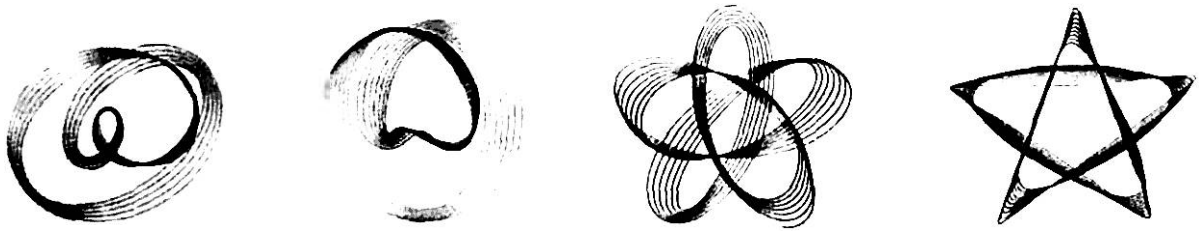
No harmonógrafo, a "sonoridade"[9] dos tons musicais é representada pela *amplitude*, os tamanhos relativos dos dois movimentos circulares. Em desenhos rotativos, isso é muito mais importante que a fase, que simplesmente orienta o modelo inteiro na página.

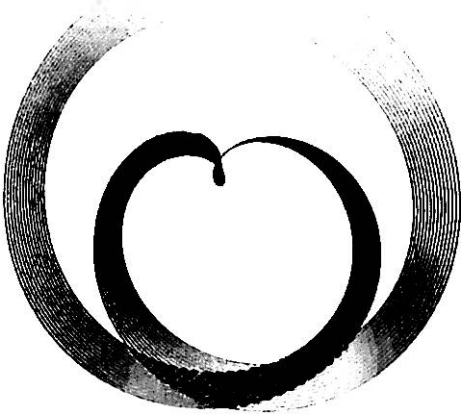
O terceiro desenho da imagem abaixo (*da esquerda para a direita*) mostra uma quinta rotativa em movimento contrário, em que o pêndulo com frequência mais alta, e movimento mais rápido, tem o balanço mais amplo. No desenho "pontiagudo" à direita, acontece o contrário. Em amplitudes iguais, todas as linhas passam através do centro (*ver tabela na página 391*).

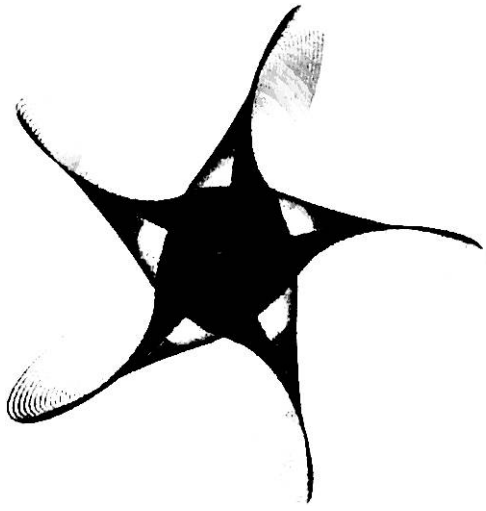
Os quatro primeiros desenhos na imagem ao lado mostram formas rotativas da relação 3:2, concorrentes à esquerda e contracorrentes à direita. A segunda linha mostra o efeito de um quase erro na harmonia, o que faz os padrões girar.

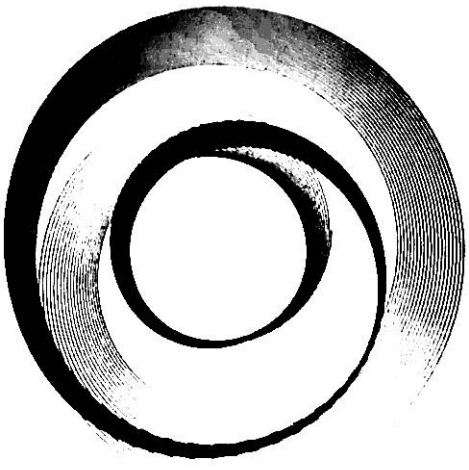
As duas figuras na terceira linha ao lado são do livro *Harmonic Vibrations*, de 1908, e mostram o segundo sobretom 3:1, uma quinta acima da oitava (3:1 = 2:1 x 3:2), também concorrente à esquerda e contracorrente à direita.

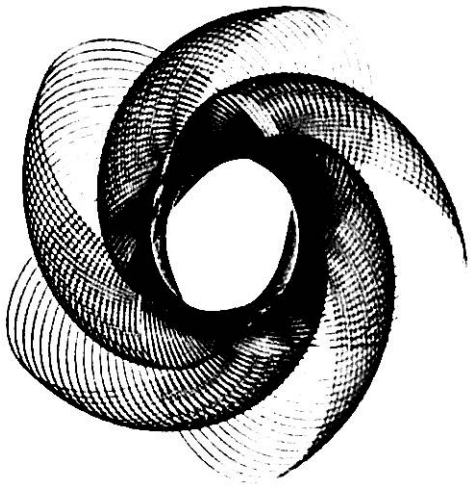
Com figuras concorrentes, o número de redemoinhos no centro é dado pela diferença entre os dois valores da relação. Assim, todos os padrões concorrentes, para os intervalos musicais primários 2:1, 3:2, 4:3, 5:4 e 5:6, têm um único coração em seu centro.

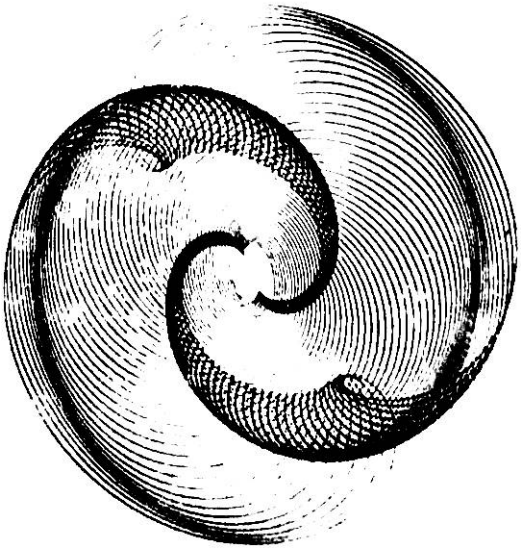


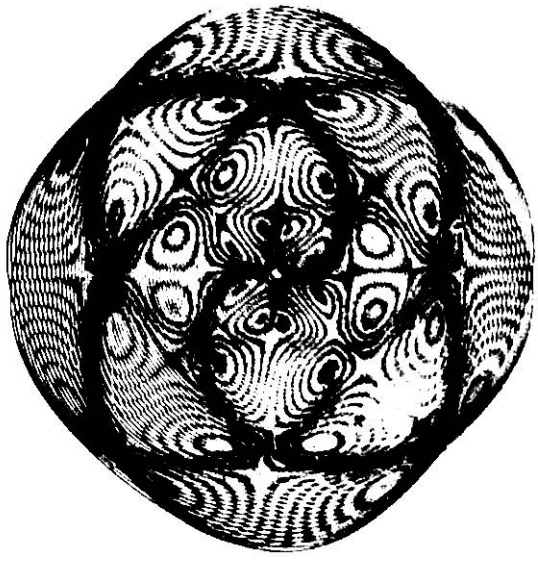












A QUARTA 4:3

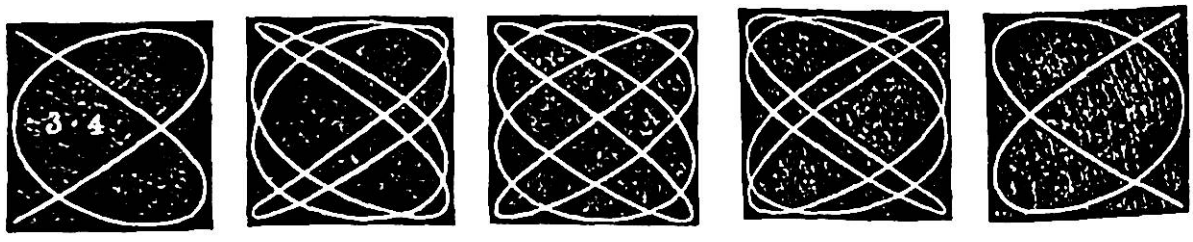
Com terças, sextas e sétimas

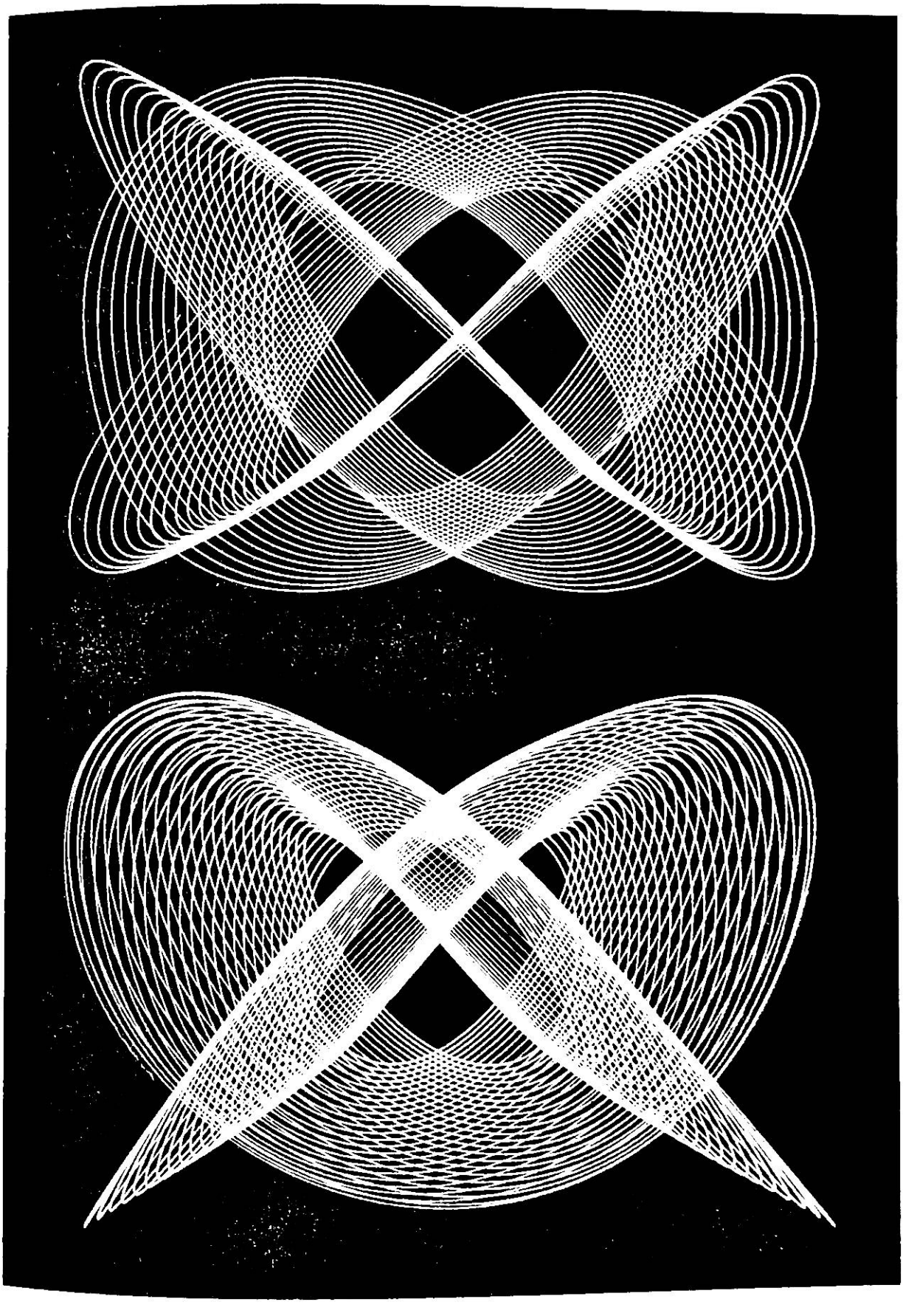
Neste ponto, fica evidente que cada harmonia exibe seu próprio caráter estético distinto. O uníssono é simples e assertivo. A oitava introduz um enfático florescer, e a quinta, ainda que relativamente simples, acrescenta elegância.

Com a quarta, o padrão torna-se mais complicado, embora o desenho ainda seja reconhecível sem precisar contar os laços. A figura superior, na imagem ao lado, mostra a quarta em fase aberta; a inferior, em fase fechada. Uma crescente sofisticação torna-se aparente, e algumas variantes de fase fechada e quase erro têm uma estranha qualidade exótica.

Ao introduzir as terças perfeitas da afinação diatônica, a complexidade aumenta. A terça maior (5:4) é encontrada abaixo da quarta, com o intervalo entre elas – um *semitom diatônico* – trabalhando como 4:3 ÷ 5:4 = 16:15. Uma quarta e uma terça maior (4:3 x 5:4) produzem a *sexta maior* (5:3), uma terça menor (6:5) abaixo da oitava, e um *tom* (10:9) acima da quinta. Da mesma forma, uma quarta e uma terça menor (4:3 x 6:5) criam a *sexta menor* (8:5), uma terça maior (5:4) abaixo da oitava, e um semitom (16:15) acima da quinta.

Uma quinta e uma terça maior (3:2 x 5:4) produzem a *sétima maior* (15:8), enquanto uma quinta e uma terça menor (3:2 x 6:5) produzem a *sétima menor* (9:5). Estes são os elementos da escala diatônica, ou, *simplesmente*, escala.





OUTROS HARMÔNICOS

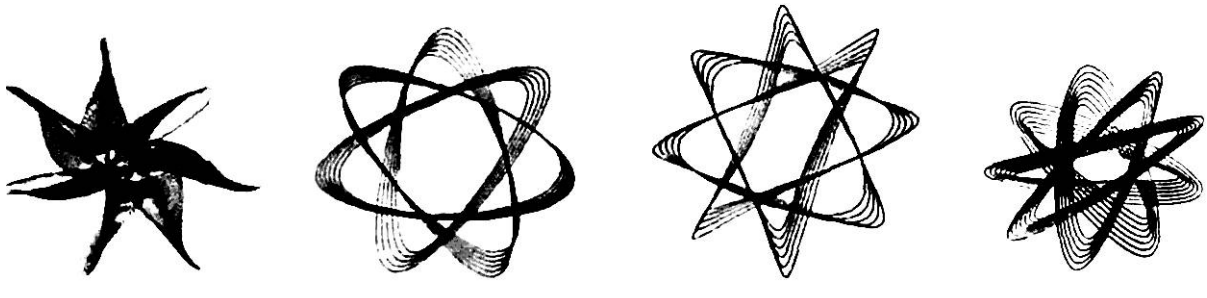
Relações de números mais altos e limite-sete[10]

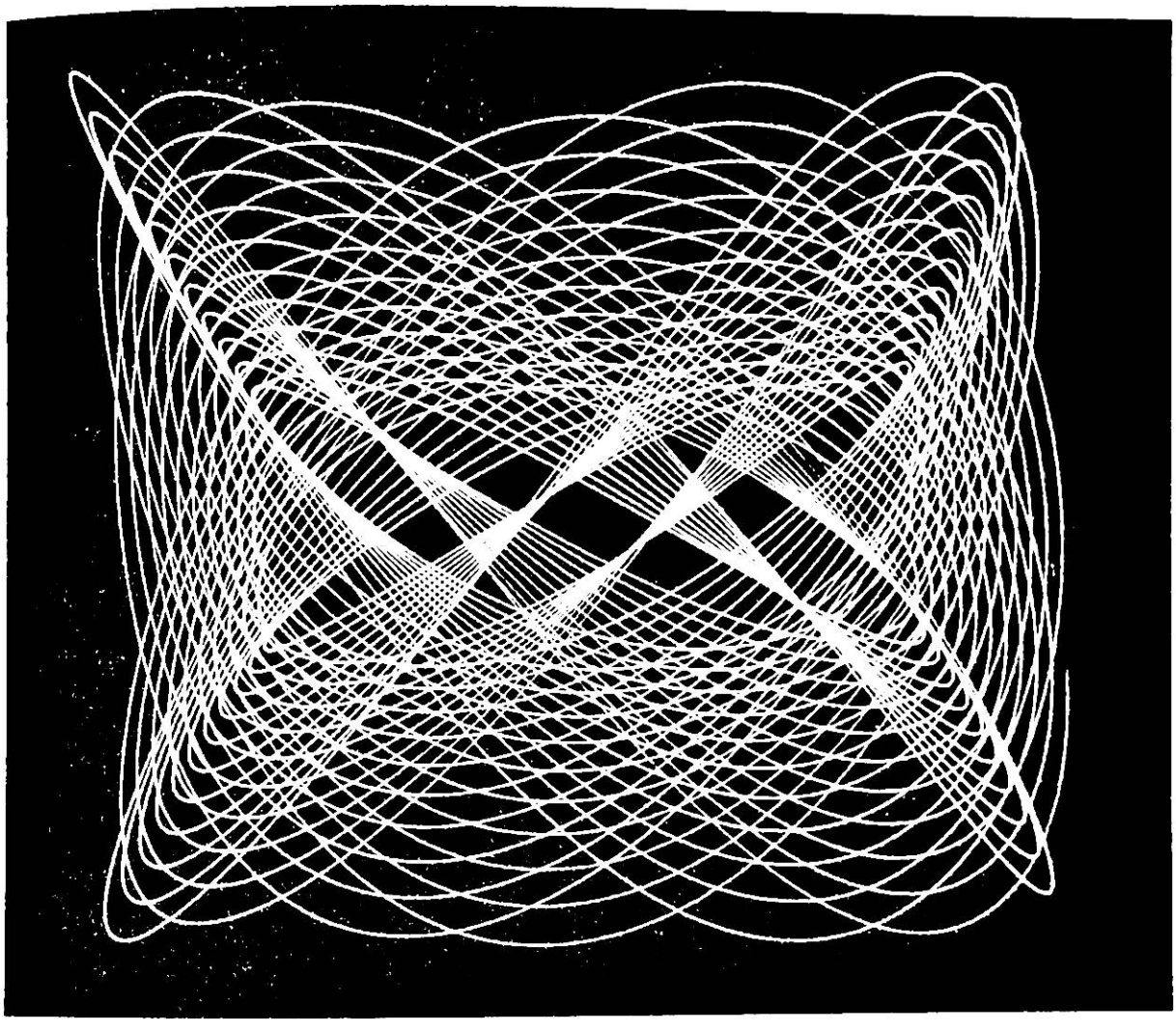
Conforme os números nas relações aumentam, torna-se mais difícil distinguir um intervalo de outro num relance: os laços têm de ser contados, e pequenas variações geram pouco valor estético. Um exemplo típico é a relação 7:5, apresentada na figura superior da imagem ao lado.

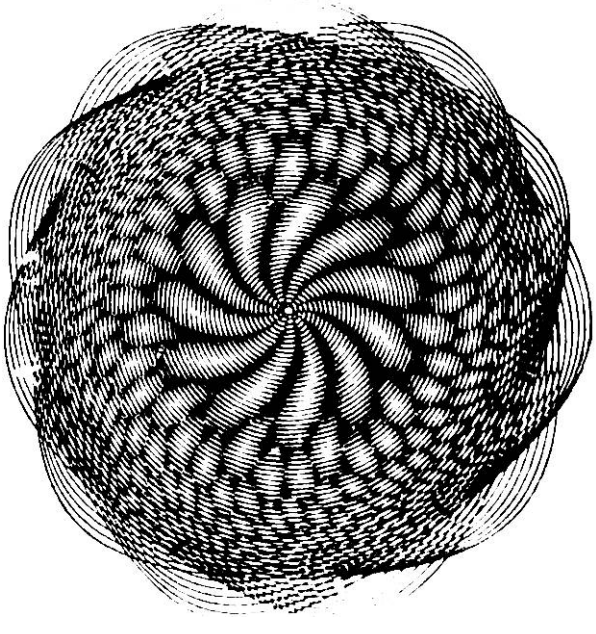
O movimento rotativo produz uma série de desenhos cada vez mais complexos, influenciados pela frequência, pela amplitude e pela direção relativas. Em movimento contrário, o número total de laços é igual à soma dos dois números da relação. Com o movimento concorrente, os nós viram-se para dentro e sua quantidade é igual à diferença entre os dois números da relação.

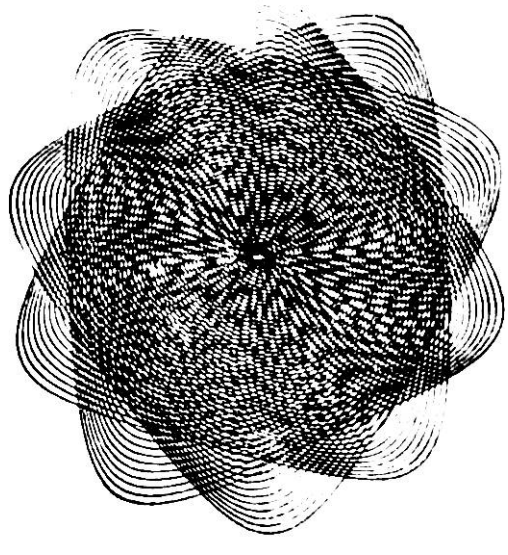
Os desenhos da imagem abaixo, produzidos pelo movimento contrário, mostram uma quarta (4:3), outra quarta, uma sexta maior (5:3) e uma terça maior (5:4). Já as figuras inferiores da imagem ao lado, desenhadas há mais de cem anos, mostram modelos da décima primeira justa 8:3, de amplitudes desiguais (uma oitava e uma quarta), e a relação 7:3, que é encontrada na afinação de *jazz* limite-sete (não tratada neste livro).

Duas oitavas e uma terça maior (4:1 x 5:4) equivalem a 5:1, o quarto sobretom, que difere de quatro quintas $(3:2)^4$ como a nossa amiga 80:81, a coma sintônica (*ver página 196*). Na afinação *mesotônica*, popular durante a Renascença, esse desajuste foi resolvido, e as quintas foram abrandadas muito ligeiramente, para $5^{1/4}$ ou 1,4953, saindo do tom para melhor soar às terças e às sextas.









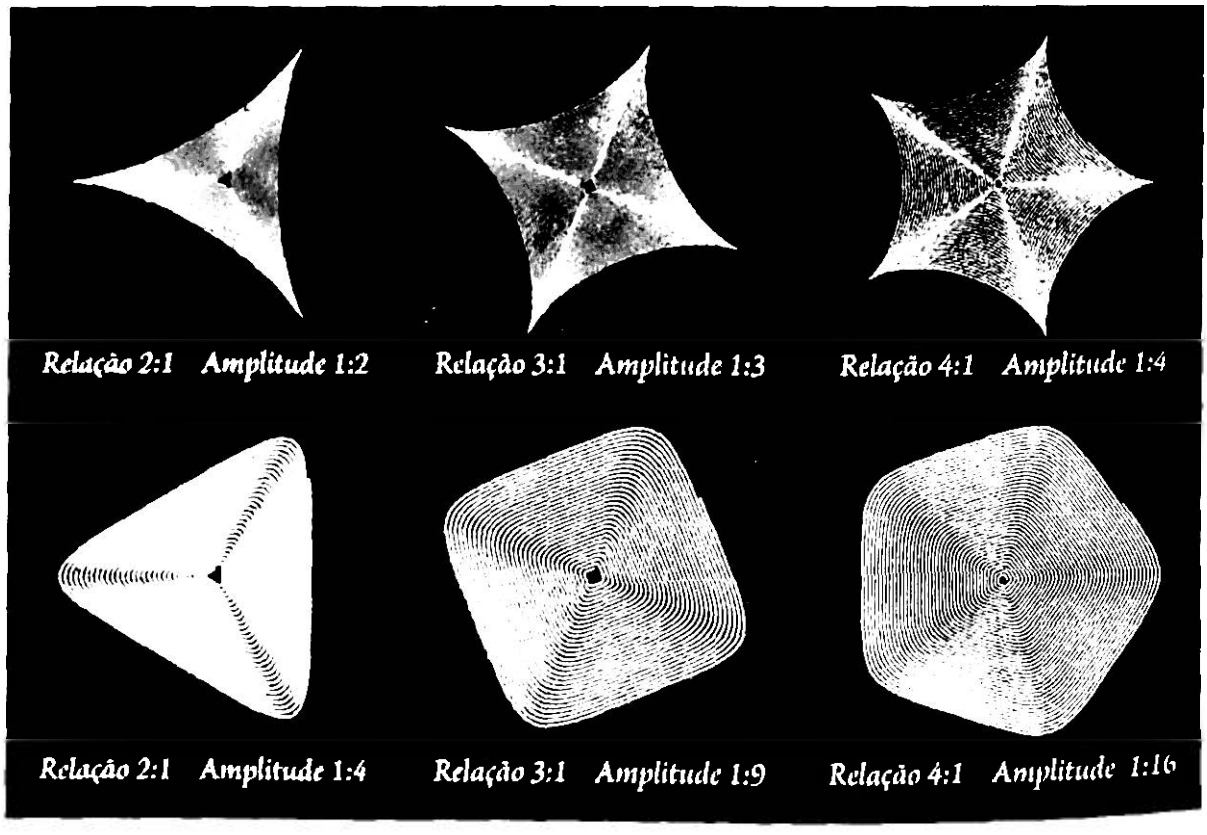
AMPLITUDE

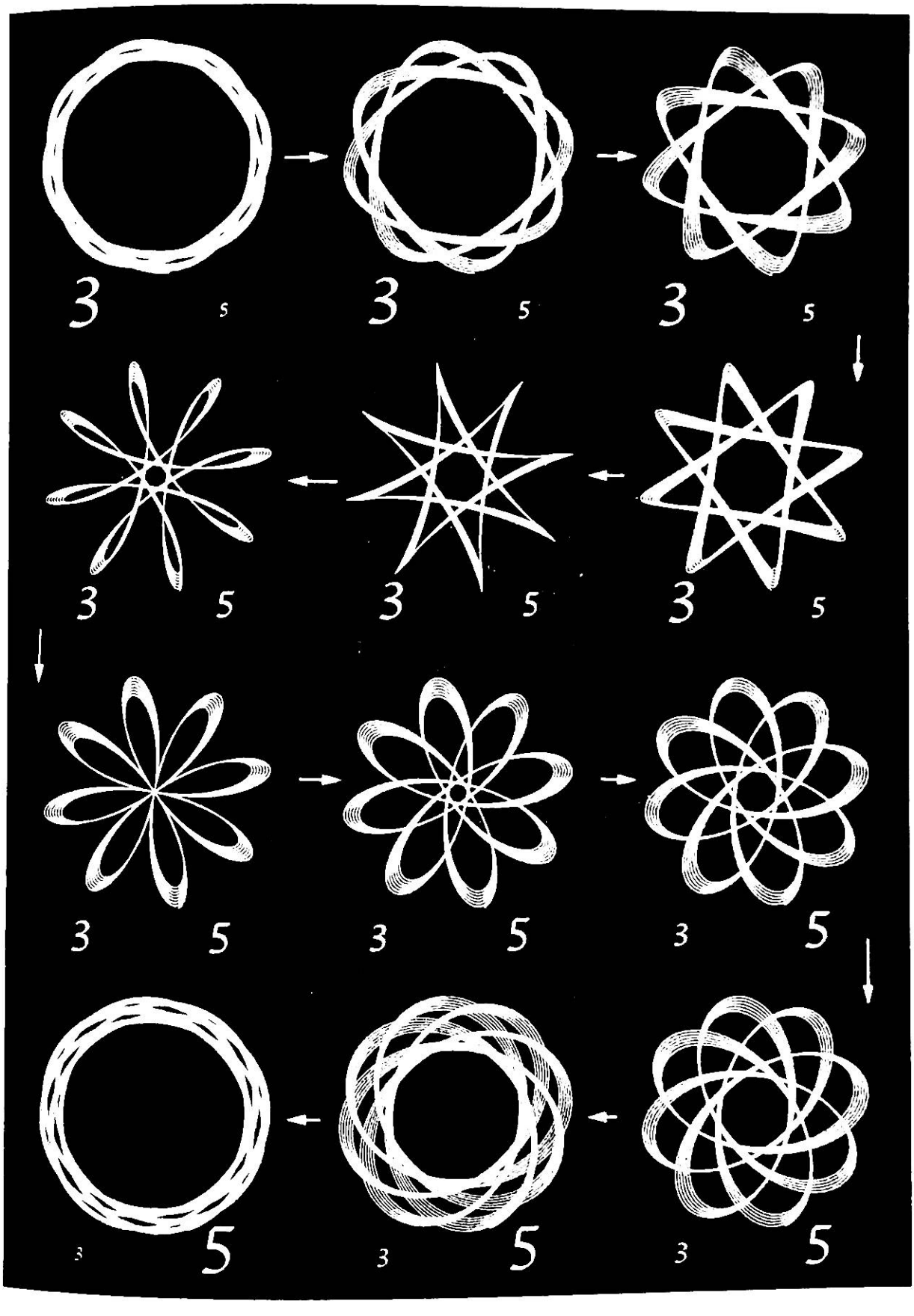
Círculos, polígonos, flores e outro círculo

Muitas variações podem ser obtidas a partir de uma relação rotativa, tendo tamanhos desiguais nos dois movimentos circulares. Na imagem ao lado, vemos duas frequências que se relacionam por uma sexta maior (5:3). Uma nota com frequência mais baixa começa por ser influenciada por outra de frequência mais alta, e combina-se com ela para, em seguida, ser mais ou menos substituída por esta nota. Quando as duas notas se encontram em igual volume, todas as linhas passam através do centro (*ver páginas 390-91*). Note que a sequência não é simétrica.

Na imagem abaixo, vemos os três primeiros sobretons. Para as formas mais pontiagudas, simplesmente invertemos as amplitudes. Para os polígonos, primeiro as elevamos ao quadrado.

Se você já brincou com um "espirógrafo",[11] sabe que a harmonia é determinada pela relação entre as engrenagens, e é a amplitude que sofre o ajuste quando mudamos a caneta para outro orifício na peça que gira.




3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5

DIFICULDADES DE AFINAÇÃO

A coma pitagórica

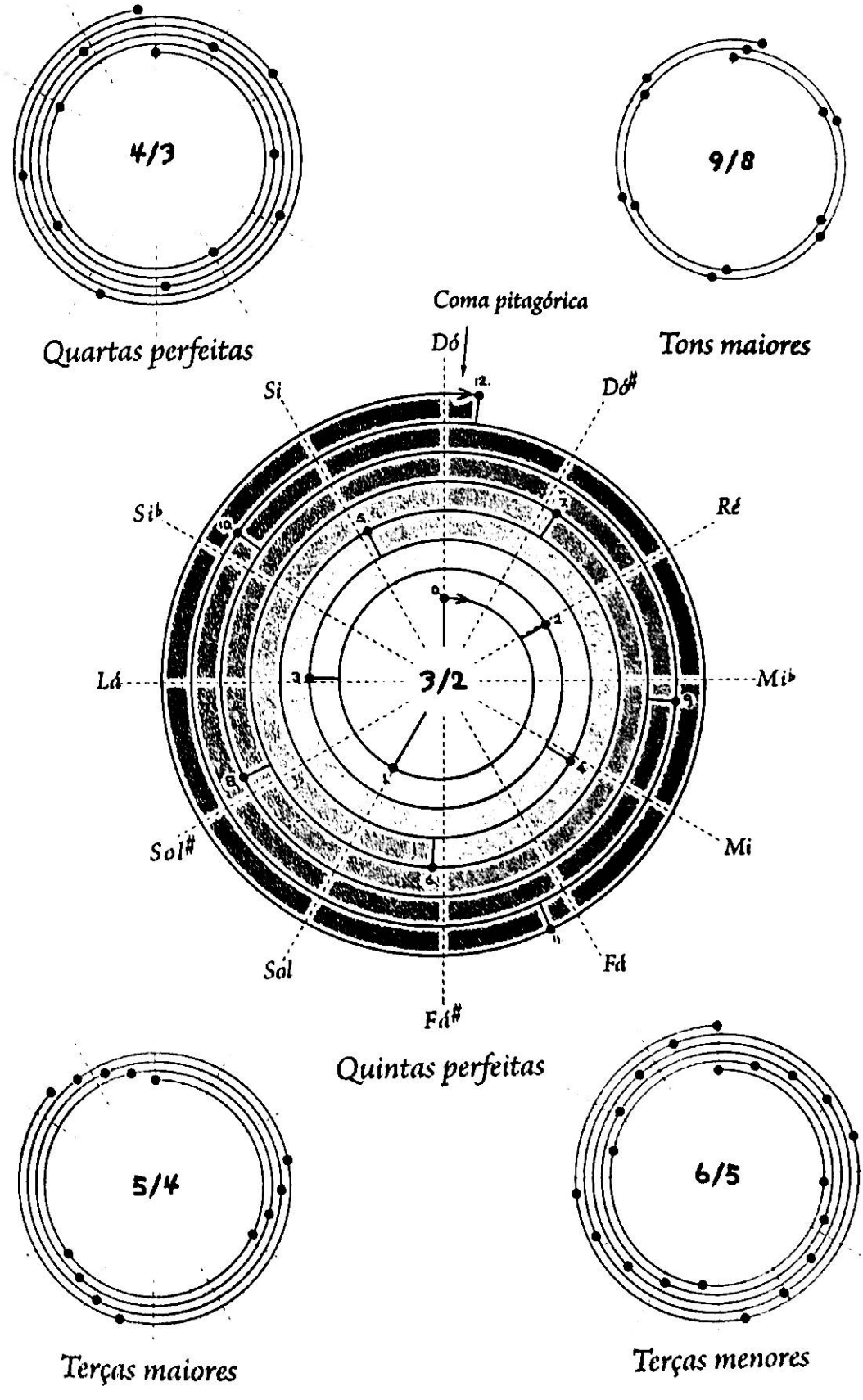
Deixando de lado os desenhos do harmonógrafo e retornando aos princípios da música, você pode ter notado que os intervalos musicais nem sempre estão em harmonia uns com os outros. Um exemplo famoso é a relação entre a oitava e a quinta perfeita (3:2).

Na figura central da imagem ao lado, uma nota é tocada no meio, no ponto 0 (zero), e vai subindo através de quintas perfeitas para gerar a sequência Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, etc. (*numeradas na figura, com cada volta da espiral representando uma oitava perfeita*). Após doze quintas, subimos sete oitavas, mas a figura mostra que ultrapassamos levemente a oitava final, elevando meio tom. Isso ocorre porque $(3/2)^{12} \approx 129{,}75$, ao passo que $(2)^7 = 128$. A diferença é conhecida por *coma pitagórica*, proporcionalmente 1,013643, aproximadamente 74:73.

Se continuássemos em movimento espiral, acabaríamos por descobrir, como os chineses fizeram muito tempo atrás, que 53 quintas perfeitas (ou *Lü*) quase se igualam exatamente a 31 oitavas. As primeiras cinco quintas produzem o padrão das notas produzidas pelas teclas pretas em um piano, a escala *pentatônica* oriental (*ver as páginas 274 e 386*).

As figuras menores na imagem ao lado mostram progressões repetidas da terça maior (5:4), da terça menor (6:5), da quarta (4:3) e do tom inteiro (9:8), todas comparadas a uma oitava invariante.

É estranho. Com toda essa interação harmoniosa de números, esperaríamos que todo o sistema fosse um conjunto precisamente coerente, mas não o é. Aqui há ecos da visão científica de um mundo formado por uma simetria violada, sujeita à incerteza quântica e (até agora) desafiando uma "teoria de tudo" abrangente e exata. Será por isso que o "quase erro" é tantas vezes mais belo que a perfeição?


4/3
Quartas perfeitas
9/8
Tons maiores
Coma pitagórica
Dó
Dó#
Ré
Mi♭
Mi
Fá
Fá#
Sol
Sol#
Lá
Si♭
Si
3/2
Quintas perfeitas
5/4
Terças maiores
6/5
Terças menores

TEMPERAMENTO IGUAL

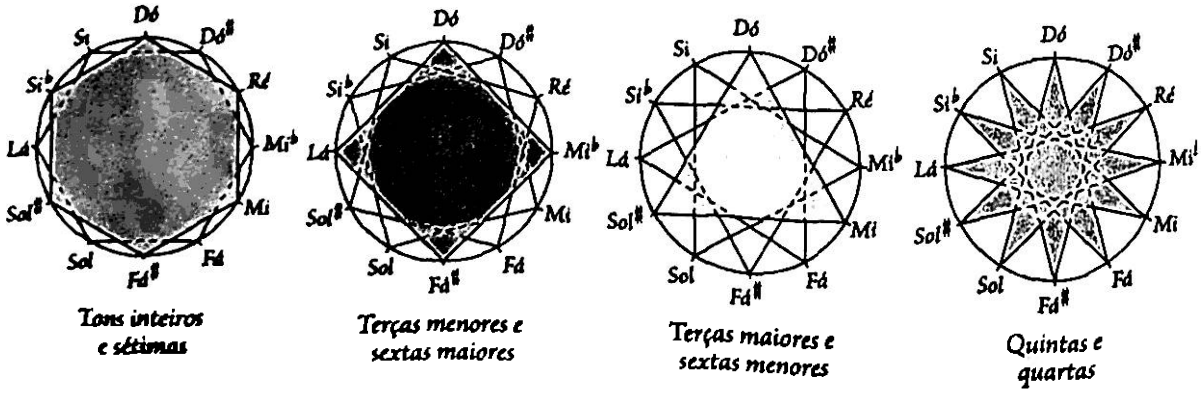
Mudança de tonalidade facilitada

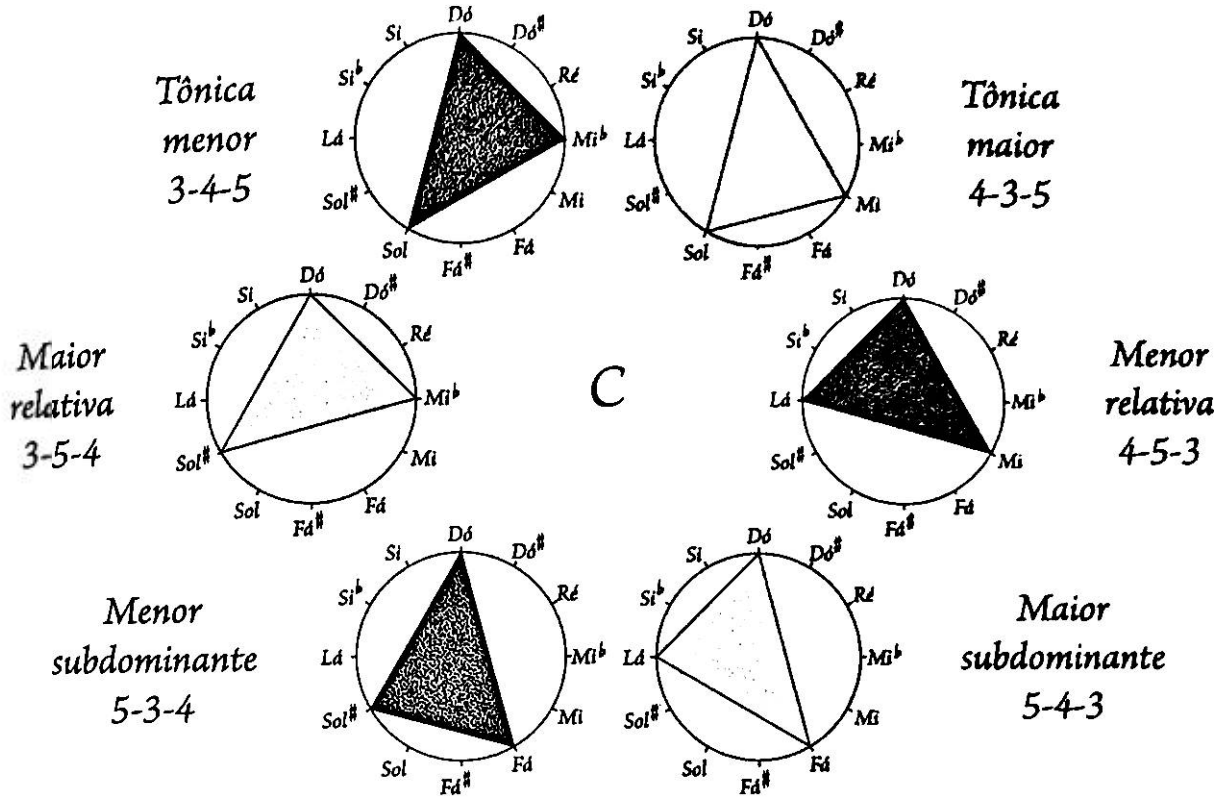
Embora as afinações iniciais permitissem que muitos harmônicos puros fossem tocados, era difícil mudar para outras tonalidades; só se podia realmente mudar o *modo*[12] (*ver página 388*). Muitas vezes, os músicos tinham de afinar seus instrumentos novamente, ou utilizar notas extras reservadas para escalas específicas (a afinação clássica indiana utiliza 22 notas).

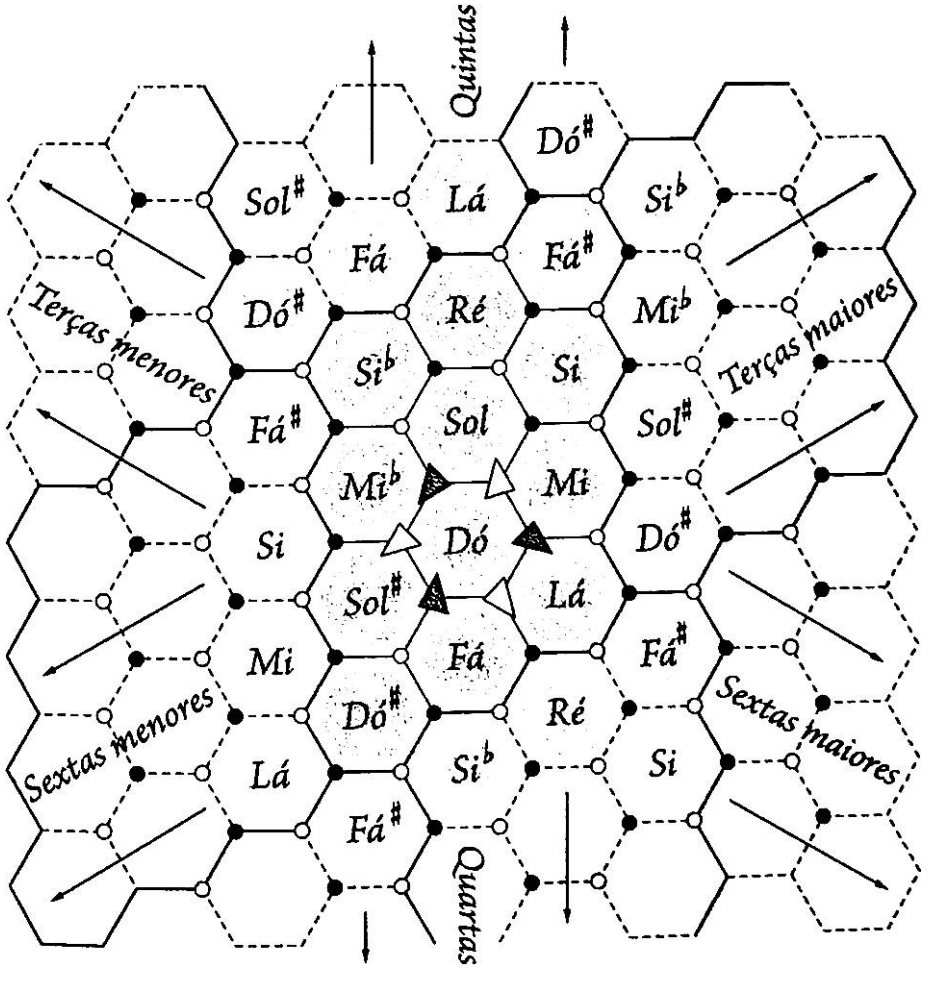
No século XVI, desenvolveu-se uma nova afinação, que revolucionou a música ocidental, predominando até hoje. A oitava é dividida em doze intervalos *iguais* fixos, com cada *semitom cromático* equivalendo a 1,05946 vezes o valor de seu vizinho ($2^{1/12}$, cerca de 18:17).

As doze notas igualmente espaçadas são dispostas em círculo, como na imagem abaixo. Agora, seis tons inteiros (bemol) geram uma oitava, do mesmo modo que quatro terças menores (bemol acentuado) ou três terças maiores (sustenido). A coma pitagórica desaparece, assim como todos os intervalos perfeitos, exceto a oitava. É um truque inteligente que nos permite alterar a tonalidade facilmente – algo um pouco "fora do tom" que ouvimos todos os dias.

As tríades são acordes de três notas. Na figura superior da imagem ao lado, vemos tríades maiores e menores que envolvem a nota Dó, na tonalidade de Dó. Utilize a grade mestre (*figura inferior, imagem ao lado*) para navegar no mar do temperamento igual e perceber alguma tríade 3-4-5 (um acorde de três notas) em três tonalidades distintas (*a partir de Malcom Stewart*).




Tônica menor 3-4-5
Tônica maior 4-3-5
Maior relativa 3-5-4
C
Menor relativa 4-5-3
Menor subdominante 5-3-4
Maior subdominante 5-4-3
Dó
Dó#
Ré
Mi♭
Mi
Fá
Fá#
Sol
Sol#
Lá
Si♭
Si


Quintas
Quartas
Terças menores
Terças maiores
Sextas menores
Sextas maiores
Dó#
Sol#
Lá
Si♭
Fá
Fá#
Dó#
Ré
Mi♭
Si♭
Si
Fá#
Sol
Sol#
Mi♭
Mi
Si
Dó
Dó#
Sol#
Lá
Mi
Fá
Fá#
Dó#
Ré
Lá
Si♭
Si
Fá#

O CALEIDOFONE

Rabiscos de uma haste vibratória

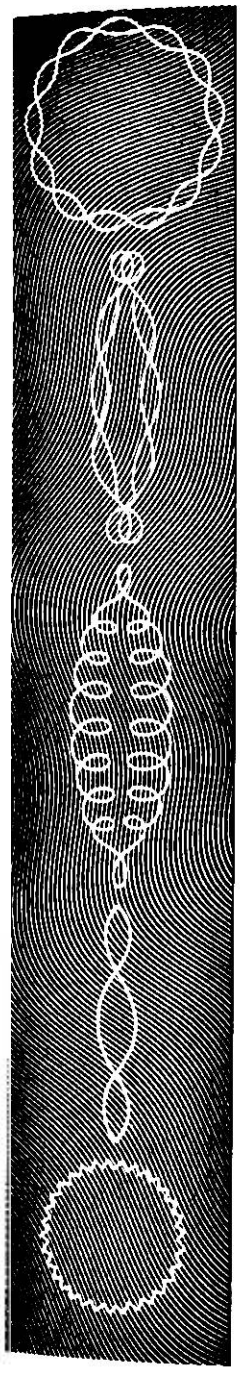
Apesar da invenção do temperamento igual, os cientistas continuaram a investigar os harmônicos de razão pura. Um interessante precursor do harmonógrafo, no século XIX, foi o *caleidofone*, inventado por Sir Charles Wheatstone, em 1827. Assim como o harmonógrafo, ele exibia imagens de harmônicos.

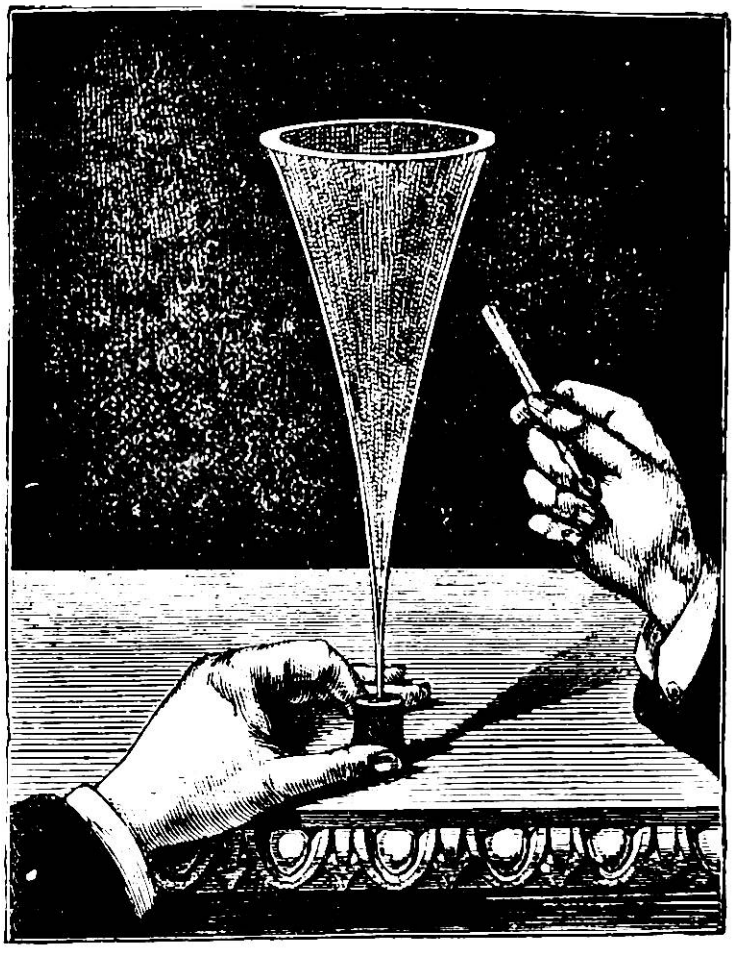
A versão mais simples desse dispositivo consiste em uma haste de aço com uma das extremidades firmemente fixada em um pesado suporte de metal, e a outra presa a uma pequena conta ou esfera de vidro prateada, de modo que, ao ser iluminada por um holofote, um ponto de luz brilhante é lançado sobre uma tela colocada em frente ao caleidofone. Dependendo de como o caleidofone é atingido pela primeira vez, e subsequentemente golpeado com um arco de violino, pode produzir-se um número surpreendente de padrões (*alguns são mostrados ao lado*).

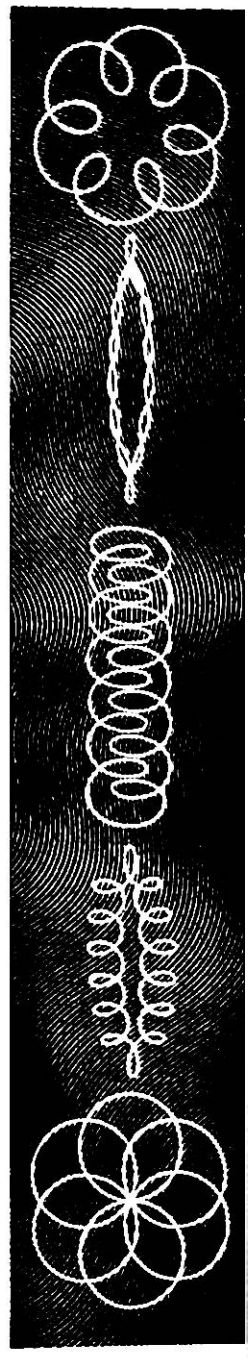
O caleidofone não se comporta como uma corda, uma vez que sua haste só é fixa em uma das extremidades. Assim como os instrumentos de sopro, que normalmente são abertos em uma extremidade, a matemática de seus harmônicos e sobretons é um pouco mais complicada que a do monocórdio ou do harmonógrafo; e as posições dos nós são mais variáveis (*as figuras inferiores, na imagem ao lado, mostram alguns dos sobretons iniciais*).

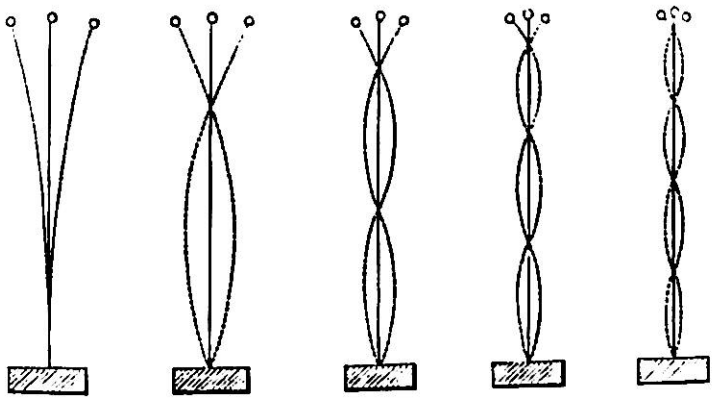
Outras versões do caleidofone utilizavam hastes de aço com seções transversais, ovais ou quadradas, para gerar outros padrões. Wheatstone costumava referir-se à sua invenção como um "brinquedo filosófico", e, de fato, ao olharmos para esses padrões, é fácil nos sentirmos maravilhados com sua beleza simples.

Para fazer o seu próprio caleidofone, tente fixar uma agulha de tricô em uma morsa[18] e grudar uma esfera de prata, ou uma bola de decoração de bolo, à extremidade livre. Depois, utilize ou crie uma fonte de luz para gerar o ponto brilhante.









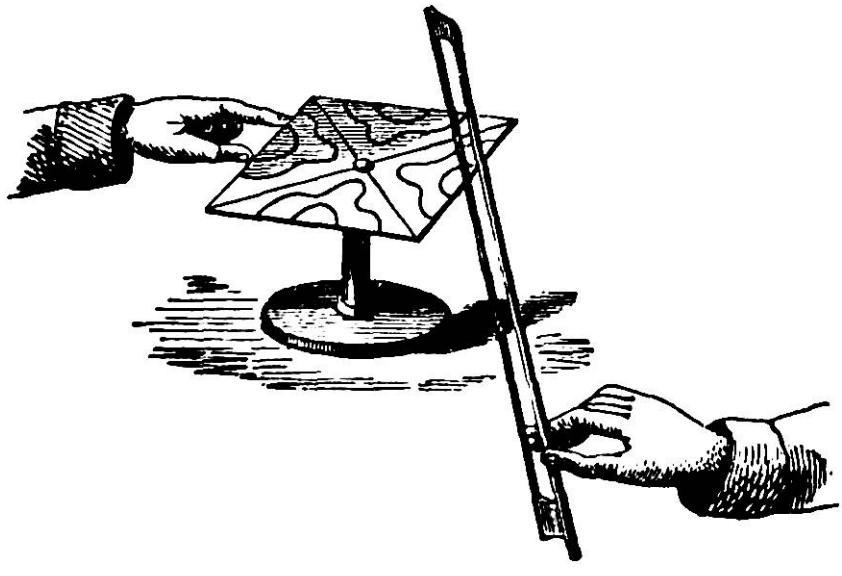
PADRÕES DE CHLADNI

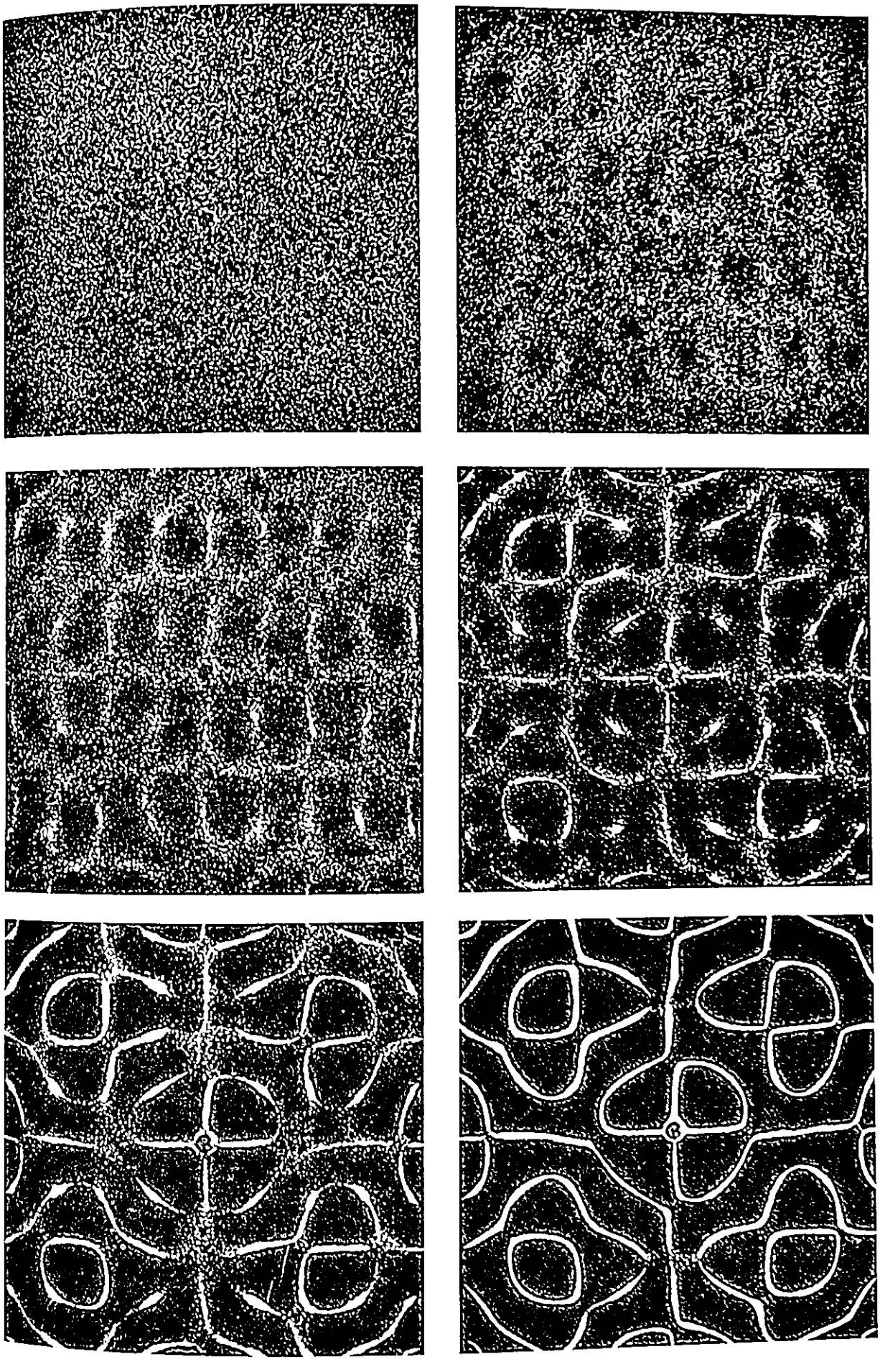
Superfícies vibratórias

Até agora, consideramos apenas cordas vibratórias e outros sistemas simples, mas também é possível fazer as superfícies vibrar, e elas podem igualmente exibir padrões harmônicos ou ressonantes.

Em 1787, Ernst Chladni descobriu que, se espalhasse areia fina sobre uma placa quadrada e a curvasse, ou a fizesse vibrar, então certas notas, geralmente harmônicos uns dos outros, davam origem a diferentes padrões na areia sobre a placa. Tal como acontece com o harmonógrafo, outros tons desarmônicos produziam uma confusão caótica. Por vezes, ele percebia que outros padrões podiam ser criados ao tocar a lateral da placa, em divisões harmônicas de seu comprimento (*imagem abaixo*). Isso criou um nó estacionário (*como a pena, na página 194*). Seu trabalho posterior revelou que placas circulares geravam padrões circulares, placas triangulares geravam padrões triangulares, e assim por diante.

As seis imagens ao lado são do livro *Cymatics*,[14] de Hans Jenny, um dos textos seminais sobre esse assunto. A imagem da vibração aparece gradualmente, com a areia encontrando seu caminho para as partes fixas da placa, conforme o volume aumenta regularmente através da sequência.





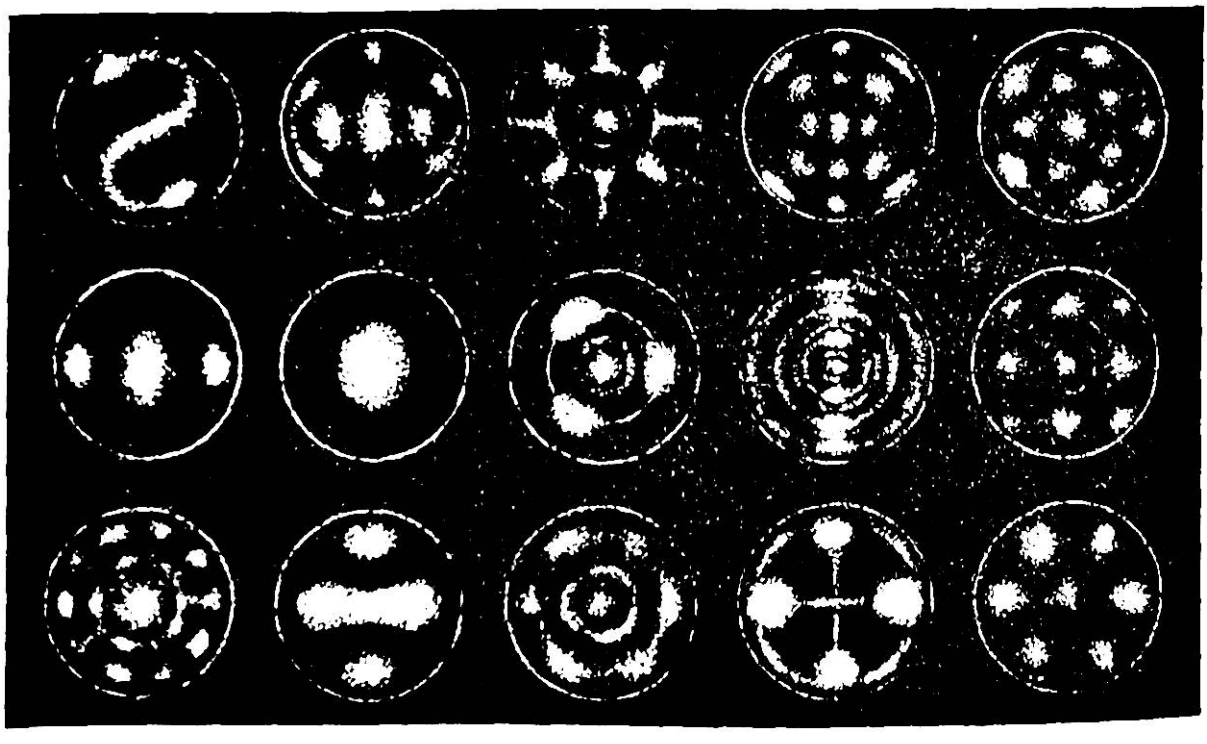
IMAGENS DE RESSONÂNCIA

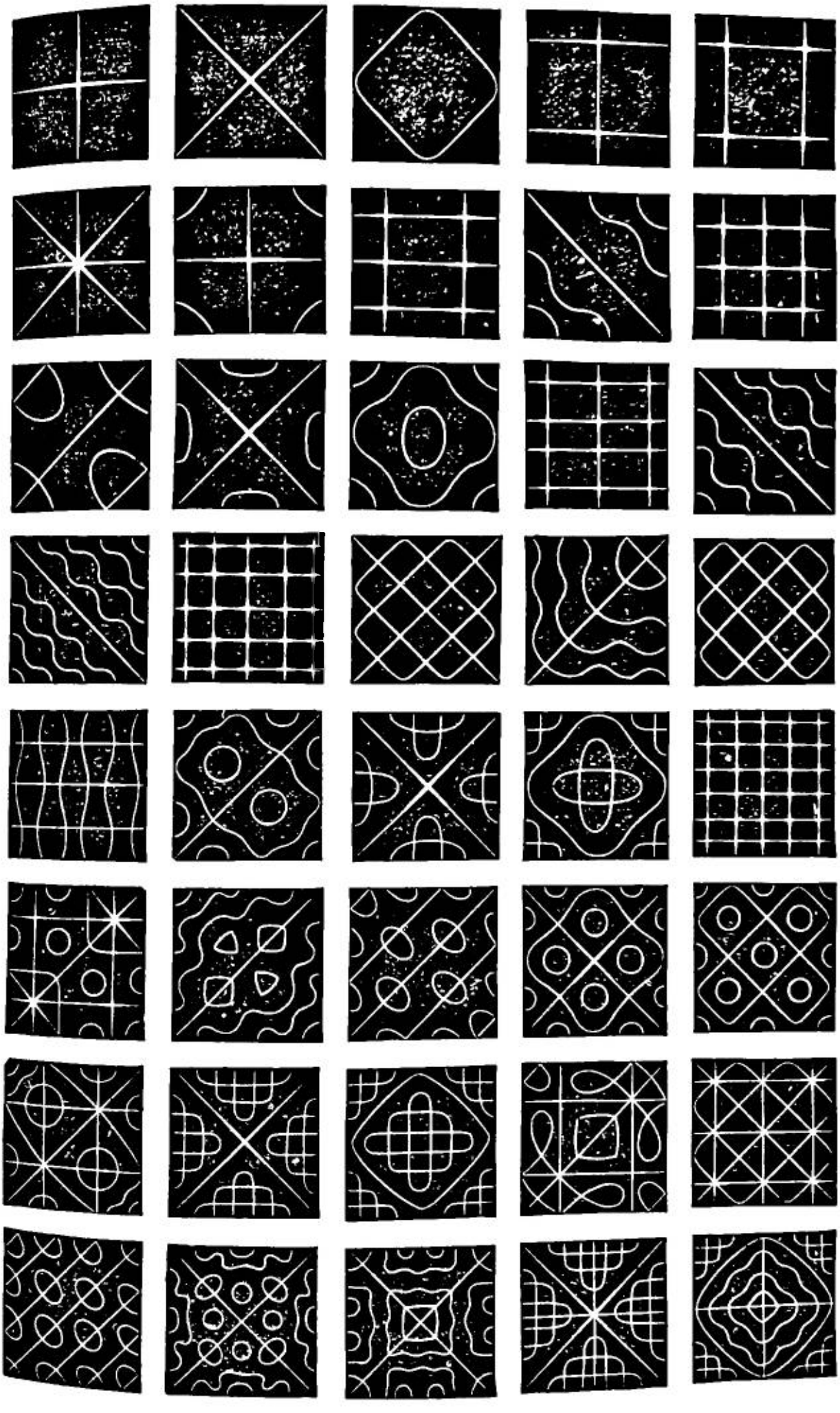
E como cantar uma margarida

Um conjunto mais completo das figuras de Chladni é apresentado ao lado, todas duplas ou quádruplas, pois foram produzidas sobre uma placa quadrada.

Abaixo, no entanto, vemos algumas figuras circulares que foram fotografadas por Margaret Watts Hughes, uma cantora vivaz, na década de 1880. Ela utilizava um dispositivo engenhoso chamado *eidofone*, que consistia em uma base oca com uma membrana esticada sobre ela, e um tubo ligado a essa base com um bocal na outra extremidade. Enquanto a Sra. Hughes cantava escalas diatônicas pelo tubo, um fino pó de licopódio, espalhado sobre a tensa membrana, de repente ganhava vida, saltando para longe de alguns lugares e permanecendo imóvel em outros, produzindo formas que ela comparava a várias flores.[15]

Mais uma vez, vemos formas reconhecíveis e formas que aparecem a partir de ressonância e harmonia simples.





Notas da Tradutora

[1] Bailie Hugh Blackburn (1823-1909) foi um matemático escocês e professor da Universidade de Glasgow por cerca de trinta anos, sucedendo a seu pai, James Thomson, na cadeira de Matemática.

[2] Uma reunião para conversa ou discussões, especialmente sobre arte.

[3] Um monocórdio é um instrumento de origem antiga usado para medir e demonstrar as relações matemáticas dos tons musicais. Consiste em uma única corda esticada sobre uma caixa de som, e em uma ou mais pontes móveis sobre uma escala graduada. Era usado na Grécia, por volta do século VI a.C., como um instrumento científico para medir intervalos musicais, e o conhecimento a respeito dele foi transmitido para os teóricos medievais pelo filósofo Boécio (séc. V d.C.). Os primeiros tratados sobre o monocórdio datam do século X. O instrumento continuou a ser usado como ferramenta científica e de ensino nos séculos seguintes, e chegou até o século XVIII, sendo utilizado como um auxiliar dos afinadores de órgãos. Referência: *"monochord"*. *Enciclopédia Britannica – Encyclopaedia Britannica Online*. Encyclopædia Britannica Inc., 2012. Último acesso: 19/12/2012.

[4] Esta citação foi retirada de um trecho da obra *Essay on Man* (1734), de Alexander Pope (domínio público): "Toda a natureza nada mais é do que arte desconhecida para ti, Toda probabilidade, direção que não podes ver; toda discórdia, harmonia não compreendida; todo mal parcial, bem universal. E, apesar do orgulho e da razão que falha, uma verdade é clara: tudo o que é, é correto." Referência: Alexander Pope, *An Essay on Man*. Hard Press, 2006.

[5] Em teoria musical, tradicionalmente, um tetracórdio é uma série de três intervalos menores que preenchem o intervalo de uma quarta perfeita, uma proporção de frequência de 4:3. No uso moderno, um tetracórdio é qualquer segmento de quatro notas de uma escala ou série de tons; contudo, o termo deriva da teoria musical grega antiga, em que significava, literalmente, *quatro cordas* (que deveriam ser contíguas), fazendo referência a instrumentos em forma de harpa, como a lira ou a cítara. Para mais informações: John Roeder, "Set (ii)". In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. Stanley Sadie e John Tyrrell. 2. ed. London, Macmillan Publishers, 2001.

[6] *Raga* é um dos modos melódicos usados na música clássica indiana; utiliza uma série de cinco ou mais notas musicais sobre as quais uma melodia é construída. A forma como as notas são abordadas e reproduzidas em frases musicais, bem como o humor que transmitem, são mais importantes na definição de um *raga* que as próprias notas. Nessa tradição musical, os ragas são associados com diferentes momentos do dia, ou com as estações do ano. Em outros tipos de música indiana, como as canções populares dos filmes, os ragas não são necessariamente utilizados em todas as composições. Para mais informações: Walter Kaufmann, *The Ragas of North India*. Calcutta, Oxford & IBH Publishing Company, 1968.

[7] O termo "tiro de teste" ou "tiro de ensaio" é uma adaptação para o português da expressão inglesa *sighting shot*, que dá nome ao tiro dado para testar o ajuste da mira de uma arma de fogo. Aqui, o comentário aponta para os valores da tabela que servem de parâmetros de ajuste para as harmonias em relação ao pêndulo do harmonógrafo.

[8] A *musica universalis*, ou música das esferas, é um conceito filosófico antigo que considera as relações matemáticas nos movimentos dos corpos celestiais como uma forma de música. Não que essa "música" seja realmente audível, mas ela representa um conceito harmônico, matemático ou religioso. A ideia, que surgiu com Pitágoras e interessou pensadores de diversas áreas até o final do Renascimento, incorpora o princípio metafísico de que as relações matemáticas expressam qualidades ou "tons" de energia, e estes se manifestam em números, ângulos visuais, formas e sons – tudo conectado dentro de um padrão de proporção. Em uma teoria que ficou conhecida como *Harmonia das Esferas*, Pitágoras propôs que o Sol, a Lua e todos os planetas emitem seu próprio "zunido" singular (ou ressonância orbital), baseado em sua revolução orbital. Posteriormente, Platão descreveu a astronomia e a música como estudos "geminados" de reconhecimento sensorial: astronomia para os olhos, música para os ouvidos, ambos exigindo o conhecimento das proporções numéricas. Referências: Johannes Kepler, *The Harmony of the World* (1619). Trad. E. J. Aiton, A. M. Duncan e J. V. Field. Philadelphia, American Philosophical Society, 1997; Piero Weiss e Richard Taruskin, *Music in the Western World: A History in Documents*. Cengage Learning, 2008.

[9] No sentido de *intensidade* ou *volume* do som.

[10] *Seven-limit* é o termo que designa a natureza da harmonia em um gênero musical de acordo com sua apropriação dos harmônicos na série. O jazz, pelos acordes de alta complexidade, são assim classificados

[11] O espirógrafo foi inventado pelo engenheiro britânico Danys Fisher, que o exibiu em 1965, na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg (*Nuremberg International Toy Fair*). É um brinquedo para desenho geométrico, e produz curvas matemáticas conhecidas como hipotrocloides e epitrocloides. Consiste em um conjunto de engrenagens de plástico e outras formas, como anéis, triângulos ou barras retas. As engrenagens apresentam-se em vários tamanhos, e suas extremidades possuem dentes para encaixe entre as diversas peças: por exemplo, pequenas rodas podem ser encaixadas por dentro ou por fora de anéis maiores, de forma a girar tanto na extremidade interna quanto externa desses anéis. Para utilizar o espirógrafo, uma folha de papel deve ser colocada sobre um papelão grosso, e uma das peças de plástico deve ser fixada no papel e no papelão. Em seguida, outra peça de plástico é encaixada nessa peça fixa através de seus dentes. Uma caneta é simultaneamente utilizada para desenhar e para mover a peça que está solta: sua ponta é colocada em um dos buracos, e, ao mover a peça, a figura é traçada.

[12] Ordem de sucessão dos tons e semitons na escala diatônica.

[13] Torno de bancada.

[14] Em português, *cimática* é o nome dado ao estudo das ondas, associado aos padrões físicos produzidos pela interação de ondas sonoras em um meio. O termo foi cunhado pelo cientista suíço Hans Jenny (1904-1972), e deriva do grego *kýma* (κύμα), que significa "onda", e *ta kymatiká* (τα κυματικά), que significa "assuntos referentes a ondas". Inspirado pela teoria dos sistemas e pelo trabalho de Ernst Chladni, Jenny iniciou uma investigação sobre fenômenos periódicos, especialmente a observação visual do som, e descreveu seu trabalho no livro de mesmo nome. Para mais informações: *Oxford Dictionary of Scientists*. Oxford, Oxford University Press, 1999, p. 101; Hans Jenny, *Cymatics: A Study of Wave Phenomena and Vibration*. Newmarket, Macromedia Publishing, 2001 (originalmente, dois volumes publicados em 1967 e 1974).

[15] Parece provável que a cantora vitoriana Margaret Watts Hughes tenha sido inspirada pelo trabalho de Michael Faraday, uma vez que usava o termo "crispação" quando discutia sobre os padrões que observava no eidofone. Como o cientista inglês, ela também se sentia muito atraída pela beleza das formas, e observou que não era apenas a altura e a magnitude do som, mas também a *qualidade tonal* da voz o que induzia características variáveis na forma das figuras – por essa razão, chamadas "figuras de voz". Margaret preferia as interpretações florais ao usar o eidofone, desenvolvido por ela em 1885, e atraía muitos convidados para a sua sala de visitas a fim de que a vissem "cantar uma margarida", como costumava dizer. Para mais informações: Margaret Watts-Hughes, *Voice Figures*. Hazell, Watson, and Viney, 1891.

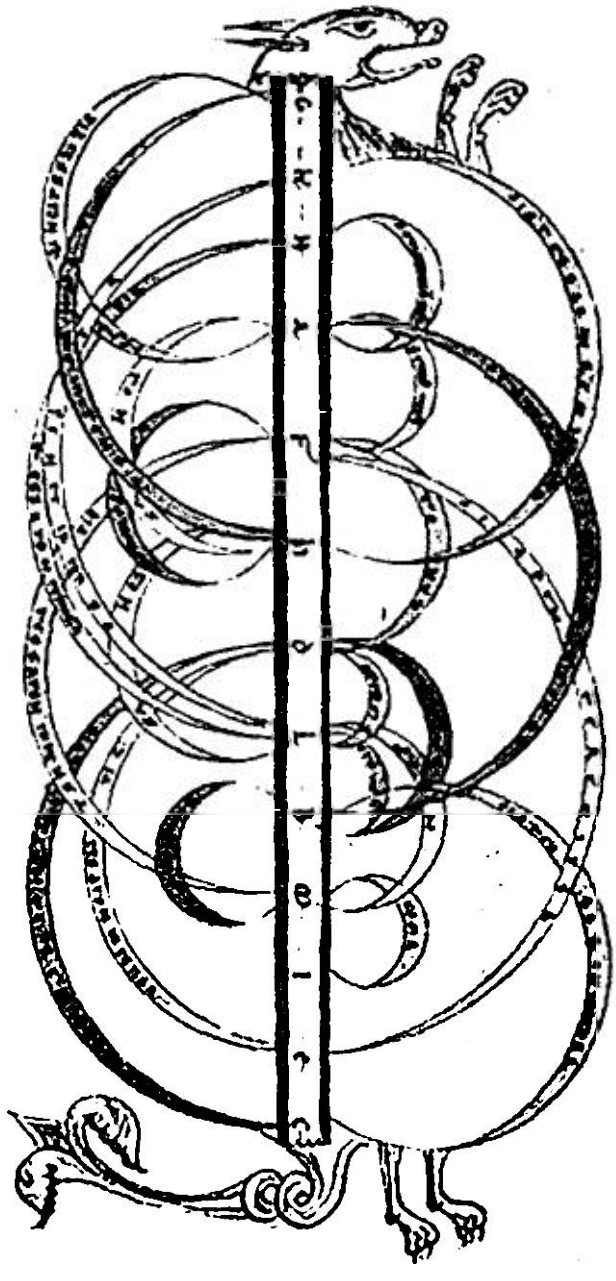


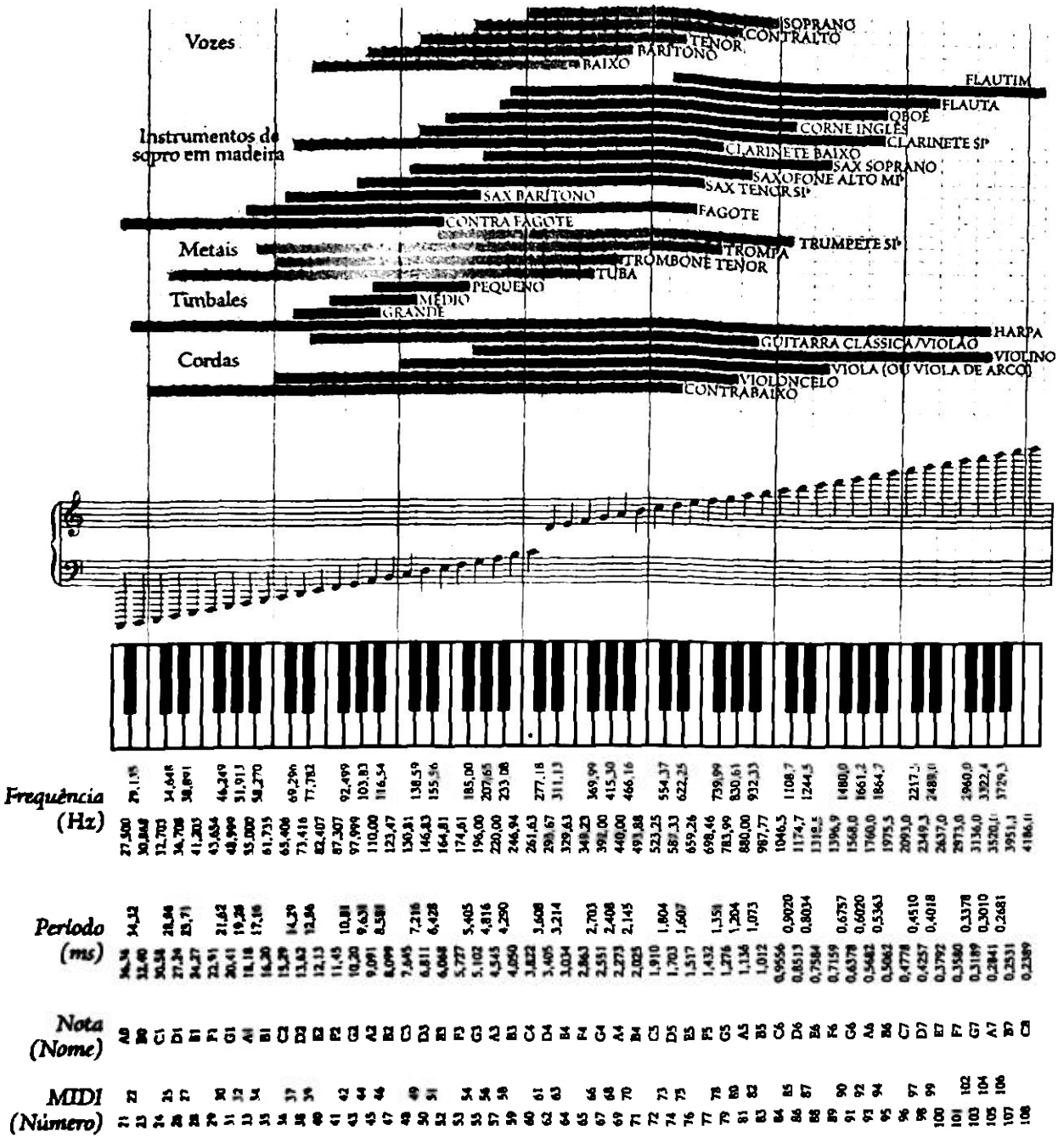
Diagrama musical zoomórfico, da obra De Musica,[1] *de Boécio (480-524 d.C.).*

L I V R O V

OS ELEMENTOS DA MÚSICA

Melodia, Ritmo e Harmonia

Jason Martineau



Um pouco mais de sete oitavas do espectro sonoro, centrado no Dó central, mostrando o posicionamento de diferentes instrumentos dentro da gama de frequências audíveis. Os detalhes de frequência e período são dados para temperamento igual.[2]

Introdução

A música é o meio artístico que comunica interioridade, sendo percebida somente pelos ouvidos e recebida pela mente. Consequentemente, uma abordagem rigorosa para compreendê-la sempre terá algo faltante, uma vez que a teoria musical, em essência, é principalmente descritiva, não prescritiva. As tendências e práticas em música só são observadas e catalogadas mediante análise, ou seja, após o fato. São os corações e mentes dos seres humanos que imaginam e dão forma a melodias, harmonias e ritmos, em conjunto, para criar tapeçarias significativas, impregnados pelas paisagens interiores de suas experiências imediatas.

Grande parte da teoria apresentada neste livro baseia-se na tradição clássica europeia, começando por volta do início do século XVIII. O conteúdo foi desenvolvido para que você comece a compreender as relações de tons e ritmos, e nesse processo, ao revelar as propriedades inerentes ao som, talvez entenda a música de forma geral.

Para os propósitos deste livro, todos os princípios são apresentados assumindo temperamento igual, que é o sistema de afinação predominante há mais de trezentos anos. As palavras "tom" e "nota" podem, às vezes, ser usadas como sinônimas, mas, geralmente, "tom" refere-se ao som audível, e "nota" refere-se ao símbolo escrito. Outros termos podem ser consultados no glossário.

Espero que este livro revele como o modelo harmônico fundamental de som age como um sistema organizacional, a partir do qual a estrutura musical é elaborada, influenciando nossa percepção de harmonia, dissonância, tensão e relaxamento, contando uma história, fazendo uma viagem.

O QUE É MÚSICA?

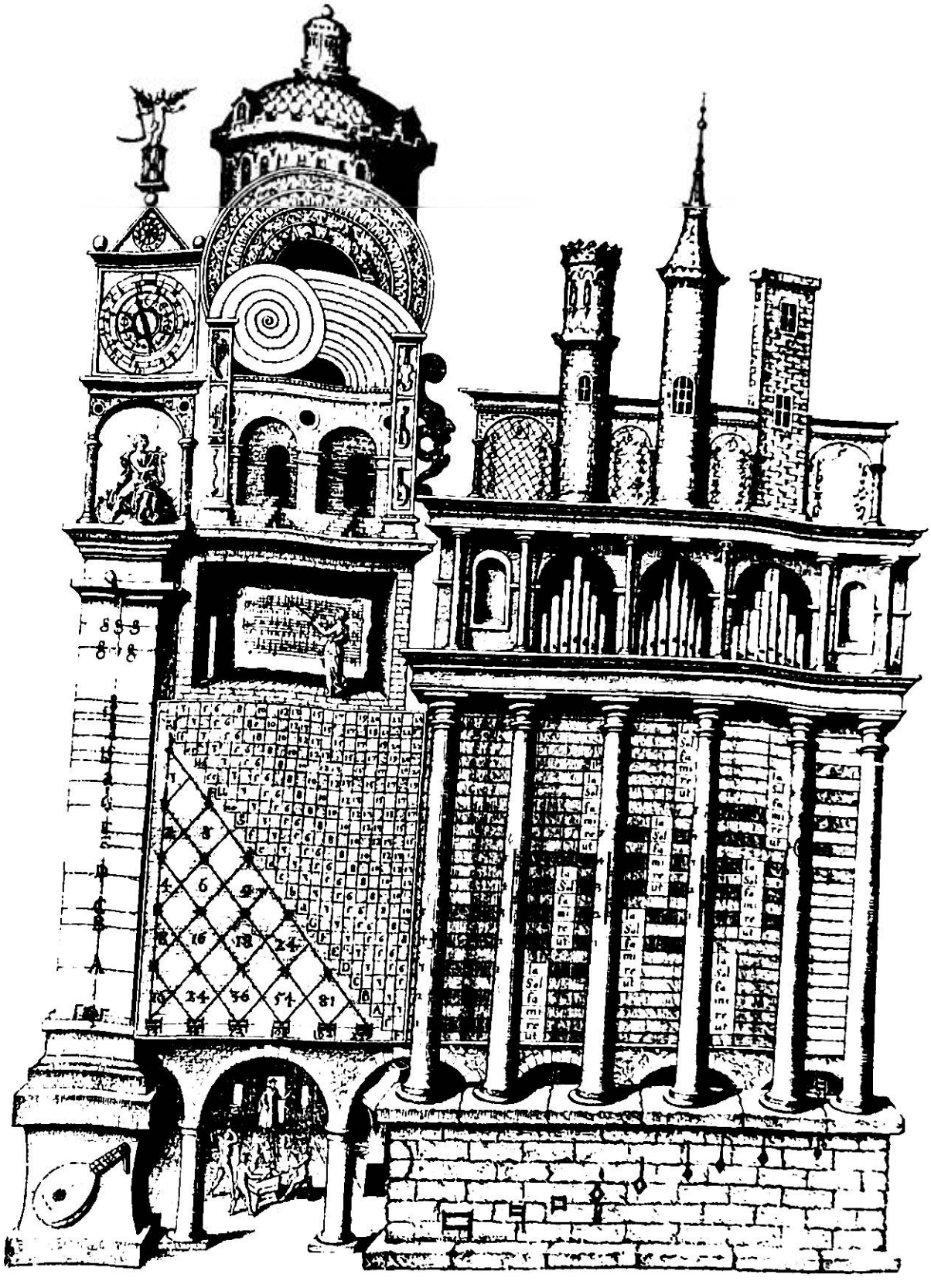
E todo aquele jazz

A música é... a canção de ninar de uma mãe. Ela dá som aos nossos sentimentos quando não temos voz, dá-nos palavras quando estamos em silêncio. Com ela louvamos, amamos, esperamos e recordamos. Na expressão da alma, encontramos os contornos do trajeto de um colibri em voo, e o vento que o carrega. A música molda-se e fragmenta-se em infinitas cores, matizada e diversificada, e eternamente criativa. É o espírito tomando forma.

A música é levada pelas vibrações das moléculas de ar, como as ondas sobre um oceano. Talvez ela capte e transmita, de forma singular, a paisagem interior de uma mente humana, retendo as lágrimas e o suor, a dor e o prazer, embalando-os como peãs,[3] prelúdios, *études*[4] e noturnos. É a texturização da desagregação do tempo, o fluxo e o refluxo de humor e significado. Ela rumina, vacila, contempla e estimula.

Na música, organizamos e fantasiamos, combinando seus elementos – *melodia*, *ritmo* e *harmonia* – em formas e padrões significativos. Seus ritmos movem nossas mãos, pés e corpos com as vibrações do universo. Suas harmonias respiram com as complexidades e curiosidades exploratórias de relação e proporção, harmonia, dissonância, assonância e ressonância. Suas melodias vibram em voos de fantasia, entrelaçando pesar e assombro.

Quando a música se une à linguagem, o que é falado torna-se canção, elevando as intenções e pedindo que escutemos mais profundamente, tornando sagrado o que é profano. A música conforta a alma e a besta selvagem. Orfeu mistifica criaturas e árvores, muda o curso dos rios e vence o canto das sereias com a sua lira. Radha e Krishna tocam flauta e dançam alegremente.



Templo da Música, *por Robert Fludd (1574-1637). No canto inferior esquerdo, Pitágoras descobre que as proporções dos pesos dos martelos correspondem à oitava, à quinta e à quarta. Na parede do canto inferior direito, os ritmos básicos estão notados ao longo de uma clave de Fá. Acima desses estão os três tipos de hexacordes, as escalas de seis notas da música medieval. À esquerda deles está o lambda, uma matriz de relações de notas e proporções que remonta a Platão. A porção diagonal superior dessa região é um diagrama de distâncias intervalares entre os tons na escala. Estendendo-se verticalmente, mais à esquerda, está o monocórdio. Acima das matrizes diagonais está uma composição real que coloca todas essas práticas em uma estrutura musical.*

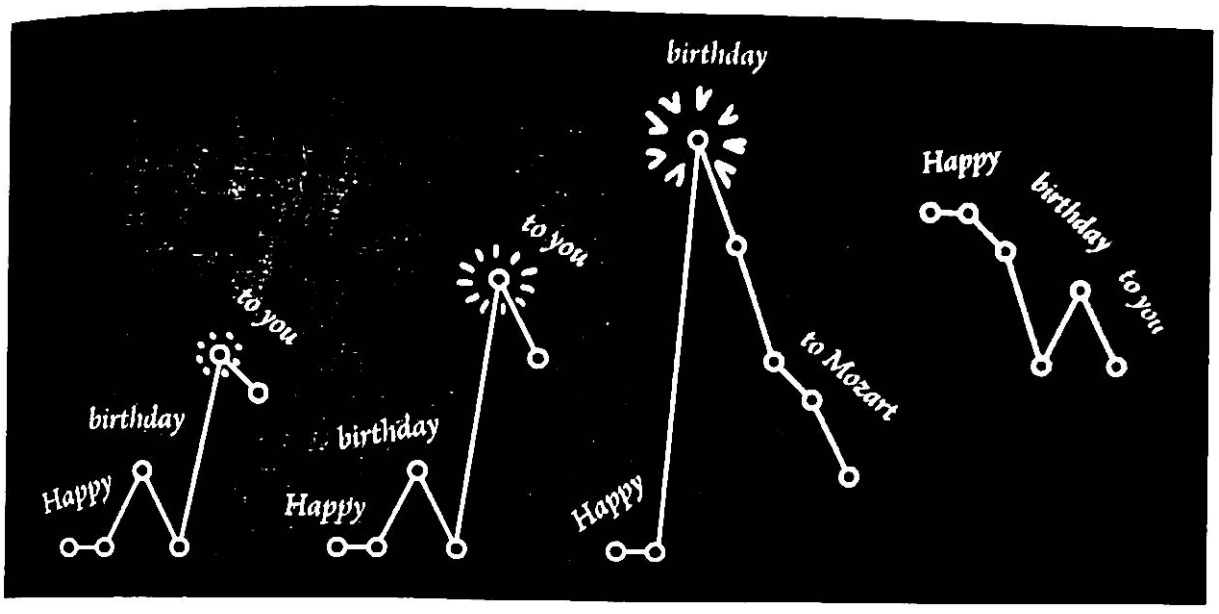
EPIGRAMAS E DIALÉTICA

Ideias em som

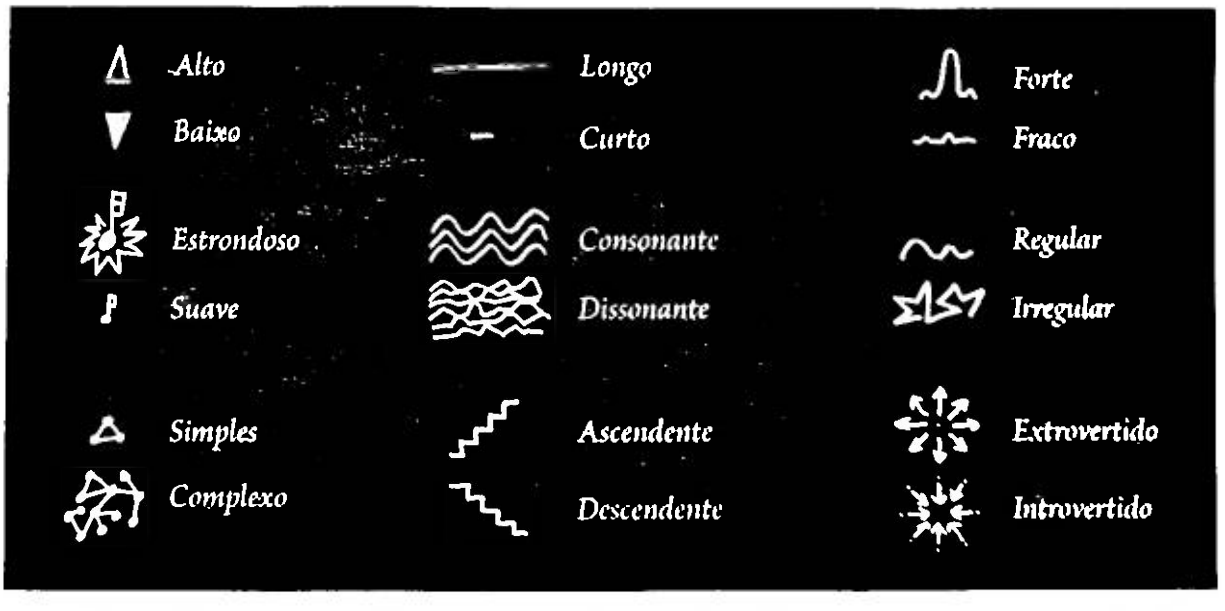
Quando a música se equipara à linguagem, muitas vezes escolhe dispositivos que se assemelham a epigramas ou artifícios poéticos. Considere o epigrama *"Live, Love, Learn"* (Viver, Amar, Aprender). Esta coleção de palavras, quando organizadas em conjunto, assume um significado interassociativo emergente, que transcende as partes individuais. Observe a aliteração da letra L e o uso de *"learn"* (aprender), na sequência, para dissipar o esquema de rima das duas primeiras palavras e fechar o conjunto. Além disso, todas as palavras são monossilábicas e podem ser usadas tanto como infinitivos conceituais (viver, amar, aprender) quanto como imperativos (Viva! Ame! Aprenda!).

Tanto na música como na linguagem, os componentes dos epigramas são frequentemente sintetizados ou unificados através do paradoxo, uma qualidade essencial para ter um efeito estético e memorizar a frase. Em música, as notas sobem ou descem, são assonantes ou dissonantes, *staccato* ou *legato*, ou se atraem e se repelem uma à outra. Essas dualidades fundamentais representam a natureza paradoxal da própria realidade. Pequenos fragmentos de significado são organizados, a partir delas, em formas mais amplas, baseadas em sua estrutura. Percebendo essa união de opostos, o ouvinte é temporariamente removido do fluxo dualista da vida cotidiana para o reino da unificação.

O epigrama da melodia *"Happy Birthday"* ("Parabéns para Você" – *imagem ao lado*), por exemplo, passa por várias permutações e transformações, mas preserva suas características fundamentais e, assim, permanece satisfatoriamente reconhecível até o final.



"Happy Birthday" (*Parabéns para Você*). *A melodia começa no quinto grau da escala maior, com uma nota longa seguida de uma curta, repetida; então, passa da sexta para a quinta, e dá um salto para cima, de uma quarta até a oitava, antes de cair meio tom. A primeira repetição dessa ideia é igual, a não ser pelo salto para cima, que agora é uma quinta, seguida por uma queda de um tom inteiro. Na terceira vez, é seguida por um salto de uma oitava para cima (um intervalo pequeno que se torna grande), e, onde a melodia previamente caiu um tom, agora cai dois, com uma dissonância saliente sobre o nome da pessoa, prolongando-se em um ritmo forte. A frase final repete a letra de abertura, em um tom dissonante, caindo um tom, saltando para baixo, e mais outro tom. Uma dialética bem construída de saltos e variações tonais, para cima e para baixo, tons de repouso e movimento, alternando ritmos fortes e fracos, que nos transportam sem esforço em uma pequena viagem: uma lenta e esforçada subida, e uma suave cascata para baixo, saltando de paraquedas para a tônica da peça.*



Na música, grande parte da comunicação de sentido é dependente de opostos. Cromático-diatônico, salto-intervalo, repetição-contraste... Os opostos interagem, conforme a narrativa se desenrola, para arrastar o ouvinte. Os contextos são definidos de imediato pelos primeiros sons apresentados na música, e tudo o que se segue é constantemente comparado com o que veio antes, a curto e a longo prazo, conforme o tempo passa. Assim, a interação dessa dialética torna-se clara à medida que a música se desenvolve. Os opostos em conflito criam drama; os opostos em harmonia aparecem como beleza.

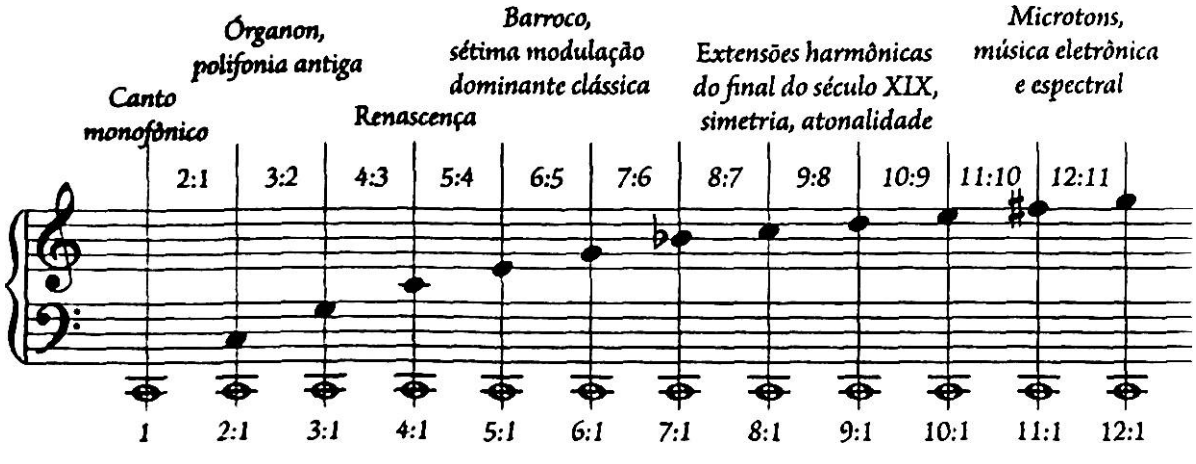
ACÚSTICA E SOBRETONS

De uma para sete notas, e além

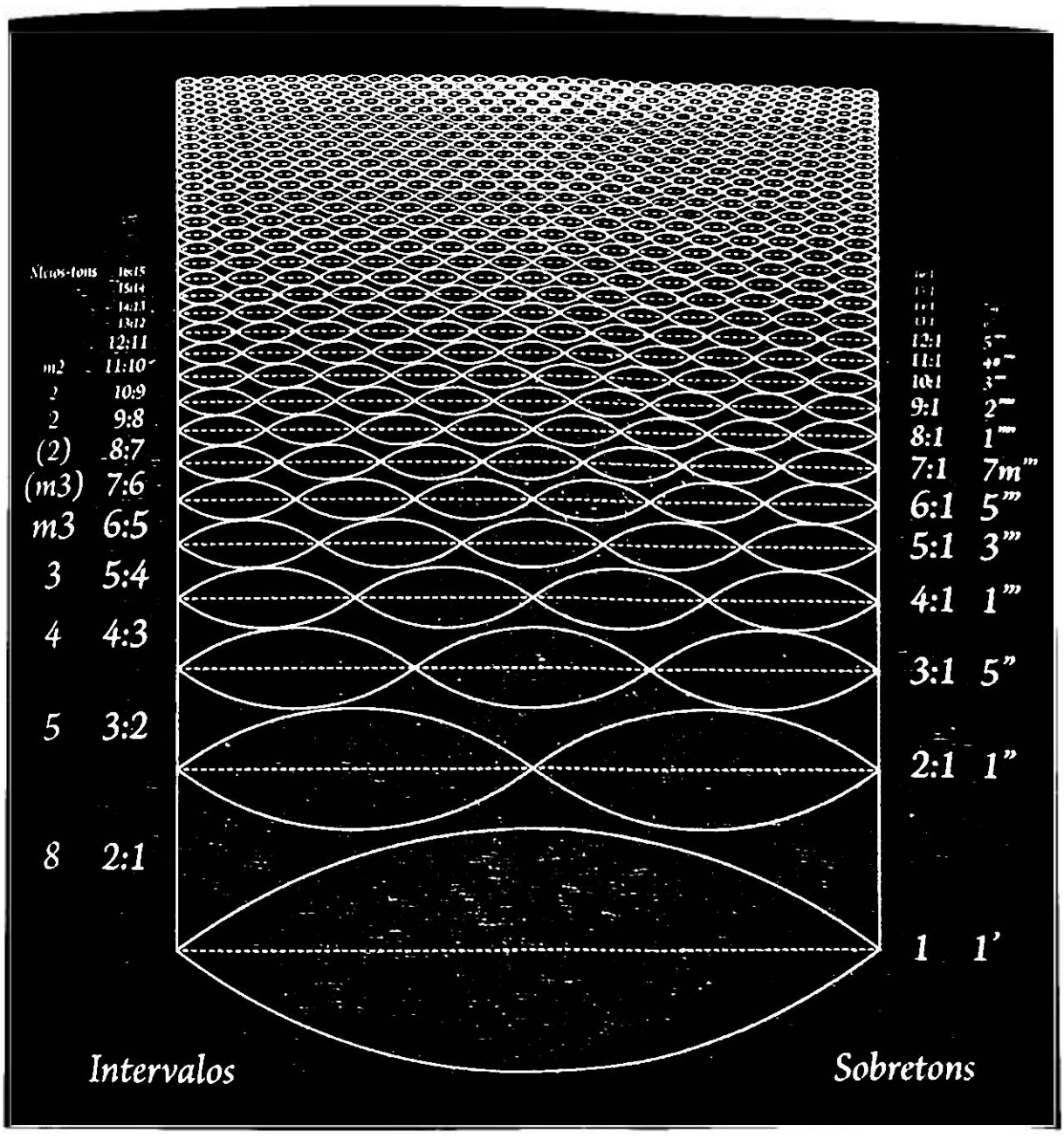
Qualquer som que possa ser percebido como um timbre ou tom apresentará alguma periodicidade, vibrando em uma frequência regular, com uma mistura específica de amplitudes de sobretom (*imagem ao lado*), e criará uma tonalidade característica. Um oboé, uma cítara ou um piano podem tocar no mesmo tom, porém soarão diferentes. As vogais A, E, I, O e U são criadas pelo aprisionamento ou liberação de sons harmônicos, a partir de formas produzidas pela boca e pelos lábios.

O outro componente do som, o ruído, não tem periodicidade – um martelo batendo, um dedo sendo arrancado, o raspar de um arco, o som em uma televisão sem sinal. As faixas de ruído são nomeadas pela cor (ruído branco, ruído rosa, ruído cinza) e fazem parte dos sons musicais que um instrumento pode produzir. O componente de ruído de um som pode ser comparado às consoantes na linguagem, com tambores como oclusivas, chocalhos como fricativos, e pratos como sibilantes.

Essencialmente, o som musical pode muito bem ser descrito da mesma forma que o som da linguagem: uma combinação de tons que varia em conteúdo harmônico, com um componente de ruído que inicia o som, dá, às vezes, continuidade a ele e, ocasionalmente, também o encerra – a função das consoantes – com um ritmo e uma forma que o organizam.



A história da música no Ocidente pode ser vista como correspondente à série harmônica, ascendendo e incorporando mais e mais da série ao pensamento harmônico. As distâncias relativas dos intervalos também sugerem o tempo despendido em explorar esses intervalos, uma viagem desde a objetividade icônica até a complexidade interior.



Quando uma corda vibra, ou um tubo se enche de ar, criam-se formas de onda proporcionais, em relações de números inteiros que ocupam o mesmo espaço, dando origem à série harmônica ou aos sobretons. A unidade subdivide-se em unidades infinitamente menores. Cada um desses sobretons é uma estação ou ponto de parada, um polo gravitacional que age sobre os outros tons vizinhos.

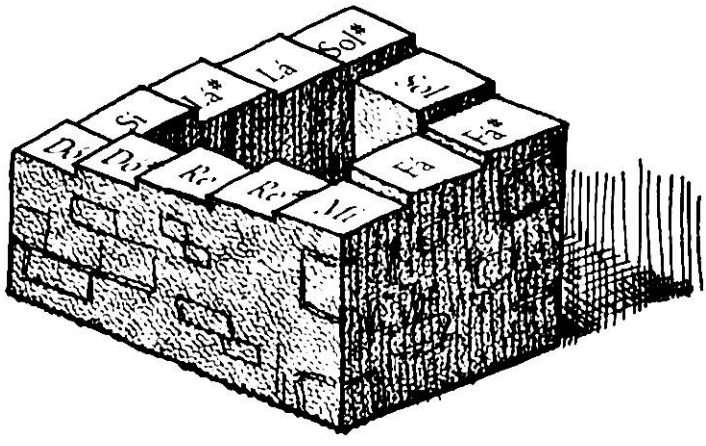
COMPREENDENDO AS ESCALAS

Ruas e escadarias

Uma escala é uma coleção de sons distintos que são um subconjunto do *continuum* de tons, e que normalmente sobem uma oitava após certo número de passos, geralmente sete. A maioria das escalas musicais mais originais e maravilhosamente diversificadas de todo o mundo deve grande parte de sua herança à série harmônica, usando a quinta – a primeira nota afinada – como a unidade fundamental. As quintas soam umas sobre as outras, e depois transpostas novamente para baixo, para uma única oitava. As terças também podem ser priorizadas para derivar uma escala (por exemplo, afinação mesotônica). Uma miríade de outros métodos esculpiram os diferentes sistemas de afinação que surgiram, cada um deles tentando resolver o problema de encerrar uma graciosa curva, ou uma espiral infinita, em uma grade ou círculo. A escala torna-se o palco para um drama melódico que revela as tensões relativas entre esses sobretons e os tons intermediários.

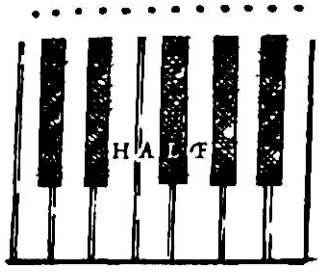
As estações básicas são: 1-3-5-1, onde o acorde maior consiste em fundamental, terça e quinta, criado pelos sobretons 2:1 (a oitava, a única nota que, quando atingida, dá a nítida impressão de ser o tom fundamental abaixo dela, o mesmo tom, ainda que diferente). Então, a partir de 3:1, vem a quinta, que possui uma qualidade próxima da mesmice, embora seja, de fato, um tom inteiramente diferente. Em seguida, outra oitava (4:1), e depois 5:1, que se torna a terça, geralmente transmitindo a propriedade maior ou menor de um acorde, escala ou melodia. Muitas escalas de cinco e sete notas utilizam essa estrutura básica, e em muitas variações, mas as estruturas fundamentais são 1-2-3-5-6 (pentatônica) e 1-2-3-4-5-6-7 (a escala maior e várias outras). Em outras palavras, sete nasce de cinco.

Em um ambiente de doze notas, uma escala de sete notas significa que cinco sempre estarão faltando. Nos sistemas do Oriente Médio, sete notas são escolhidas (em execução) a partir de dezessete notas. Na Índia, sete notas são escolhidas a partir de vinte e duas.

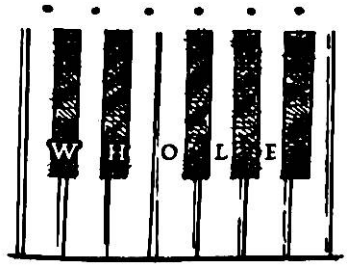


Esta escada Penrose modificada mostra o paradoxo da oitava musical. À medida que atravessamos uma escala crescente ou decrescente, há uma partida e um retorno simultâneos – estamos indo e voltando ao mesmo tempo.

Semitons: Em afinação cromática (por exemplo, em um teclado), a distância de qualquer nota até a nota vizinha – tecla branca ou preta – é de um semitom ou meio-tom. A afinação cromática ocidental tem doze semitons iguais para a oitava: Dó–Dó#–Ré–Ré#–Mi–Fá–Fá#–Sol–Lá♭–Lá–Si♭–Si–Dó

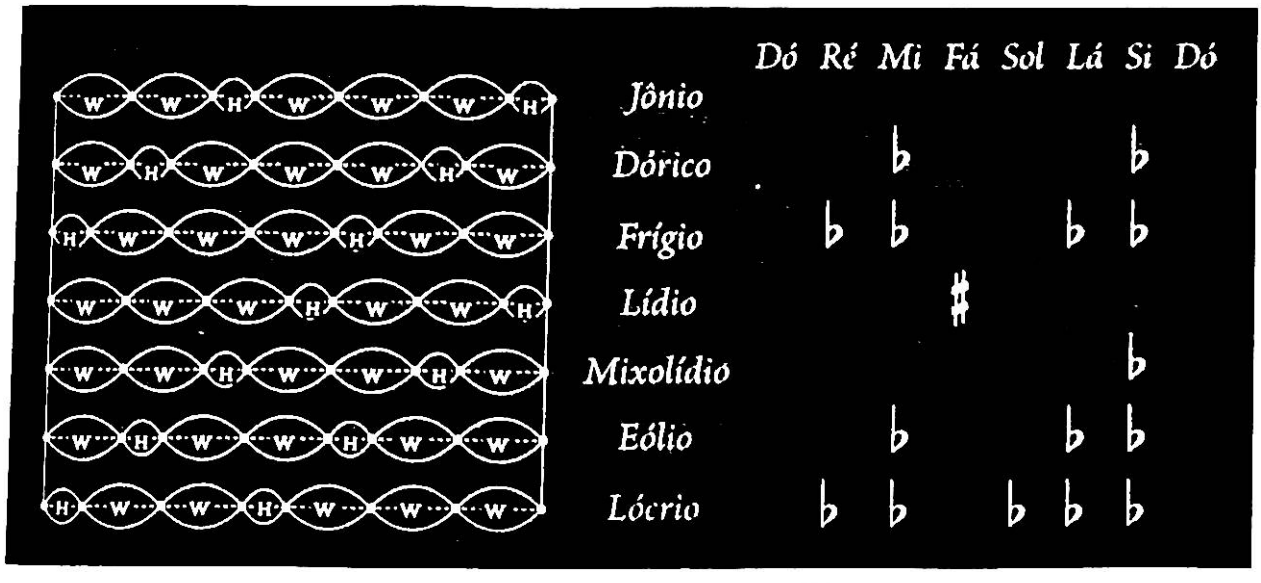


Half steps (Semitons)



Whole Steps (Tons inteiros)

Tons inteiros: São equivalentes a dois semitons. Eles também podem atravessar as teclas brancas ou pretas, dependendo de onde caem sobre o teclado. O par de escalas mutuamente exclusivas, compostas unicamente de tons inteiros, é: Dó–Ré–Mi–Fá#–Sol#–Si♭ e Ré♭–Mi♭–Fá–Sol–Lá–Dó



Os sete modos clássicos com os seus nomes gregos. Esquerda: Ao deslizar o ponto de partida do conjunto de escalas uma nota para a direita, todos os tons inteiros e semitons movem-se para a esquerda, criando seis modos adicionais, a partir de uma escala de sete notas. Direita: Uma forma de gerar os modos comparados à escala maior (jônio) é fazer alguns ajustes cromáticos, em bemol ou sustenido.

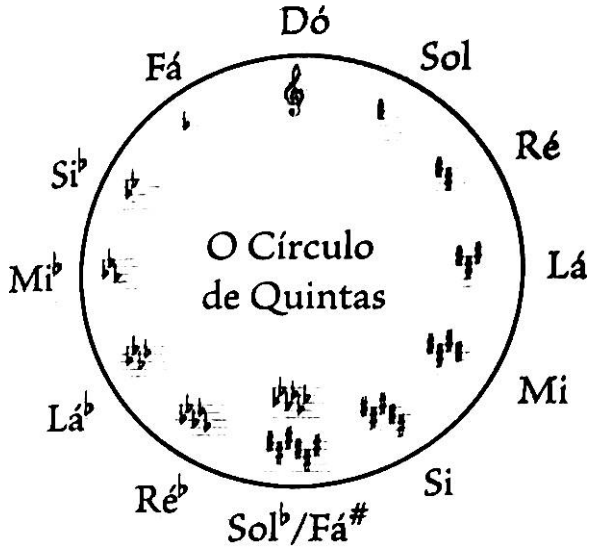
CONHEÇA OS INTERVALOS

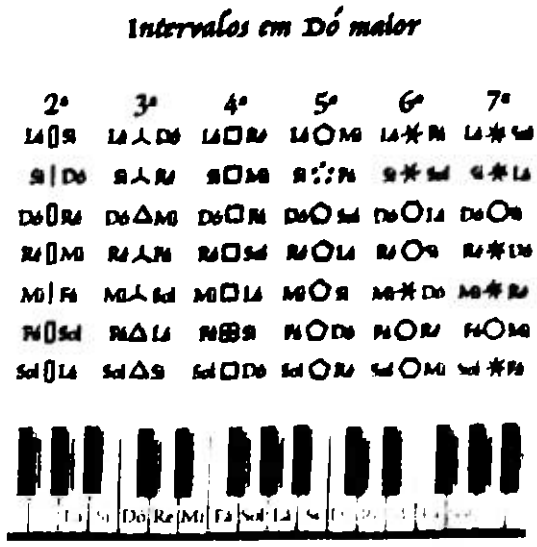
E o círculo de quintas

Um intervalo musical é a distância entre dois tons, e, embora a afinação varie ligeiramente de uma cultura para outra, os mesmos intervalos são amplamente encontrados em todo o mundo. Os intervalos podem ser considerados de duas formas: a primeira é como uma série de relações de frequência simples, continuamente a contrair-se, de modo que o primeiro intervalo (a *oitava*) é uma relação 2:1, o segundo (a *quinta*) é 3:2, e o terceiro (a *quarta*) é 4:3. Em seguida, vem a *terça maior* de 5:4, a *terça menor* de 6:5, a *segunda* de 9:8 ou 10:9, e intervalos ainda menores, com nomes como *quarto de tom*, *shruti*, *li*, *coma*, *apótoma* e *microtom*, dependendo da época e da cultura.

A segunda forma de olhar para essa série de relações é comparar intervalos com a frequência fundamental a que todos se relacionam. Essa abordagem resulta em uma oitava (2:1), uma quinta (3:1), outra oitava (4:1), uma terça maior (5:1), outra quinta (6:1), uma sétima (7: 1), outra oitava (8:1), uma segunda (9:1), uma terça (10:1), um *trítono* (11:1), etc. Se o primeiro cenário é relativo, com cada parcial comparado ao seu vizinho mais próximo, então o segundo cenário é absoluto, uma vez que os intervalos assumem valor absoluto em relação ao fundamental. Ambos os cenários são úteis, quando se escolhe uma abordagem analítica para a construção de escalas musicais e de melodias que, em última análise, derivam delas.

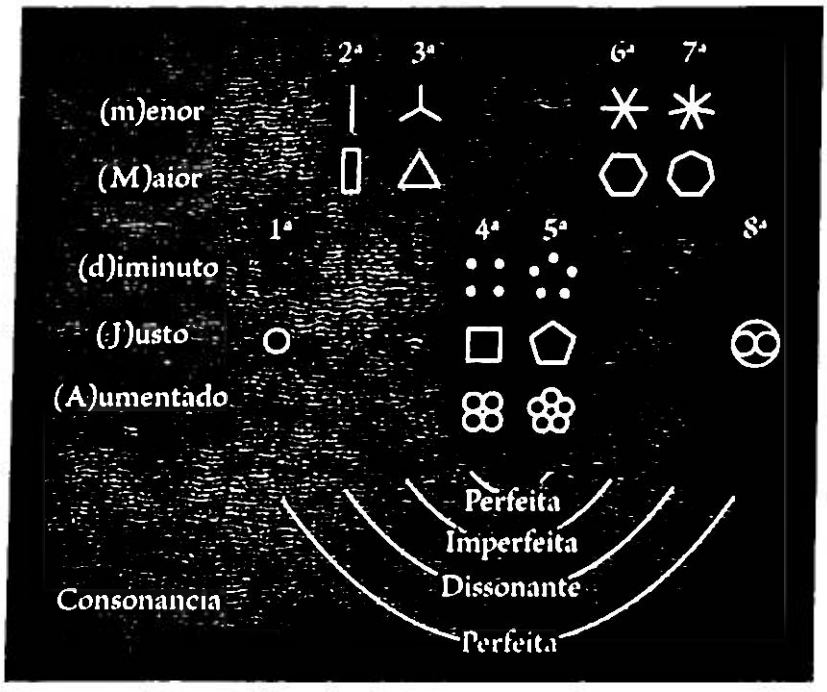
Observe que a oitava, a quinta e a terça maior aparecem em ambos os sistemas. Em geral, todas as escalas ao redor do mundo contêm esses intervalos, de alguma forma, com sua afinação precisa revelando pequenas variações e nuances na construção de instrumentos e nas predileções culturais. Aqueles que utilizam a primeira abordagem afinam seus instrumentos e derivam suas escalas pela relação dos sons harmônicos entre si, enquanto outros que utilizam a segunda abordagem relacionam os intervalos à sua frequência fundamental.





Acima à esquerda: O círculo de quintas é um diagrama de tons comuns. Notas cromáticas (sustenidos e bemóis) são adicionadas, na ordem de quintas perfeitas, para preservar as relações de tom inteiro e semitom na escala maior, construída sobre qualquer nota. Quaisquer sete quintas consecutivas no círculo produzem todas as notas, em qualquer das doze escalas maiores. Os acidentes ocorrem sempre que é preciso fazer uma alteração em uma escala para preservar a sintaxe do alfabeto. Notas opostas no círculo formam um trítono, o intervalo simétrico que corta a oitava ao meio.

Acima à direita: Uma tabela dos intervalos presentes na escala de Dó maior, as notas brancas no piano.



Um sistema simbólico de glifos usados neste livro para descrever intervalos musicais e seus tamanhos relativos. Note as formas que se expandem e se contraem com o tamanho do intervalo. Intervalos pequenos ou diminutos são menores, por um meio-tom, do que suas respectivas contrapartes, maiores e perfeitas. Intervalos aumentados são um meio-tom maiores do que o justo. Os intervalos maior e menor são muitas vezes referidos como forte e suave (dur e moll).

A parte inferior do diagrama mostra a natureza simétrica das harmonias dos intervalos. O uníssono, a quarta, a quinta e a oitava são consonâncias perfeitas. As terças e as sextas são consonâncias imperfeitas, enquanto as segundas e as sétimas são dissonâncias.

RITMOS BÁSICOS

A métrica e o pulso

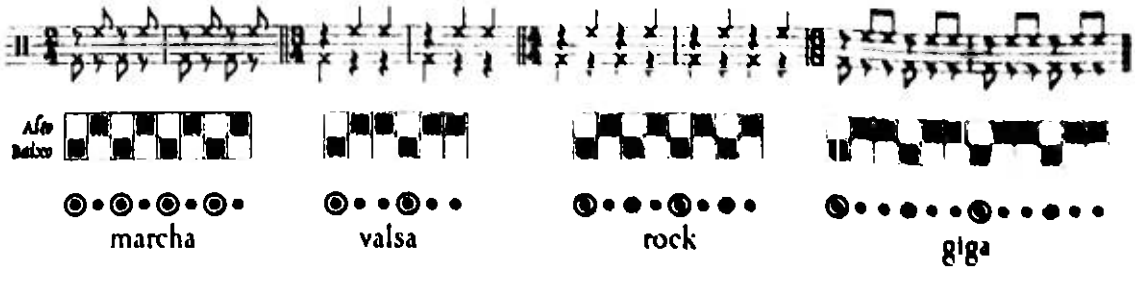
O ritmo é o componente da música que evidencia o tempo, levando-nos de um compasso a outro, e que se subdivide em proporções simples, exatamente como o tom. Mesmo em ritmos aparentemente complexos, muitas vezes é perceptível uma estrutura básica, baseada em agrupamentos de divisões em duas e três partes. A marcha e a valsa são, portanto, nós na subdivisão de ritmo; e a tensão criada pela *polirritmia* e pela *síncope* atrai e repele, em oposição à gravidade desses nós, assim como as notas musicais individuais em uma escala. Tudo isso acontece através do tempo, criando uma moldura de epigramas, revelando sua condição ou jornada, e existindo dentro de um sistema de regras.

As estruturas rítmicas são organizadas em *compassos*, com a finalidade de notação, o que denota o tempo dividido em grupos de pulsações básicas. No tempo quaternário simples (4/4), cada compasso tem quatro pulsações marcadas por semínimas, que frequentemente aparecem em grupos de quatro compassos. Na maioria dos ritmos, também existe uma pulsação de batimentos fortes e fracos, ou de partes de batimentos fortes e fracos; e os *acordes* são colocados em cada compasso, tanto em *anacruse*[5] quanto em *icto*,[6] "entre" ou "sobre" os batimentos, para transmitir movimento harmônico e reforçar a sensação de tonalidade. O desdobramento e a variação das tensões e dos relaxamentos resultantes, ao longo do tempo, são responsáveis por grande parte da energia emotiva e expressiva do ritmo.

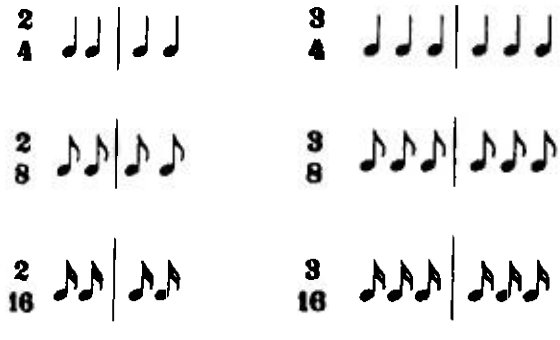
A velocidade com que os eventos passam também é um componente crucial para qualquer textura rítmica, sendo frequentemente medida pelo número de batimentos por minuto (BPM). As subdivisões de um pulso são parcialmente sem sentido se não conhecemos sua velocidade ou *tempo* (andamento).

Notas e Pausas

Acima: A subdivisão binária básica do ritmo em notas (esquerda) e pausas (direita). De cima para baixo, os valores são: inteira, meia, 1/4, 1/8 e 1/16. Esse processo pode continuar até 128 notas. A pausa ocupa o mesmo espaço potencial que uma nota e fornece respiro e espaço, ajudando a elucidar diferentes partes.



Os estilos musicais são frequentemente expressos por seus padrões rítmicos e pelo agrupamento e subagrupamento dos ritmos fortes e fracos que os compõem. Aqui estão alguns dos estilos mais básicos, desenvolvidos sobre dois e três padrões simples e compostos.



Em uma fórmula ou indicação de compasso, o numerador indica o número de batidas por compasso, e o denominador indica qual subdivisão receberá o movimento. O compasso (ou barra), separado por linhas, indica uma célula rítmica, uma repetição do agrupamento ou ciclo básico.

Longo e Curto

Binários		Triplices	
Iâmbico	I —	Tribraco	I I I
Troqueu	— I	Dáctilo	— I I
Espondeu	— —	Anfíbraco	I — I
Dibraco ou Pirríquio	I I	Anapesto	I I —
		Baquio	I — —
		Antibaquio	— — I
		Anfimacro	— I —
		Molosso	— — —

A métrica poética em pés mede todas as combinações possíveis de longo e curto, em agrupamentos binários e triplices, no total de doze.

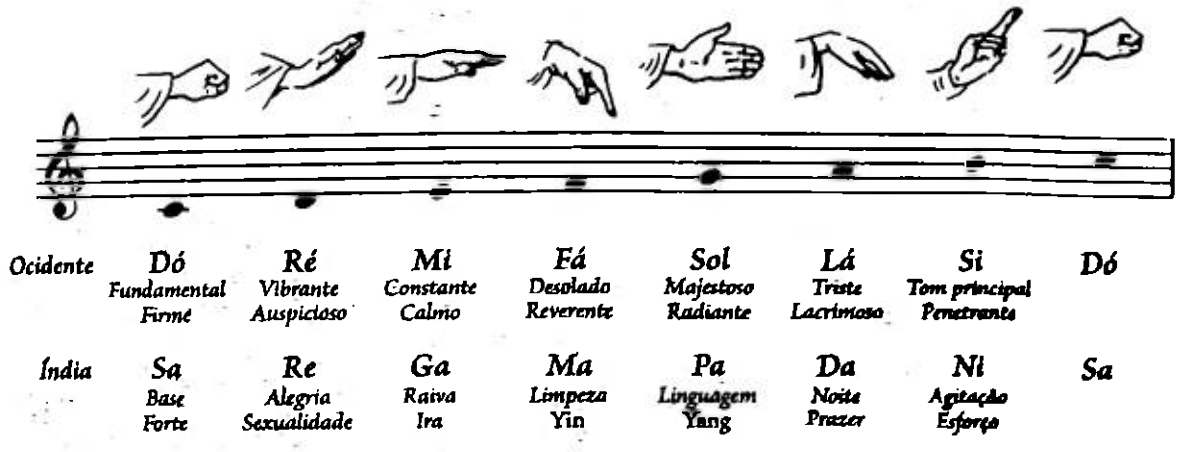
TENDÊNCIAS DE TOM

Tensão e relaxamento

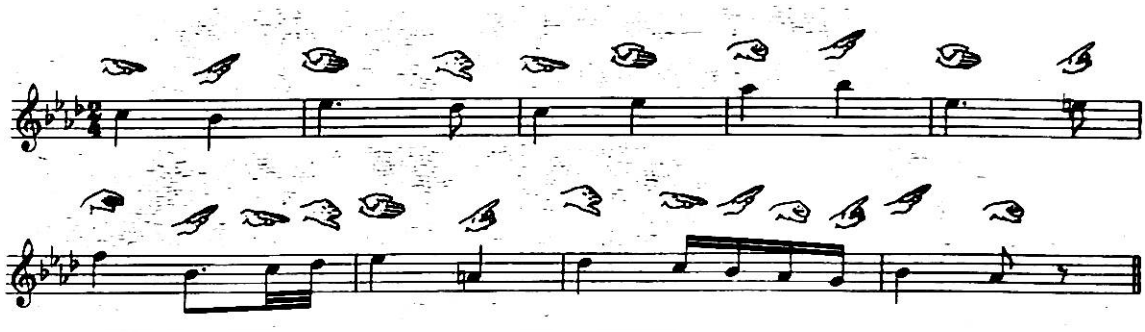
Devido à vigorosa gravidade e estabilidade dos graus da escala, as notas que desviam disso são percebidas como notas de transição. Os tons inteiros e semitons, e mesmo as terças menores e maiores, manifestam níveis variados de tensão para, em seguida, relaxarem quando uma tônica é alcançada, ou quando as notas de transição são trocadas por outras notas de transição menos dinâmicas. Além disso, as notas que estão mais distantes de um ponto ou grau de estabilidade são menos ativas ou dramáticas, em relação a ele, do que as notas adjacentes. As escalas menores têm basicamente o mesmo conjunto de tensões que as escalas maiores (*ver página 276*).

Um nível adicional de complexidade aparece em músicas que apresentam progressões e modulações de acorde, uma vez que o conjunto de tensões pode mudar. Nesse caso, a fundamental, a terça e a quinta iniciais de um acorde (e de uma escala) são graus estáveis, com o restante dos tons como intermediários; mas, conforme o acorde muda, a fundamental, a terça e a quinta do novo acorde tornam-se as novas tônicas, ou tônicas secundárias. No entanto, sem uma modulação efetiva, a importância do primeiro conjunto de relações não é esquecida, e um conjunto hierárquico de relações é criado. Uma vez que os acordes podem ser construídos com qualquer nota da escala como fundamental, eles podem assumir os mesmos aspectos estáveis ou transitórios que possuem as fundamentais sobre as quais são construídos; e podem conter seu próprio subconjunto de graus, formando duas camadas de estabilidade ou instabilidade que funcionam em qualquer momento.

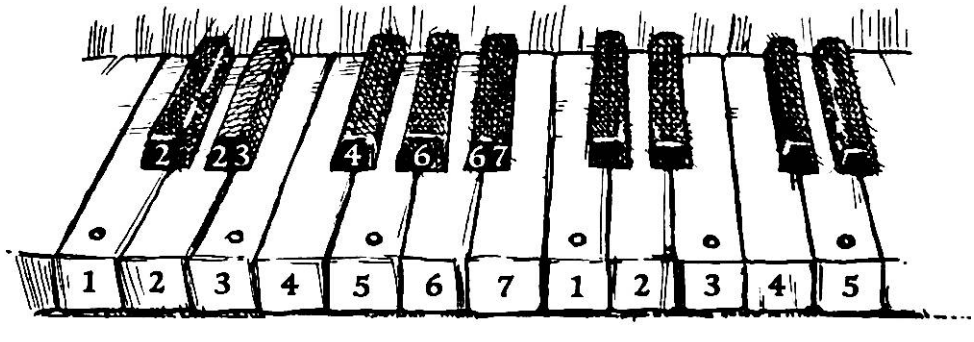
A genialidade de uma boa melodia envolve a compreensão desses dois níveis de relações, e a implementação engenhosa da manipulação de expectativa e resultado diante dessas tensões naturais, baseada, em grande parte, na utilização da memória, incorporando expectativa e satisfação.



Os sete tons da escala maior, seus respectivos sinais manuais Curwen e suas qualidades associadas. Os sinais manuais horizontais indicam as estações; os demais significam as tendências dos tons intermediários, abaixando-se ou elevando-se.



O tema principal do segundo movimento (adagio cantabile) *da* Sonata Patética *(Sonata para Piano nº 8), em Lá♭ Maior, de Beethoven, acompanhada pelos sinais manuais Kodály. Os acidentes (Mi natural no compasso 5 e Lá natural no compasso 7) atuam como tons principais temporários, de modo que recebem o sinal manual "si."*



Os tons intermediários vêm em sabores variados. O segundo pode ser rebaixado, natural ou elevado. O quarto só pode ser natural ou elevado; se fosse rebaixado, tornar-se-ia a terça. O sexto pode vir em três sabores, mas o sétimo também é limitado, pois só pode ser rebaixado ou natural; se fosse elevado, tornar-se-ia a oitava.

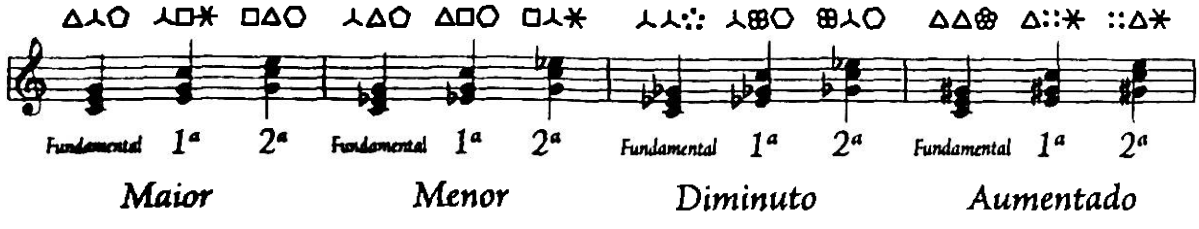
HARMONIAS BÁSICAS

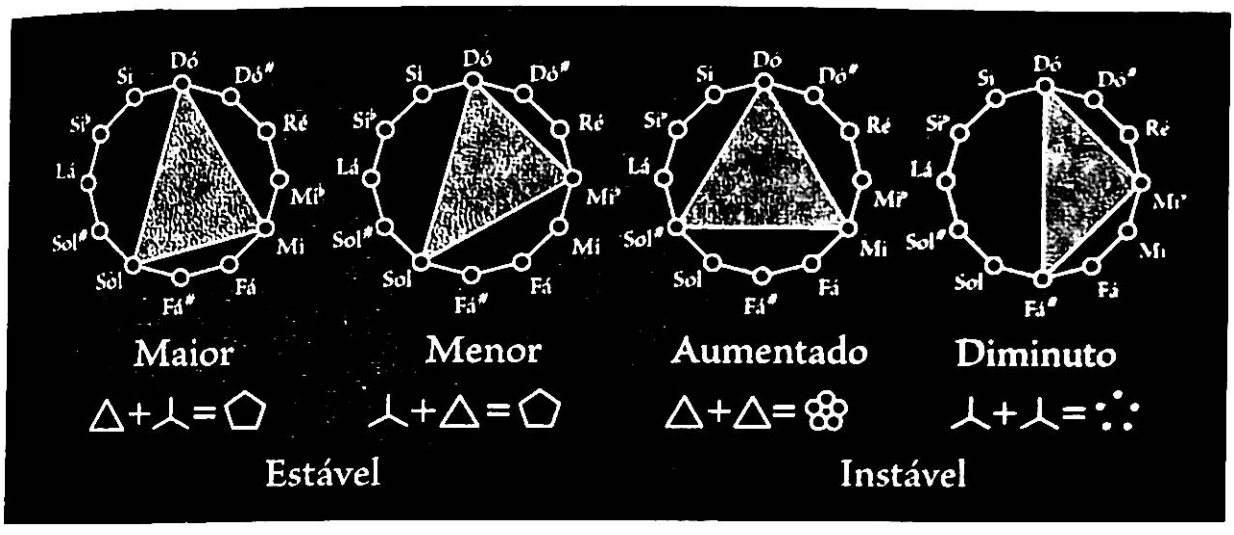
Triângulos e tríades

A tríade maior, que ocorre naturalmente como um par de terças (uma maior, depois uma menor, somando-se a uma quinta) na série harmônica, é a base da música triádica (acordes construídos em terças) em todo o mundo, ao passo que a quinta perfeita e a terça maior, depois da oitava, são os intervalos mais estáveis e ressonantes derivados dos sobretons.

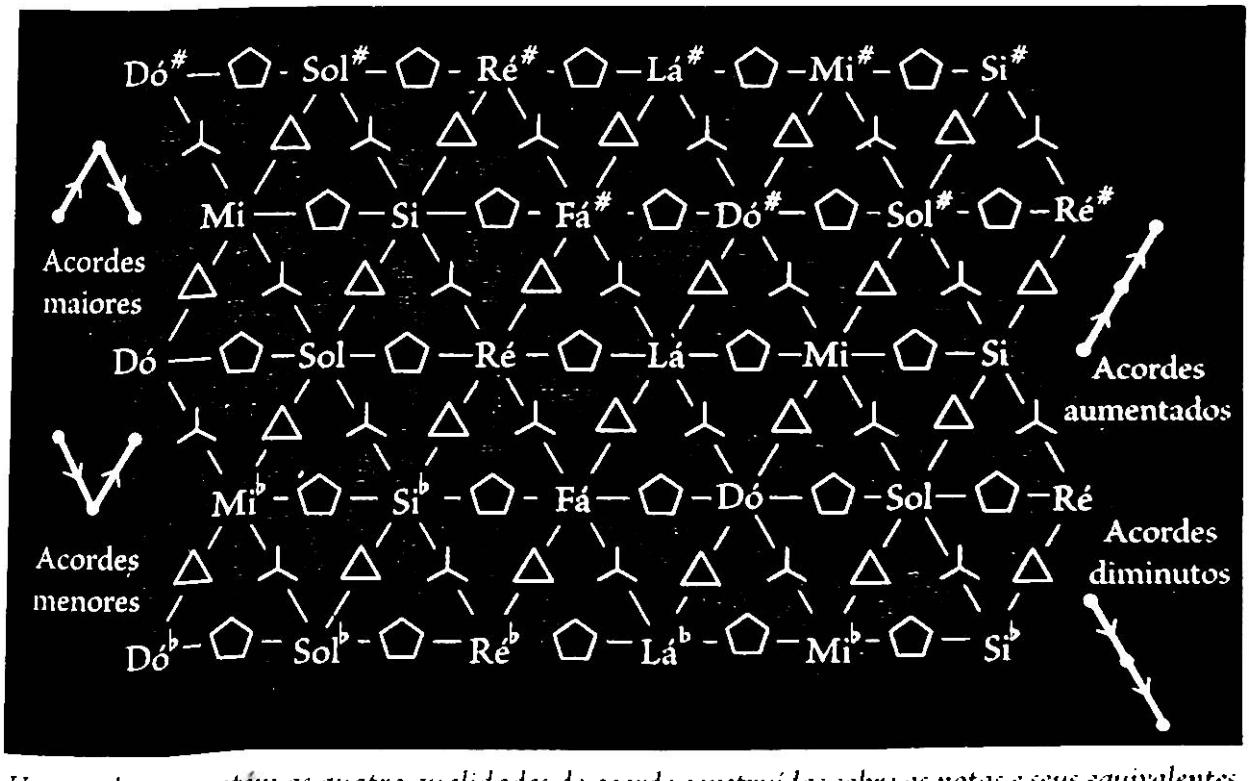
Mover uma nota do fundo para o topo de uma tríade cria uma inversão com as mesmas notas (*abaixo*), mas com um novo baixo. Observe que as tríades maiores, em uma primeira inversão, têm dois intervalos menores, dando-lhes um sabor oposto. O mesmo é válido para os acordes menores que, em sua primeira inversão, soam marcadamente como maiores, já que dois de seus três intervalos são maiores. Os acordes diminutos e aumentados são frequentemente considerados sem fundamentais, pois não possuem nenhuma quarta ou quinta estáveis.

As inversões conspiram para fortalecer ou enfraquecer a importância da fundamental. Na posição fundamental, os intervalos principais estão todos no lugar, como na série harmônica, com a nota de fundo recebendo a identidade do acorde que é construído sobre ela. Na primeira inversão, a terça do acorde está no baixo, mas não há intervalos fortes acima dela para enfatizar a sua importância. Em vez disso, a fundamental, agora no topo, é sustentada por uma quarta perfeita logo abaixo dela – outro intervalo arquitetônico forte. O mesmo acontece com a quinta no baixo, a segunda inversão, onde uma quarta perfeita novamente sustenta a fundamental. Desse modo, as notas combinadas sempre apontam para a sua posição fundamental, empilhada em terças.





As quatro qualidades de acorde das tríades, duas estáveis e duas instáveis. Os acordes simétricos soam hesitantes ou instáveis, enquanto os acordes assimétricos soam estáveis devido à presença da quinta perfeita, o único intervalo (com sua inversão, a quarta) que não divide a oitava de maneira uniforme. Alterar a quinta em meio tom, em ambos os casos, produz simetria e instabilidade. As quartas e quintas perfeitas são a arquitetura do sistema que contém a graciosa simetria de todos os outros intervalos.



Uma grade que contém as quatro qualidades de acorde construídas sobre as notas e seus equivalentes enarmônicos. Siga as chaves do lado esquerdo e do lado direito para escrever qualquer dos quatro acordes em terças.

MELODIA BÁSICA

Intervalos e saltos, contorno e gesto

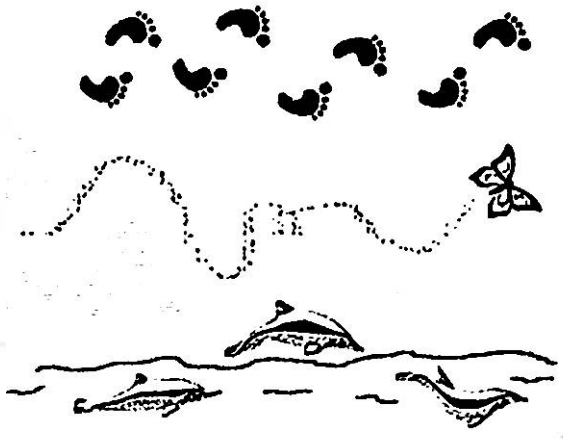
Uma melodia é criada pela sucessão de sons ao longo do tempo. Passo a passo, nota por nota, um contorno é formado, um caminho é esculpido. Aparecem os movimentos, como as inflexões utilizadas na fala, ou como a dialética de tons ascendentes e descendentes, ou como o contraste entre notas altas e baixas. Um salto distante parece amplo e grandioso, enquanto um pequeno é mais leve e delicado. Contornos curvos ou acidentados podem ser sugeridos.

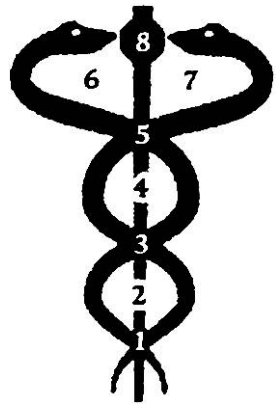
Normalmente, as melodias são uma mistura de pequenos *intervalos* e *saltos* maiores, com um salto, em uma direção, induzindo a um anseio por conclusão através de um intervalo na direção oposta, o que deixa uma lacuna por preencher. A natureza contínua da melodia significa que, quando as notas se desviam muito, o ouvinte, seguindo o caminho para descobrir aonde a música o leva, prefere que elas permaneçam conectadas e retornem. Muitas vezes, isso se manifesta por um entrelaçamento rítmico de tons, dentro e fora dos graus da escala.

A expressividade de uma melodia vem, em parte, pela tensão e relaxamento das notas intermediárias da escala, de sua localização rítmica em uma batida forte ou fraca, intensificando ou diminuindo seu efeito. Por vezes, uma melodia pode agir como duas melodias, ao saltar para cima e para baixo, mantendo, assim, alternadamente, duas linhas independentes, cada uma em seu próprio nível de som (ou *registro*). Outras melodias contam com tons predominantemente ascendentes ou descendentes para obter seu efeito.

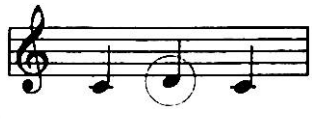
As melodias em música vocal são *melismáticas*, com muitos tons para uma sílaba, ou são *silábicas*, com um tom por sílaba.

Pausas silenciosas, ou descansos (*cesura*), são essenciais para as melodias. Elas dão tempo para respirar, refletir e interagir com a música. Os ouvintes esperam em suspensão o próximo evento, antecipando o que virá. Um descanso bem colocado em um tema pode ser um momento musical poderoso.

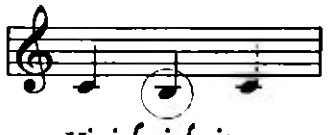




As melodias são facilmente expressas de modo visual. Avançam entre os graus fortes e mais fracos da escala, os trechos de transição, que contribuem para a tensão e para a forma expressiva de qualquer melodia.

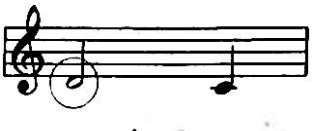


Vizinho superior
Adorna um grau a partir de cima.
Ritmo fraco

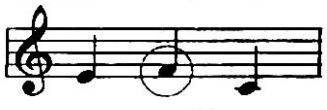


Vizinho inferior
Adorna um grau a partir de baixo.
Ritmo fraco

Tom passageiro
Atua como ponte entre dois graus.
Ritmo fraco



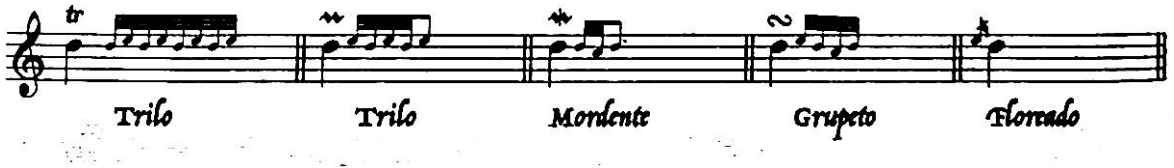
Apojatura
Um evento que não é de grau consonante e se apoia em um grau consonante.
Ritmo forte



Tom de fuga (échappée)
Uma nota que não é de grau consonante, escapa um intervalo em uma direção e salta para outra direção.

Cambiata
Um grupo vizinho, superior e inferior, muitas vezes entra em dissonância ao adornar um grau consonante.

Notas que não são de grau consonante podem tanto ser acentuadas (com ênfase) como não acentuadas (átonas), caindo em ritmos fortes ou fracos (exceto a apojatura, que é sempre acentuada). Quando ocorrem em ritmos fortes, elas competem mais fortemente com graus consonantes para transmitir a harmonia.



Ornamentos e enfeites melódicos – como (da esquerda para a direita) trilos ou trinados, mordentes, grupetos e floreados – também são fórmulas melódicas em menor escala.

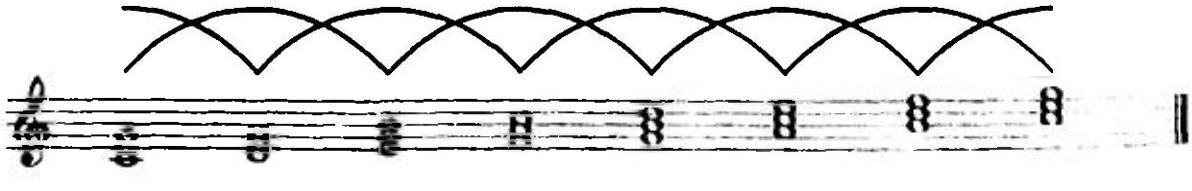
PROGRESSÕES DE ACORDE

Tônica, dominante e subdominante

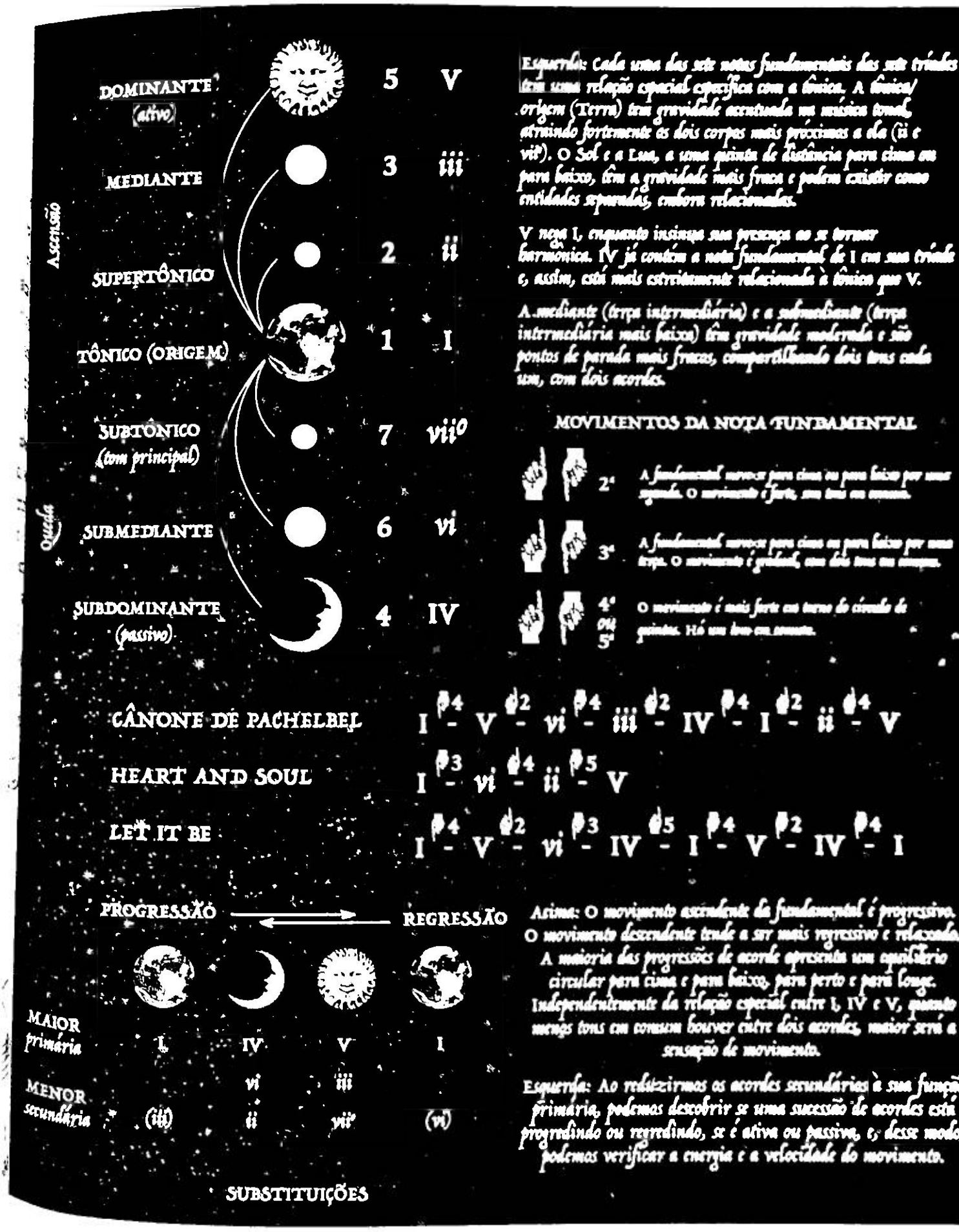
Os acordes assumem a identidade do grau sobre o qual são construídos, sendo reforçados pelas tendências tonais, de forma que, conforme eles se movem em uma progressão ou sucessão, podem afastar e atrair seus vizinhos, fortalecendo a tonalidade. Uma vez que as notas em um acorde colaboram para enfatizar uma tonalidade, todos os acordes colaboram para fortalecer ou enfraquecer a tônica.

O movimento progressivo mais forte que uma fundamental pode assumir é uma quinta, seja descendente ou ascendente, com destaque para o estreito parentesco e a relativa gravidade de três tons consecutivos no círculo de quintas. Em seguida, o movimento de acorde mais básico é da *tônica* (I) para a *subdominante* (IV), depois para a *dominante* (V), e de volta para a tônica (I); contudo, outras tríades na escala podem substituir essas três funções básicas, sem sacrificar inteiramente a função ou o significado temporal de sua localização (*abaixo*). As posições I e *iii* compartilham 3 e 5 e, portanto, podem substituir-se uma à outra. Da mesma forma, *ii* e IV compartilham dois tons, assim como *vi* e I, e V e *vii*°. Quanto mais comuns os tons, mais suave e gradual será o movimento harmônico.

Essencialmente, existem três estados em progressão harmônica tonal – abertura, partida e retorno – que são repetidos, em ciclos, para reforçar a tônica. Os acordes com mais intervalos simétricos (as terças) são instáveis ou exigem uma resolução, e possuem uma função dominante, enquanto as harmonias com quartas e quintas justas (os únicos intervalos assimétricos) são mais relaxantes e não dominantes.



I	*ii*	*iii*	IV	V	*vi*	*vii*°	I
1-3-5	2-4-6	3-5-7	4-6-1	5-7-2	6-1-3	7-2-4	1-3-5


Ascensão
Queda
DOMINANTE (ativo) 5 V
MEDIANTE 3 iii
SUPERTÔNICO 2 ii
TÔNICO (ORIGEM) 1 I
SUBTÔNICO (tom principal) 7 vii°
SUBMEDIANTE 6 vi
SUBDOMINANTE (passivo) 4 IV
Esquerda: Cada uma das sete notas fundamentais das sete tríades tem uma relação espacial específica com a tônica. A tônica/origem (Terra) tem gravidade acentuada na música tonal, atraindo fortemente os dois corpos mais próximos a ela (ii e vii°). O Sol e a Lua, a uma quinta de distância para cima ou para baixo, têm a gravidade mais fraca e podem existir como entidades separadas, embora relacionadas.
V nega I, enquanto insinua sua presença ao se tornar harmônica. IV já contém a nota fundamental de I em sua tríade e, assim, está mais estreitamente relacionada à tônica que V.
A mediante (terça intermediária) e a submediante (terça intermediária mais baixa) têm gravidade moderada e são pontos de parada mais fracos, compartilhando dois tons cada um, com dois acordes.
MOVIMENTOS DA NOTA FUNDAMENTAL
2ª
A fundamental move-se para cima ou para baixo por uma segunda. O movimento é forte, sem tons em comum.
3ª
A fundamental move-se para cima ou para baixo por uma terça. O movimento é gradual, com dois tons em comum.
4ª ou 5ª
O movimento é mais forte em torno do círculo de quintas. Há um tom em comum.
CÂNONE DE PACHELBEL I 4 - V 2 - vi 4 - iii 2 - IV 4 - I 2 - ii 4 - V
HEART AND SOUL I 3 - vi 4 - ii 5 - V
LET IT BE I 4 - V 2 - vi 3 - IV 5 - I 4 - V 2 - IV 4 - I
PROGRESSÃO
REGRESSÃO
MAIOR primária I IV V I
MENOR secundária (iii) vi ii iii vii° (vi)
SUBSTITUIÇÕES
Acima: O movimento ascendente da fundamental é progressivo. O movimento descendente tende a ser mais regressivo e relaxado. A maioria das progressões de acorde apresenta um equilíbrio circular para cima e para baixo, para perto e para longe. Independentemente da relação especial entre I, IV e V, quanto menos tons em comum houver entre dois acordes, maior será a sensação de movimento.
Esquerda: Ao reduzirmos os acordes secundários à sua função primária, podemos descobrir se uma sucessão de acordes está progredindo ou regredindo, se é ativa ou passiva, e, desse modo, podemos verificar a energia e a velocidade do movimento.

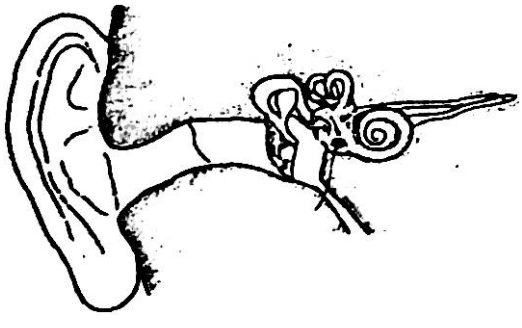
INSTRUMENTAÇÃO

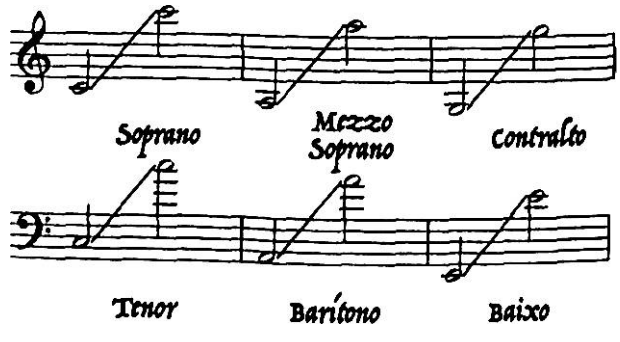
As texturas de timbre

Os musicólogos identificam seis tipos básicos de instrumento musical: membranofones (membranas), cordofones (cordas), idiofones (vibração, percussão),[7] metalofones (metálicos), aerofones (ar) e eletrofones (eletrônicos).

Os instrumentos de sopro geralmente têm uma extremidade aberta e, muitas vezes, uma forma cônica para liberar o som no ar. O sopro pode passar através de um espaço estreito para vibrar uma palheta ou duas, ou o som pode ser gerado pelo zumbido dos lábios (soprando através de um tubo), tal como acontece com os instrumentos de metal. As cordas podem ser dedilhadas ou tocadas com arco, e podem ressoar em um acordo harmônico com outras cordas. Os instrumentos de percussão movimentam o ar rapidamente, de forma abrupta e ruidosa, e possuem membranas e recursos para golpeá-las. Eles fornecem um contraste para os tons suaves e contínuos de melodia e harmonia, pontuando com trinados, chiados ou zunidos, repiques e badalos.

Todas as culturas utilizam percussão em sua música, e muitos instrumentos de metal e de corda revelam a espiral ou curvatura algorítmica de tom. Algumas culturas também acreditam que os instrumentos contêm almas de animais que cantam quando a tripa[8] ou a pele vibram. Muitos instrumentos se assemelham às estruturas do ouvido, fazendo parte da dualidade da vibração, com os instrumentos gerando e o ouvido recebendo o som. A voz pode imitar a maioria dos instrumentos (*os intervalos básicos das vozes masculinas e femininas são mostrados abaixo*).





Exemplos de instrumentos de corda, sopro e percussão de várias épocas e lugares ao redor do mundo.

RITMOS MAIS COMPLEXOS

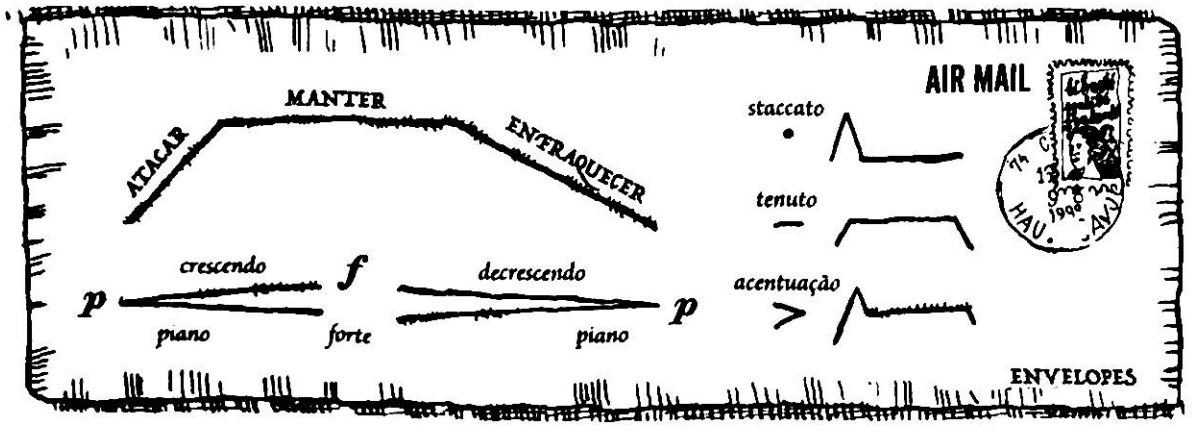
Dinâmica, articulação, elocução e síncope

Os sons evoluem com o tempo, e os *envelopes* (*abaixo*) utilizam três fases básicas (concepção, continuação e encerramento) para caracterizar as diferentes qualidades de volume ao longo do tempo. As notas em *staccato* têm uma qualidade breve e imparcial, as notas em *tenuto* são ligeiramente estendidas para conectá-las (em forma de *legato*) com as que estão próximas, enquanto uma acentuação indica um começo forte para um tom, enfatizando *seu início*.

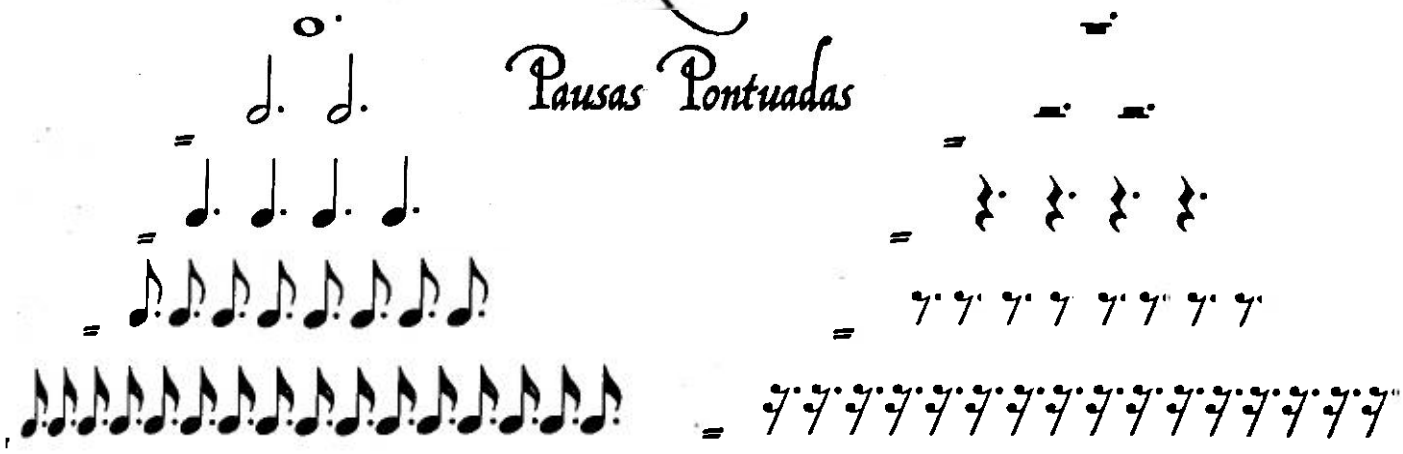
Piano e *forte* são indícios – suave e potente, respectivamente – utilizados para sugerir volume ou amplitude. O pianoforte (piano) foi chamado assim por sua capacidade de tocar tanto forte como suave, em contraste com os instrumentos de teclado mais antigos, como o cravo e o clavicórdio, que não conseguiam isso.

As articulações e dinâmicas em notação musical moldam passagens e contribuem para a percepção de temperamento e disposição, seja divertida, lúgubre, extravagante ou agressiva. As articulações afetam a presença de ruído no instrumento, atuando como as consoantes sobre as vogais.

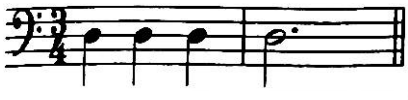
Na imagem ao lado, são mostrados ritmos pontuados, utilizados em notação tripla. Observe o ponto à direita da nota, em vez de acima ou abaixo dela (como acontece com o *staccato*). Os ritmos continuam a tornar-se complexos e a subdividir-se em síncope e polirritmia (*ver também página 402*).



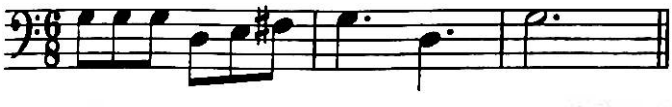
Notas e Pausas Pontuadas



As notas (esquerda) e as pausas (direita) pontuadas. Os ritmos pontuados são equivalentes a uma vez e meia o valor da nota ou pausa não pontuada, e são úteis para a obtenção de subdivisões triplas.

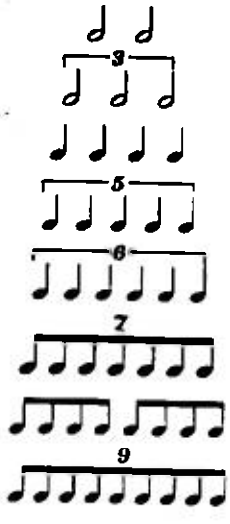


Uma amostra de linha de baixo em 3/4 que ilustra a relação de três quartos para uma mínima pontuada, ambas ocupando a mesma quantidade de tempo.

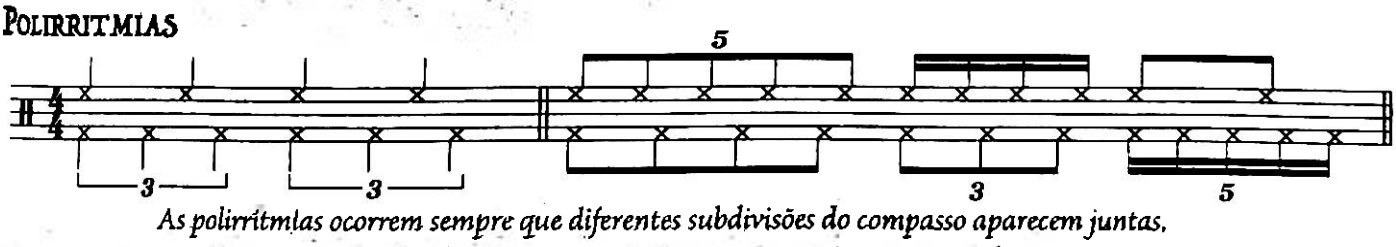


Em 6/8, três colcheias são equivalentes a duas colcheias pontuadas, que, por sua vez, se equiparam a uma mínima pontuada.

As quiálteras podem representar qualquer número de subdivisões, dependendo do contexto métrico em que aparecem. As subdivisões de quiáltera são efetivamente idênticas às subdivisões de frequência na série de sobretons. Por esse ponto no sistema de notação, virtualmente qualquer subdivisão do compasso pode ser colocada em notação.



Polirritmias



As polirritmias ocorrem sempre que diferentes subdivisões do compasso aparecem juntas, como 2 contra 3, 5 contra 4, 4 contra 3, 2 contra 5, e assim por diante.

Síncope

A síncope é a mudança de ritmos fortes para ritmos fracos, modificando, assim, nossa percepção de previsibilidade e estabilidade. Com muita síncope, ficamos perdidos por um pulso. Sem síncope suficiente, logo ficamos entediados. A forma como as diferentes culturas forçam e arrastam suas estruturas métricas pode ser rastreada, em grande parte, através do uso de síncope.

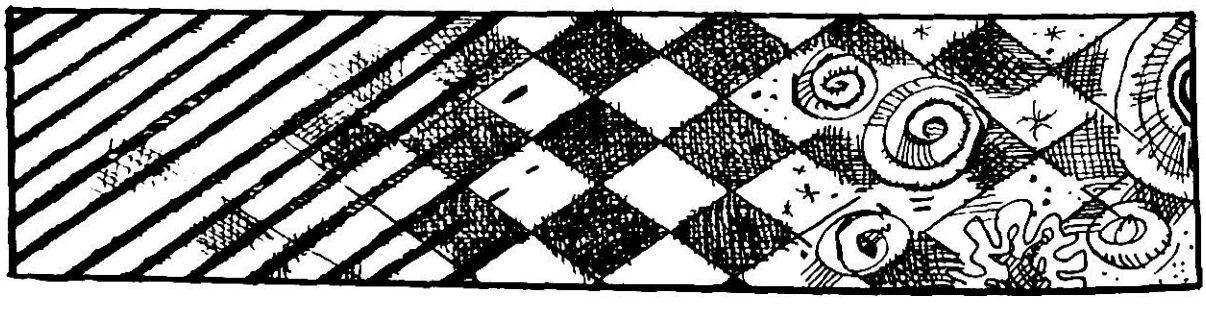
FORMA E ESTRUTURA

Aonde estou indo e como cheguei aqui?

A estrutura musical tende a desdobrar-se em partes ou seções. Uma ideia, um estado de espírito ou um motivo é apresentado, pela primeira vez, antes que ocorra algo que o modifique ou que se diferencie dele, ainda que, não obstante, lhe diga respeito; com isso, cria uma sensação de unidade e, em última análise, de chegada ou retorno. Esse padrão de desdobramento também ajuda a orientar os ouvintes no tempo, de modo que, utilizando sua atenção e memória, eles podem dizer onde se encontram na textura musical. Sem a estrutura musical, os ouvintes estariam à deriva em um mar de ideias desconexas – e algumas músicas são intencionalmente compostas dessa forma para obter justamente esse efeito.

A maioria das pessoas passa por vicissitudes de emoção em sua vida, deixando o lar, partindo para o mundo, vivendo aventuras e, finalmente, voltando para casa. A jornada de uma vida é como uma composição musical, nascida no mundo a partir do nada, vivendo por um período de tempo em forma e estrutura, dançando espontaneamente à beira do caos e da ordem e, então, finalmente, retornando. Nesse sentido, a música ocidental tende a ser mais linear; a música oriental, mais cíclica.

O tempo musical pode ser visualizado como um *storyboard*[9] (*imagem abaixo*), com cada segmento expressando a essência de determinado temperamento, o significado, a intenção e o propósito de uma seção ou movimento. Frequentemente, essas seções são ordenadas levando em consideração a atenção do ouvinte, em diferentes graus de complexidade e envolvimento, como uma cerimônia que envolve invocação, meditação e dança.



Formas moleculares básicas da música ocidental

Formas binárias são simplesmente duas seções que contrastam entre si para formar um todo, AB.

A binária arredondada traz de volta uma versão truncada de A, em geral o suficiente para sugerir ou lembrar o ouvinte de onde eles estiveram, ABA'.

As formas ternárias apresentam A em recapitulação, resultando na estrutura ABA.

Diagramas cosmológicos

Algumas chaves antigas para as nuanças na evolução da forma, mostrando como o tempo, o espaço e sua manifestação se relacionam.

Os humores, as estações e os elementos da Antiguidade. Essas correspondências ilustram um tipo inter-relacionado de dinamismo e fluxo de tempo, temperamento, tipo de personalidade, e a experiência humana.

O sistema de elementos do Extremo Oriente demonstra princípios de equilíbrio e desequilíbrio, e revela como o fluxo do tempo e os elementos se correspondem para interagir e influenciar-se mutuamente.

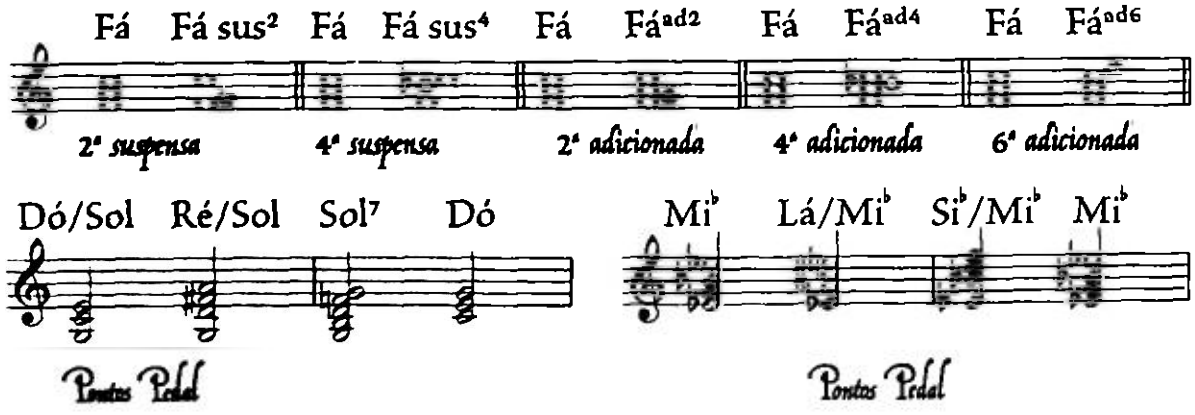
HARMONIAS MAIS COMPLEXAS

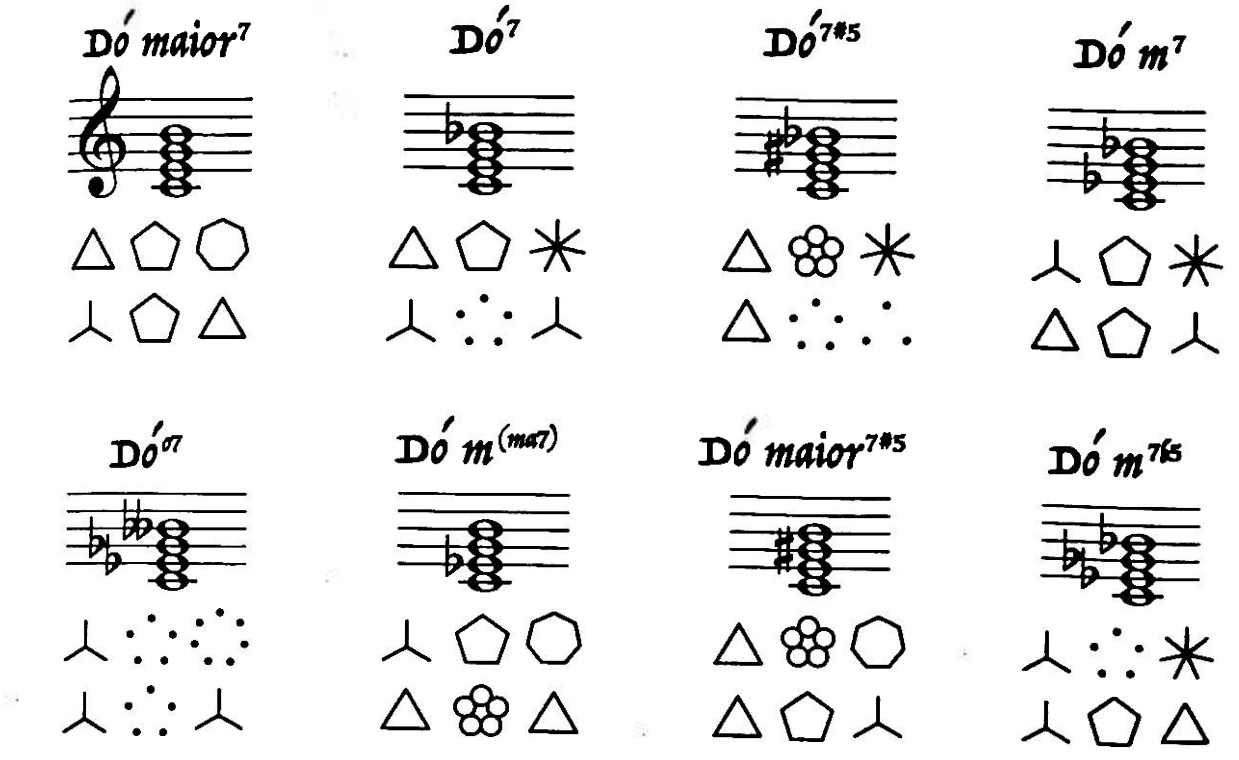
As sétimas e suas inversões aumentam o suspense

Continuar a empilhar as terças além da tríade produz sétimas maiores, menores, ou diminutas, com sua atração dinâmica em direção à tônica. Assim como a fundamental e a quinta de um acorde fornecem uma estrutura arquitetônica, a terça e a sétima fornecem sentimento e sabor, atração e oposição. Sendo por vezes referidos como *tons-guias*, eles conduzem o movimento da harmonia de acorde para acorde, juntando-se à intensidade do movimento adiante. A presença de dois tons-guias em um acorde maximiza isso: por exemplo, a sétima dominante, cuja terça e cuja sétima frequentemente determinam a fundamental tônica e a terça.

Na figura abaixo aparecem acordes pouco sonoros *em suspensão*, onde a terça é substituída por sua nota inferior ou superior. De maneira similar, acordes *adicionados* assumem uma cor, sem comprometer nenhuma das três notas básicas da tríade – a segunda, a quarta e a sexta –, suavizando a sonoridade geral.

Se o tom mais baixo permanecer constante, enquanto os acordes se movem ao seu redor, então estamos na presença de um *ponto pedal*, assim chamado por causa da capacidade do órgão para sustentar tons graves, tocados com os pés, ao modificar as harmonias tocadas com as mãos no teclado. Isso mantém um tom inferior central no lugar, que pode ou não ser a fundamental do acorde. De fato, um ponto pedal não tem de pertencer ao acorde de modo algum, o que o diferencia de uma inversão.





Os oito acordes básicos de sétima, derivados da justaposição de terças. Observe o conteúdo do intervalo dos acordes maiores versus os acordes menores, bem como a qualidade aberta e expansiva dos acordes com intervalos maiores e mais perfeitos, e a qualidade mais fechada e contrativa dos acordes com intervalos menores e reduzidos. O maior7, m(ma7) e o maior7#5 possuem os intervalos mais amplos. O 7#5 e o m7 têm uma harmonia semelhante, enquanto 7, 07 e m7b5 (também conhecidos como meio diminutos Ø) são compostos, principalmente, de intervalos menores.

		Dó maior7	Dó7	Dó7#5	Dó m7	Dó07	Dó m(ma7)	Dó maior7#5	Dó m7b5
3ª Inversão	6 4 2	Si	Si♭	Si♭	Si♭	Si♭♭	Si	Si	Si♭
2ª Inversão	6 4 3	Sol	Sol	Sol#	Sol♭	Sol♭	Sol	Sol#	Sol♭
1ª Inversão	6 5 3	Mi	Mi	Mi	Mi♭	Mi♭	Mi♭	Mi	Mi♭
Fundamental	7 5 3	Dó	Dó	Dó	Dó	Dó	Dó	Dó	Dó

As sétimas invertidas. A notação de baixo cifrado (segunda coluna) indica o posicionamento intervalar de notas acima do baixo, o que indica, de fato, a inversão, embora 1, 3 e 5 sejam presumidas e nem sempre escritas. Continuamos a ouvir a identidade e, portanto, a função do acorde como se ele estivesse na posição fundamental. O cérebro reagrupa as notas em sua formação mais próxima, independentemente de como as notas individuais são expressas, mesmo quando espaçadas abertamente através de oitavas (ver também página 258).

TONALIDADE E MODULAÇÃO

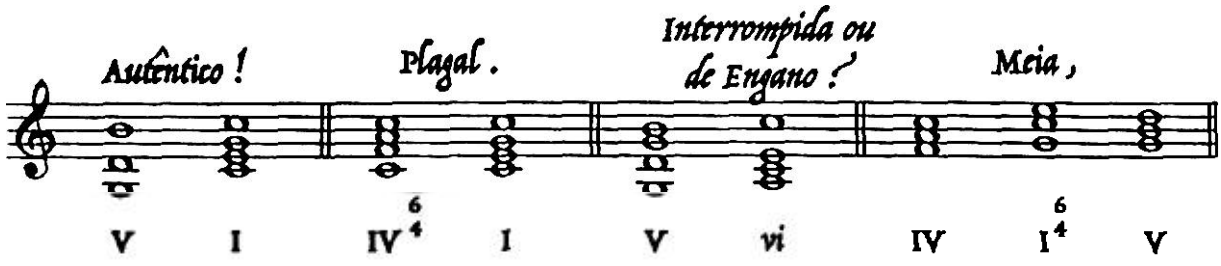
Não há lugar como o lar

A tonalidade, ou a sensação de estar em determinado tom, é criada mais facilmente tocando o padrão I–IV–V–I (*ver páginas 262-63*).

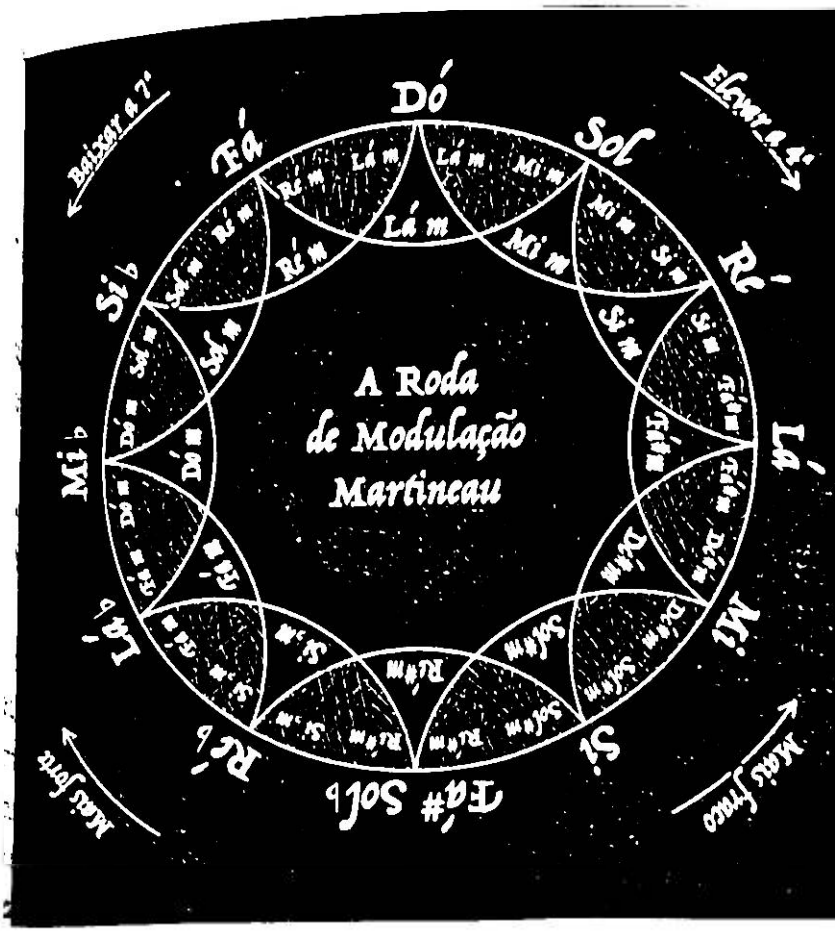
O acorde tônico tem a mesma função da nota tônica da escala. É o lugar onde as coisas começam e terminam, e com o qual tudo se relaciona. Em música tonal, o *tom principal*[10] é sempre usado para apontar para a tônica, e, assim como acontece com a circularidade da escala, todas as outras estações da escala e seus acordes servem tanto para fortalecer como para enfraquecer a gravidade relativa da tônica, seja partindo ou retornando.

No entanto, a poderosa tônica pode ser desestabilizada. Outros acordes, que não a tônica, podem ser reforçados com a introdução de seus respectivos tons principais (a terça de qualquer acorde dominante, meio tom abaixo de uma fundamental). As notas que ficam fora da tonalidade podem aparecer para apontar outras fundamentais como possíveis tônicas. Pode emergir a percepção de uma segunda tonalidade. Se isso acontecer em um período de tempo adequado, e com a repetição dos acordes I–IV–V–I da nova tonalidade, então ocorrerá uma *modulação* completa, e uma nova tônica será criada. Sem essas afirmações, o movimento é temporário, ocorrendo apenas uma *modulação aparente*.[11]

Depois de um tempo, o ouvido pode acostumar-se com a nova tonalidade, mas a música tonal frequentemente retorna à tonalidade inicial, ao restabelecer a nota modificada, criando a sensação de que nunca partimos realmente. Pouco depois, surge uma relação entre as tonalidades, refletindo as relações entre os acordes, que, por sua vez, refletem as relações entre os tons individuais na escala.



Cadências (terminações). Em música, uma cadência funciona da mesma maneira que a pontuação na linguagem. A cadência autêntica tem um forte grau de finalidade, devido ao fato de seu tom principal e sua fundamental se tornarem harmônicos para a tônica. A cadência plagal é mais sutil, carecendo do ímpeto da dominante, o "Amém" de boa parte da música sacra europeia. Uma cadência interrompida ou de engano resolve-se em algum outro lugar que não é o esperado (a tônica), o que é frequentemente uma surpresa. A meia cadência fica em aberto, terminando na dominante, às vezes com um acorde de tônica decorrido em segunda inversão, para aumentar a expectativa de resolução.



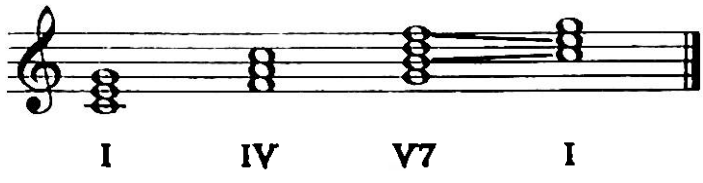
O ciclo de quintas não é somente um diagrama de tons comuns, mas também um diagrama de acordes comuns, que podem ser utilizados para facilitar uma modulação (mudança de tonalidade). No diagrama ao lado, as notas maiores estão do lado de fora do círculo, enquanto as tríades menores – as menores relativas das notas maiores externas – ocupam o interior. Qualquer acorde maior também pertencerá às duas escalas que o flanqueiam de ambos os lados.

Exemplo 1: A tonalidade de Dó maior compartilha os acordes de Lá menor e Ré menor com a tonalidade de Fá maior, facilmente visível no diagrama.

Exemplo 2: A tonalidade de Mi menor compartilha o acorde de Dó maior com a tonalidade de Ré menor.

Ao elevar a quarta de uma tonalidade, alcança-se a escala de uma quinta mais alta. Ao abaixar a sétima, alcança-se a escala de uma quinta abaixo. Existem apenas dois pares de meios-tons na escala maior (3-4, 7-8), e, portanto, eles são os mais instáveis, acomodando facilmente esse tipo de mudança de tonalidade.

Nesta progressão básica I-IV-V-I, observe que o trítono – ou a quinta diminuta, formada entre o instável tom principal Si e o Fá mais elevado de Sol7 – se contrai em direção ao interior, para a fundamental e a terça estáveis, seguido pelo movimento ascendente da dominante no baixo. Isso maximiza a finalidade e a realidade do acorde na posição I como sendo o verdadeiro lar.



Para modular da tonalidade de X para a tonalidade de Y, encontre um acorde central que esteja em ambas as tonalidades e substitua por IV.

Na roda acima, movendo em sentido horário:
Movendo um clique: vi em X é ii em Y, OU iii em X é vi em Y
Movendo dois cliques: iii em X é ii em Y
(Mover três ou mais cliques requer pegar emprestado da menor paralela)

Na tonalidade de X: 1 - central - V - 1
Em X: 1 - central
Em Y: central - V - 1

Exemplo: para alterar a tonalidade de Sol para Lá, e de volta para Sol (use Si m):

Sol - Si m - Ré7 - Sol, Sol - Si m - Mi7 - Lá
Lá - Si m - Mi7 - Lá, Lá - Si m - Ré7 - Sol

MODAL, TONAL, DRONAL

Sistemas e escalas mundiais

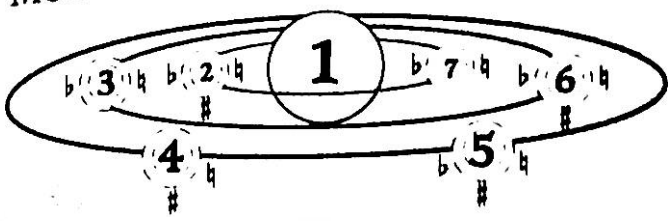
Em toda escala musical, há um conjunto primário de tons que é muito utilizado, e um conjunto secundário menor, utilizado para caracterizar o primeiro. As escalas de cinco notas, pentatônicas primárias básicas, formam a espinha dorsal de muitas escalas ao redor do mundo (*abaixo*), sendo a mais simples derivada de quatro quintas consecutivas. Outras escalas seguem as forças gravitacionais das estações, e utilizam alteração cromática para comunicar tensão e emoção. As escalas compostas por um número maior de meios-tons podem ser mais tensas, cheias de introversão, complexidade cromática e *páthos*, enquanto as escalas mais diatônicas podem ser extrovertidas, simples, afirmativas e expansivas.

Existem, essencialmente, três tipos de organização da sonoridade. A música *modal*, que não modula, utiliza os tons principais generosamente e, algumas vezes, não os utiliza de modo algum. Nela, o movimento harmônico é possível, e os acordes podem ser emprestados de outras escalas. Em música *tonal*, que modula, os cinco tons secundários – não utilizados na escala maior – têm uma relação relativamente fixa com o conjunto primário, determinada pelo círculo de quintas (#4, ♭7, #5, #1, ♭3), onde cada um sugere temporariamente a escala em que os tons secundários atuam como tons principais. Esses acidentes duram apenas no compasso em que ocorrem e são restaurados em compassos subsequentes, algumas vezes seguidos de um acidente de cortesia que funciona como um lembrete. A música *dronal* não tem harmonia, sendo a própria escala o seu universo harmônico, de modo que todos os intervalos se relacionam unicamente com o ponto imóvel, o *drone* (ou *pedal*), com uma faixa cromática completa à disposição.

Escalas pentatônicas maiores

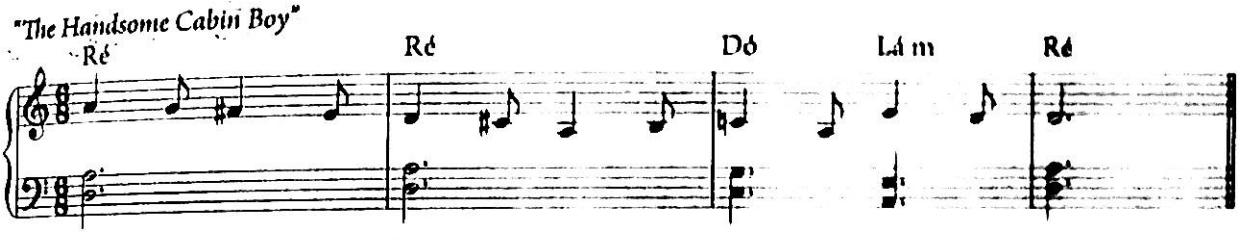
Escalas pentatônicas menores

MODAL

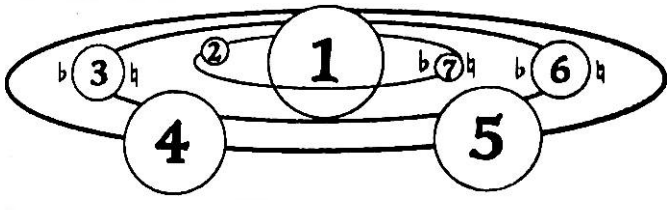


Em música modal, o acorde dominante não precisa ser maior, nem mesmo utilizado, e os tons principais ou dominantes podem ocorrer em outras posições além da posição padrão maior/menor. Com boa variabilidade harmônica e tendências de tom suavizadas, este é o tipo mais comum de sistema harmônico.

"The Handsome Cabin Boy"

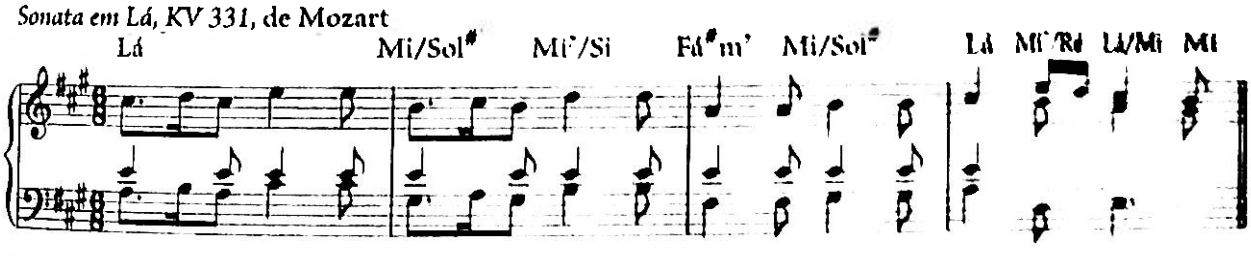


TONAL

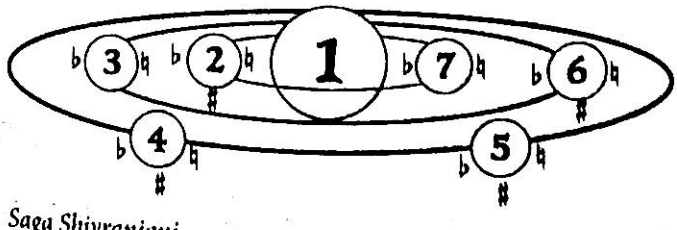


A música tonal envolve apenas duas modalidades: maior e menor. As posições dos meios-tons são altamente organizadas. O acorde dominante é sempre maior, apontando para a tônica com seu poderoso tom principal (o terceiro de seu acorde, e também a sétima da escala).

Sonata em Lá, KV 331, de Mozart



DRONAL



A música dronal – melódica por natureza, em vez de harmônica – tem todas as notas da escala assumindo papéis variáveis, adquirindo importância por intervalo e por repetição. Todas as notas sempre se relacionam com o ponto central, o tom de repouso ou drone.

Saga Shivranjani

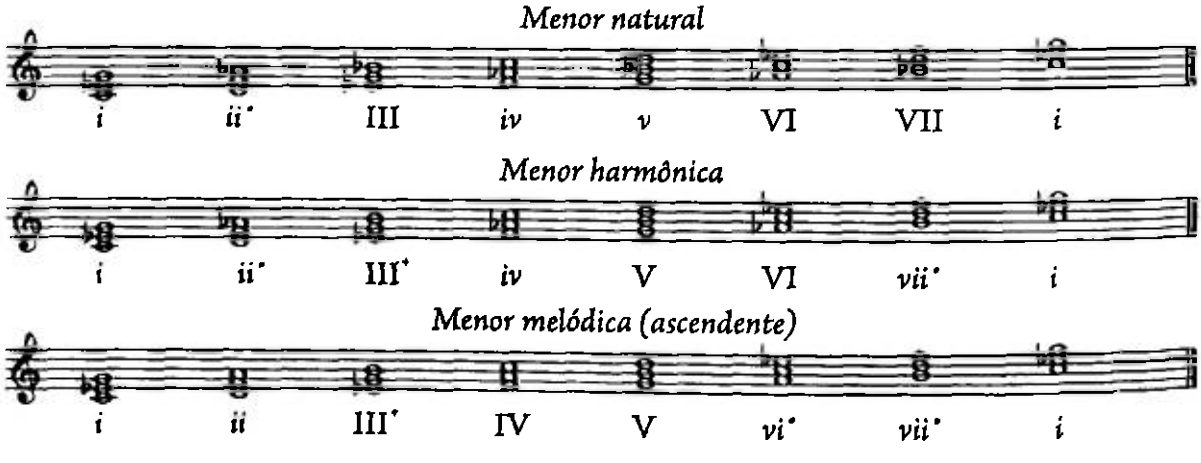
AS TRÊS MENORES

Natural, harmônica e melódica

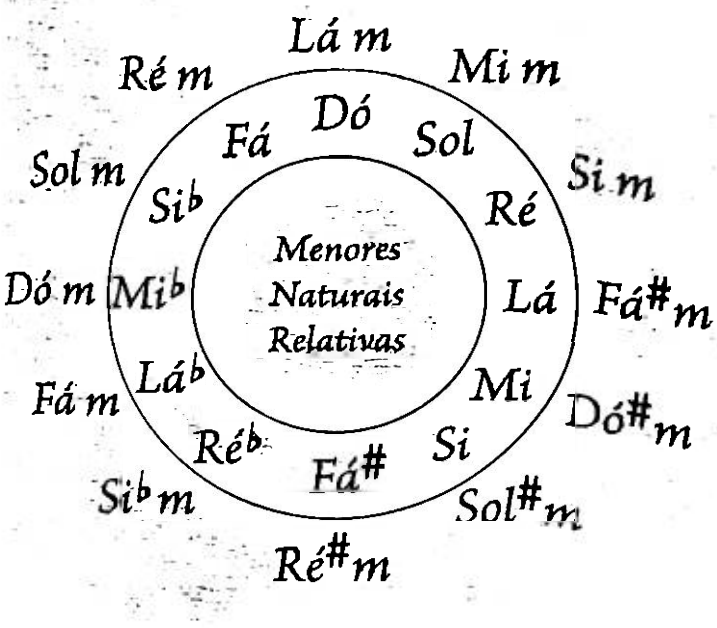
O papel ativo dos tons principais ou dominantes, na música harmônica, cria complexidades para as chaves menores. O acorde dominante natural em tom menor não é um acorde maior, e a necessidade de um tom principal requer que ele seja alterado, assim como a escala a partir da qual é construído.

No caso da *menor natural*, estamos em presença do modo *eólico*, que ocorre naturalmente como o relativo para qualquer escala maior, iniciado em uma terça mais baixa. Aumentando a terça no acorde dominante, que é a sétima da escala, cria-se a *menor harmônica*, alterada para fins harmônicos. No entanto, a escala que resulta disso contém uma lacuna audível entre a sexta menor em bemol e a sétima maior natural, uma segunda aumentada, o que nem sempre funciona melodicamente, soando como um intervalo da música não ocidental. Para suavizar essa lacuna melódica, o sexto grau da escala também é alterado, elevado, de modo que a ascenção em menor se assemelha a uma escala maior em suas quatro notas mais altas. Essa é a *menor melódica*, que, algumas vezes, apresenta duas formas: ascendente e descendente, elevando e abaixando a sexta e a sétima de modo correspondente. Na verdade, a menor melódica descendente é idêntica à menor natural.

Abaixo são apresentadas as tríades das três escalas menores.

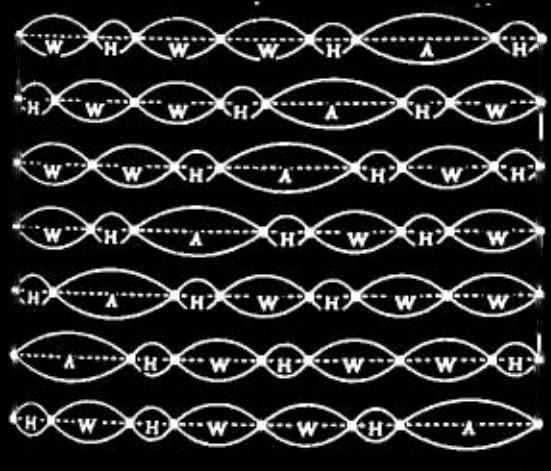


Essas três escalas menores são usadas alternadamente, dependendo das necessidades do compositor; e aderem às regras básicas para o uso de cromatismo no modo menor. Como a maior/jônica, elas podem ser usadas como pontos de partida para gerar outras escalas. Sendo assim, existem de fato sete modos de menor harmônica e sete modos de menor melódica (mostrados ao lado).



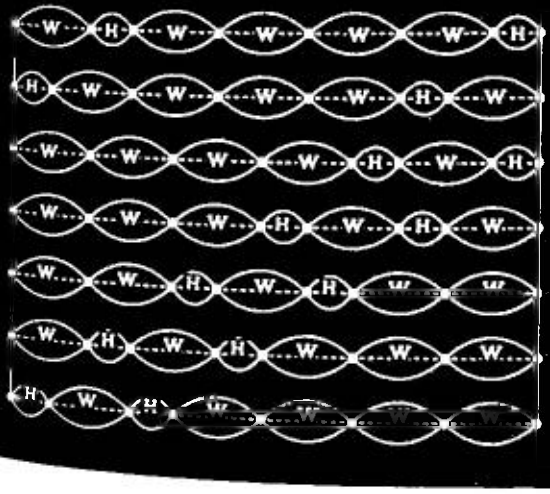
A menor natural é idêntica a uma escala maior que se encontra uma terça menor acima. Então, o Lá menor e o Dó maior são, de fato, as mesmas notas, separadas por uma terça. Sendo eólica, a menor natural já compartilha os mesmos tons que a sua maior relativa, a jônica; portanto, elas compartilham a mesma armadura de clave (ver página 253).

Os sete modos da menor harmônica



	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1			♭			♭		
2		♭	♭		♭		♭	
3					♯			
4			♭	♯			♭	
5		♭				♭	♭	
6		♯		♯				
7		♭	♭	♭	♭	♭	♭♭	

Os sete modos da menor melódica



	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1			♭					
2		♭	♭				♭	
3				♯	♯			
4				♯			♭	
5						♭	♭	
6			♭		♭	♭	♭	
7		♭	♭	♭	♭	♭	♭	

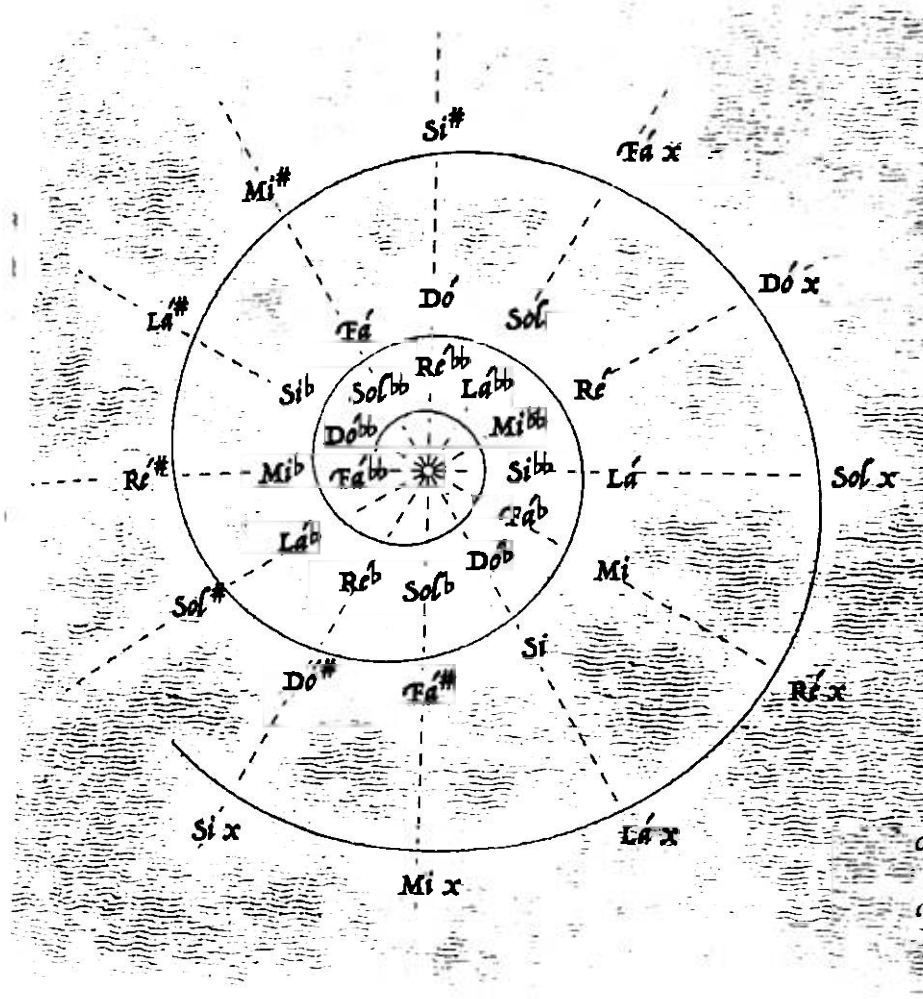
MAIS INTERVALOS

O grande fica maior e o pequeno fica menor

Assim como os acordes podem ser invertidos, o mesmo acontece com os intervalos que os compõem. As terças são invertidas para se tornarem sextas, e as sétimas tornam-se segundas. Quando invertidos, os intervalos maiores tornam-se menores, os intervalos diminutos tornam-se aumentados, e vice-versa. Intervalos invertidos têm a mesma função básica que suas contrapartes não invertidas, mas possuem uma sensação maior de incerteza. Os compositores brincam com eles ao elevá-los ou abaixá-los ainda mais. Por exemplo, o prolongamento de uma sexta maior produz o intervalo de uma sexta aumentada, idêntico em som a uma sétima menor, mas funcionando de forma bastante diferente. Lembre-se de que a grafia conta, e de que uma sétima menor tende a se resolver para dentro, enquanto uma sexta aumentada tende a se resolver para fora – o que é grande fica maior, e o pequeno fica menor. De forma similar, a contração de uma sétima menor produz uma sétima diminuta, o mesmo que uma sexta maior, mas de novo funcionando de forma completamente diferente. Uma vez que uma sexta maior provavelmente cairá um tom inteiro até a quinta, ou se elevará até a sétima maior, uma sétima diminuta quase sempre cai um meio-tom. A grafia e a sintaxe indicam comportamento e direcionalidade.

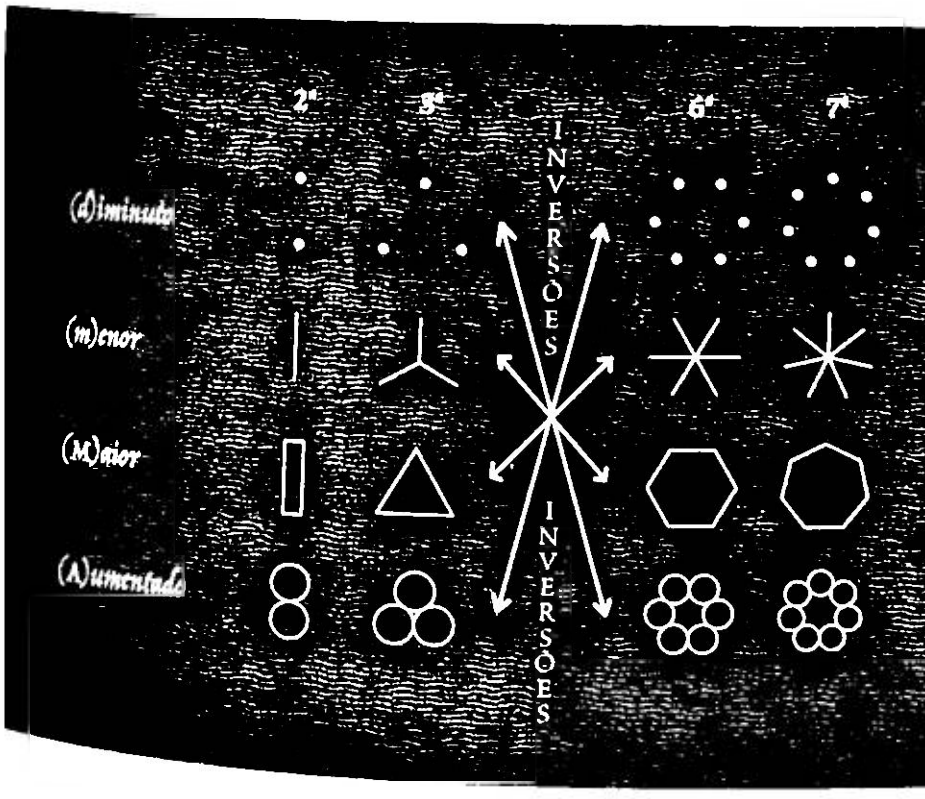
Abaixo são apresentadas as únicas três escalas *octatônicas* ou diminutas possíveis, uma vez que são simétricas. Elas enquadram-se no padrão de repetição *semitom-tom* ou *tom-semitom*. Também são apresentadas as duas únicas escalas hexafônicas, construídas inteiramente de tons inteiros, que podem evocar uma misteriosa sensação de ambiguidade e de desconhecido.

As três escalas diminutas
e
As duas escalas hexafônicas



Enarmonia e cromatismo. Combinando o círculo de quintas com a espiral de quintas, obtemos todas as 35 possíveis grafias para as doze notas. Lembre-se de que há sete membros da escala – Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si – e cinco cromos (cores) para cada uma. As grafias mais externas e as mais internas são raramente utilizadas (Six, Mix, Fá bb, Dó bb). Sempre que uma alteração cromática precisa ser feita em uma escala, um acidente é utilizado de forma correspondente: um bemol rebaixado é um duplo bemol; um bemol elevado é um bequadro; um sustenido rebaixado também é um bequadro; um bequadro elevado é um sustenido; e um sustenido elevado é um sustenido duplo.

Este é um diagrama de equivalência entre as grafias, e assume temperamento igual. Não deve ser confundido com um diagrama comum que demonstre os problemas de afinação criados pela coma pitagórica (tratada no Livro IV deste volume).



Ocasionalmente, as consonâncias imperfeitas (terças e sextas) e as dissonâncias (segundas e sétimas) aparecem em duas formas extremas, além das maiores e das menores. Estender cromaticamente um intervalo maior transforma-o em um intervalo aumentado. Da mesma forma, a contração de um intervalo menor torna-o diminuto, assim como um intervalo perfeito se torna diminuto quando contraído. Algumas vezes, uma música complexa e cromaticamente melodiosa usará esses intervalos aprimorados ou estendidos para atrair e afastar a estrutura tonal global com mais energia ainda.

OUTROS ELEMENTOS MELÓDICOS

Desenvolvimento epigramático

Os seres humanos são seres fundamentalmente baseados em padrões, e artistas visuais e acústicos, em todo o mundo, usaram esse fato para manipular seu público durante séculos. Uma ideia ou um epigrama é articulado, antes de sofrer uma série de transformações, sendo reforçado ou negado. O desdobramento desse drama de negação e aceitação é a narrativa da música, que se desenrola de três formas básicas.

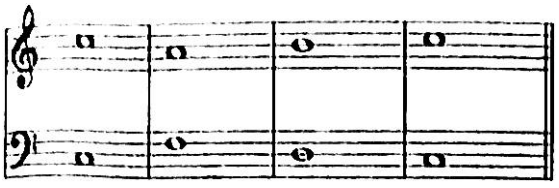
Repetição ou *tese*. A coisa mais fácil que um epigrama faz é chamar a atenção para si próprio, e isso é conseguido através da repetição. As repetições são úteis porque são altamente orientadas para o público, no contexto de dada narrativa. Elas são as âncoras do tempo.

Contraste ou *antítese*. O drama começa. Um novo epigrama é apresentado, parecendo possivelmente contradizer o anterior, e criando a tensão de um novo conjunto de opostos. Um epigrama completamente contrastante, sem transferência epigramática, é uma negação.

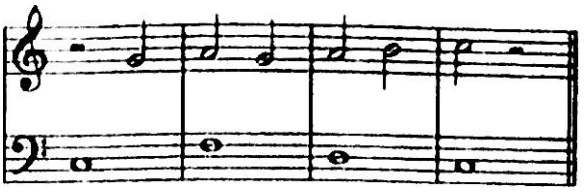
Variação ou *síntese*. É a reconciliação dos dois polos de repetição e contraste, algumas vezes vista como um ponto de apoio (*abaixo*).

As melodias, canções e sinfonias utilizam estes três graus de transferência epigramática: da total (repetição), através da parcial ou transformativa (variação), até nenhuma delas (contraste). A mente absorve o significado de cada ideia nova comparando-a com acontecimentos recentes e distantes. A tentativa de conhecer as partes produz antecipação, que pode ser afirmada ou negada. Os artistas narrativos exploram essa disposição para criar seus livros e seus filmes, suas melodias e seus ritmos.

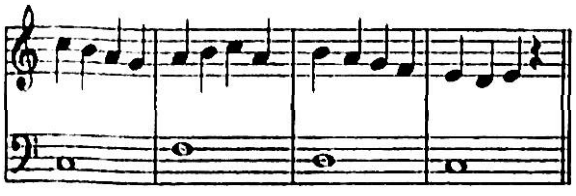
Contraponto através das espécies



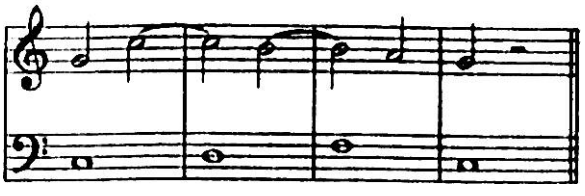
Primeira espécie: Nota contra nota. Apenas as consonâncias são permitidas. Evita cuidadosamente os saltos ou os passos (intervalos) paralelos, especialmente para um intervalo perfeito, a não ser em uma cadência.



Segunda espécie: Duas notas contra uma. Aparecem os tons de passagem, assim como as dissonâncias, que são permitidas apenas em tempos fracos. A linha contrapontística pode começar em uma pausa.

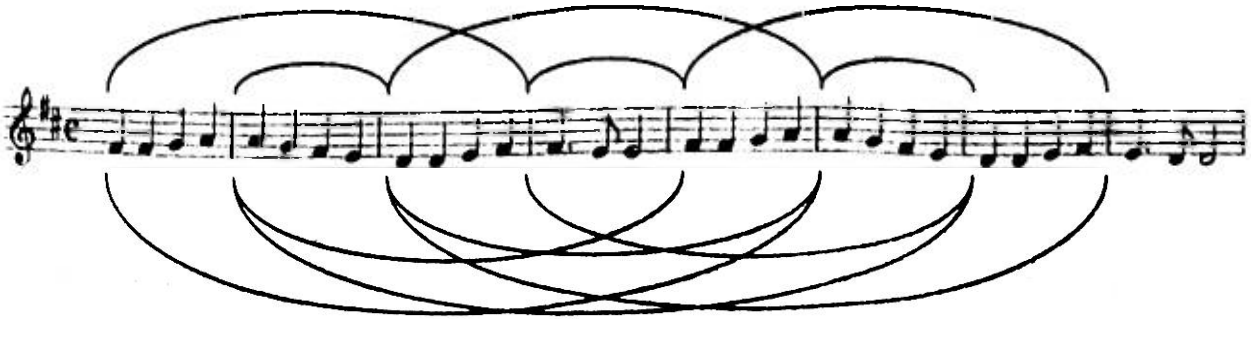


Terceira espécie: Quatro (ou três) notas contra uma. Podem ser utilizados os tons de passagem, os tons vizinhos e, agora, os tons de fuga, aderindo, ainda, a consonâncias em tempos fortes.



Quarta espécie: Suspensões – notas que se contrabalançam. A consonância é preparada em um tempo fraco, e, quando o tom no cantus firmus muda, uma dissonância é criada pelo tom sustentado em um tempo forte, e que se resolve por um passo para baixo.

O contraponto através das espécies é um sistema de regras para escrever música polifônica, que remonta ao século XVI. O cantus firmus (canto fixo), ou ponto de partida, é acompanhado por uma nova linha melódica por cima dele. A quinta espécie é a combinação das quatro anteriores, conhecida como contraponto floreado. O contraponto é a simultaneidade de melodias, com cada linha seguindo independentemente das demais horizontalmente, e alinhado-se para fazer sentido harmônico verticalmente (muitas vezes, em partes fortes da métrica, para transmitir a estrutura harmônica). A textura de quatro partes formada por soprano, contralto, tenor e baixo, na música contrapontística, tornou-se depois melodia, linha de baixo e "vozes interiores". A voz mais alta tornou-se a mais importante melodicamente, e as outras assumiram um papel mais de apoio (coadjuvantes), tornando-se eventualmente acordes com uma identidade coletiva própria. Essa textura mais homofônica é a "melodia e acompanhamento" com que estamos tão familiarizados. Há três tipos de movimentos contrapontísticos: paralelo, contrário e oblíquo.



O tema da Nona Sinfonia de Beethoven, que mostra a natureza simétrica dos movimentos melódicos epigramáticos.

PROGRESSÕES DE ACORDE COMPLEXAS

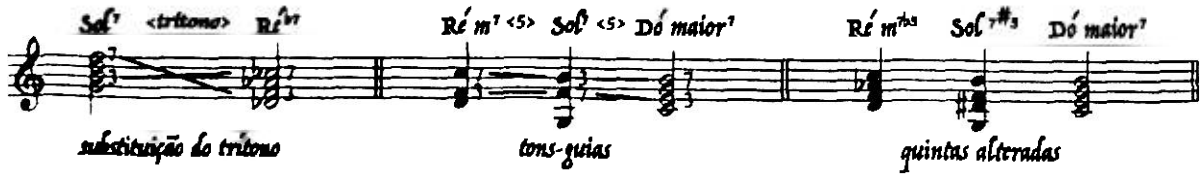
Saindo do padrão

Para desenvolver uma paleta harmônica mais rica, e sair do padrão I–IV–V–I, uma estrutura mais complexa pode ser elaborada por meio de empréstimos de acordes de uma escala paralela, facilitando, assim desse modo, excursões mais longas.

Por ser a fundamental de um acorde que concede a sua funcionalidade, podemos substituir livremente outros acordes, construídos sobre o mesmo grau da escala (*tabela superior na imagem ao lado*), e ainda preservar a essência harmônica. Assim, uma subdominante maior (IV) pode ser substituída por uma menor (*iv*), ou uma mediante menor (*iii*) pode ser substituída por uma mediante maior (♭III) e suas inflexões (♭III⁺). Desde que as cadências básicas ocorram ocasionalmente para reforçar uma tônica, os acordes podem ser emprestados de forma relativamente livre.

O acorde de sétima dominante é bem adequado para a substituição, devido ao seu trítono simétrico (*ver abaixo*). Quando a fundamental se desloca em um trítono, a terça e a sétima de cada acorde trocam de lugar. A grafia desse intervalo muda enarmonicamente para preservar a sintaxe, mas o som é o mesmo. De fato, conforme nos movemos ao redor do círculo de quintas com acordes de sétima, a terça e a sétima de cada acorde trocam de lugar, deslizando e deslocando-se suavemente por intervalos, muitas vezes referidos como *progressões de intervalo* ou tons-guias – uma reciprocidade que maximiza o impulso do movimento harmônico para a frente.

Na maioria dos acordes, a fundamental, a terça e a sétima são suficientes para comunicar a função harmônica. Sendo assim, ao vocalizar acordes, a quinta frequentemente pode ser omitida, uma vez que ela só reforça a tônica de forma estrutural. Se, no entanto, a quinta é alterada (sustenida ou bemol, aumentada ou diminuta), então seu som também é incluído.



Grau de escala	1	2	3	4	5	6	7	8
Maior	Dó I	Ré m ii	Mi m iii	Fá IV	Sol V	Lá m vi	Si° vii°	Dó I
Menor natural	Dó m i	Ré° ii°	Mi♭ ♭III	Fá m iv	Sol m v	Lá♭ ♭VI	Si♭ ♭VII	Dó m i
Menor harmônica	Dó m i	Ré° ii°	Mi♭+ ♭III+	Fá m iv	Sol V	Lá♭ ♭VI	Si° vii°	Dó m i
Menor melódica	Dó m i	Ré m ii	Mi♭+ ♭III+	Fá IV	Sol V	Lá° vi°	Si° vii°	Dó m i
Dominantes secundárias	Dó7 V^7/IV	Ré7 V^7/V	Mi7 V^7/vi	Fá7 $V^7/\flat VII$	Sol7	Lá7 V^7/ii	Si7 V^7/iii	Dó7 V^7/IV
Dominantes secundárias menores			Mi♭7 $V^7/\flat VI$			Lá♭7 $V^7/\flat II$	Si♭7 $V^7/\flat III$	

Uma tabela de substituições. As dominantes secundárias agem como a dominante primária pelo fato de possuírem um trítono, e sugerem uma resolução uma quarta acima ou uma quinta abaixo. Elas necessitam de uma alteração cromática na escala básica que está sendo utilizada. O novo tom principal (ou subtônica) que resulta dessa alteração sugere, temporariamente, uma tonalidade ou escala alternativa, mas geralmente isso é algo breve, ocorrendo como um acorde de passagem ou como uma modulação aparente. A presença de acordes emprestados enfraquece a força da tônica, porém frequentemente fornece uma variação ou harmonias graciosas, em parte devido à sua violação de nossas expectativas em relação aos acordes que esperamos ouvir em dada tonalidade.

Amazing Grace				Greensleeves			
I	V^7/IV	IV	I	i	♭VII	♭VI	V^7
I	I^6	V	V^7	i	♭VII	♭VI - V^7	i
I	V^7/IV	IV	I	♭III	♭VII	♭VI	V^7
I^6_4	V^7	IV^6_4	I	♭III	♭VII	♭VI - V^7	i

A célebre canção "Amazing Grace" utiliza inversões e uma dominante secundária, no caso, a V da subdominante (IV). Parece-se muito com o acorde I, mas com uma sétima adicionada a ele, apontando uma quarta para cima. Em "Greensleeves", temos uma progressão harmônica verdadeiramente modal, emprestando livremente da paralela maior, e apontando brevemente para a relativa maior, na terceira e quarta frases. Há muitas maneiras de harmonizar essas canções, e estes exemplos apresentam apenas uma possibilidade.

AO REDOR DO MUNDO

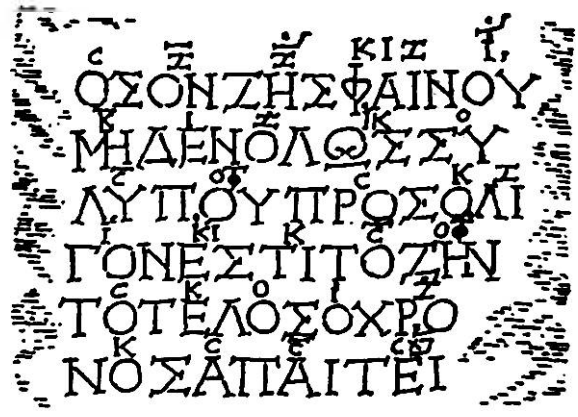
Em quatro canções

Todo sistema de notação musical é essencialmente um conjunto de instruções para a execução de sons através do tempo. Em cada caso, esses sistemas são um tipo de linha do tempo, rastreando eventos sonoros e, no caso das canções, sua união com as palavras. Linhas, traços, barras diagonais, curvas, números, letras, pontos e círculos são usados para espelhar as inflexões para cima e para baixo, os gestos e as formas das melodias.

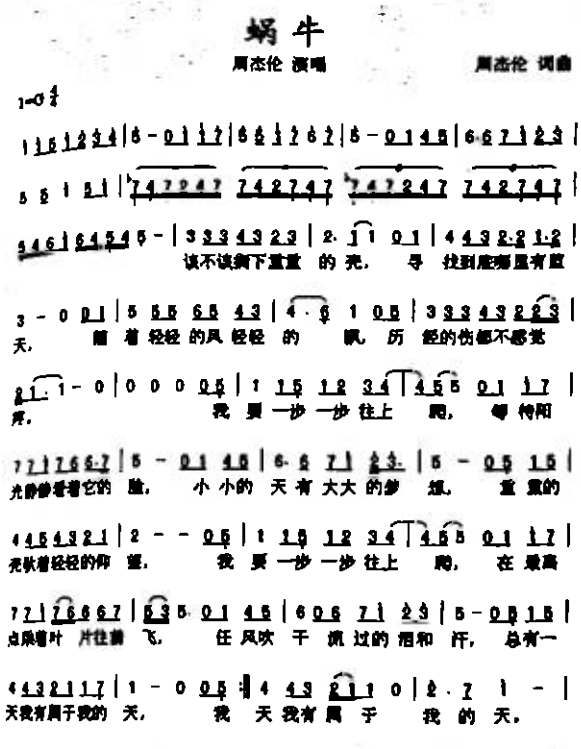
No início, a música era uma tradição inteiramente oral, muito parecida com o contar histórias, que é outra forma de arte narrativa. À medida que a humanidade cresceu e se espalhou, novos métodos foram necessários para transmitir a música a um número maior de pessoas. A notação ajudou a trazê-la para o lar dos músicos comuns, e a preservá-la para a apreciação de futuras gerações. Isso é semelhante ao desenvolvimento da prensa móvel (palavra impressa), com as mesmas vantagens facilitadas por essa invenção. Uma vez que todos nós temos, ao nosso dispor, basicamente o mesmo conjunto de sons musicais e linguísticos, esses diversos sistemas de notação (*quatro exemplos são apresentados ao lado*) têm muito em comum. Todos eles indicam o arranjo de ritmos, a associação de notas com as sílabas da linguagem, e os contornos melódicos, bem como a forma geral da composição.

Na Índia, devido às complexidades de afinação, existem 22 tons possíveis, permitindo relações acústicas mais puras, com proporções simples de números inteiros entre elas. As escalas são derivadas do conjunto global, dependendo do *raga*[12] desejado. Cada *thāt* ou *mela* de sete notas tem um sabor distinto, não muito diferente dos modos ocidentais, com os seus *swaras* (*Sa, Re, Ga, Ma, Pa, Da* e *Ni*) nascidos dos 22 *shrutis*.[13]

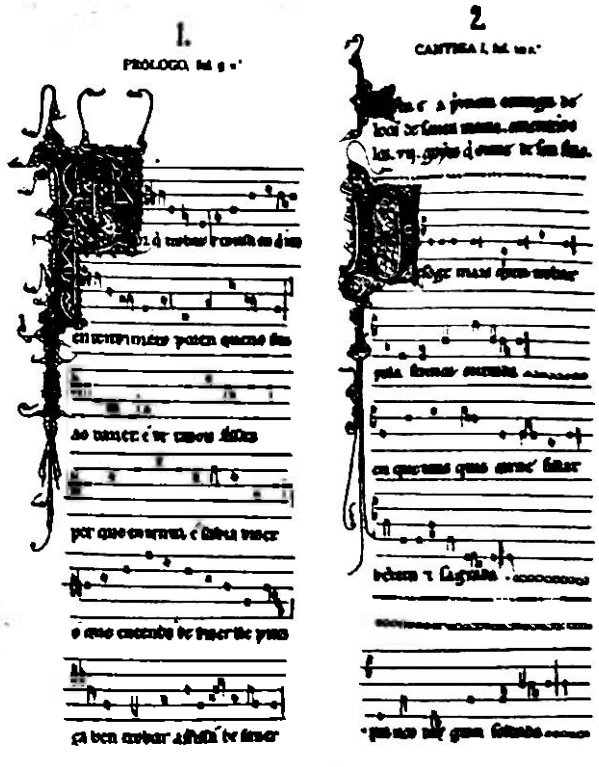
Notação Bhatkhande – Indiana
Início do século XX
Usada para indicar o rag, o tal e o ritmo, bem como a melodia e a letra na música indiana.



Canção de Seikilos – Grega
circa 200 a.C. – 100 d.C.
Provavelmente a notação musical mais antiga a sobreviver no mundo, este exemplo indica a letra e o contorno melódico básico.



Jianpu – Chinês
Século XVIII
Este sistema utiliza números que correspondem aos tons da escala, além de pontos e linhas para indicar as durações e as pausas, com as letras fluindo por baixo.



Europa medieval
Século XIII
É utilizada aqui uma pauta musical, muito parecida com as pautas contemporâneas da música ocidental, com quadrados e linhas para indicar tom e ritmo, e letras fluindo por baixo.

HARMONIAS AVANÇADAS

Malandros e especiarias

Pelo fato de o acorde dominante ser o acorde da tensão e da expectativa, os tons cromáticos adicionados são facilmente harmonizados para aumentar a complexidade intervalar. Por sua vez, isso fortalece a ânsia por harmonia, que pode tanto ser satisfeita como ser negada, a fim de manipular a tensão e o relaxamento. As extensões também podem ser acrescentadas a qualquer das quatro qualidades de acorde: maior, menor, diminuta ou aumentada.

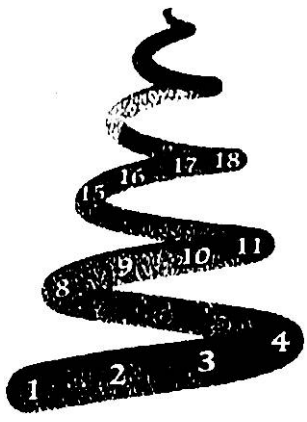
São os tons *fora do acorde* ou as notas *fora de estação* que fornecem a ornamentação das qualidades de acorde essenciais. Quando são sonorizados junto a estações próximas, eles são considerados como um efeito "adicional". Quando esses timbres são transpostos para uma oitava acima, tornam-se as nonas, as décimas primeiras e as décimas terceiras, que geralmente são obtidas pela sobreposição de terças. Da fundamental, passamos pela terça, quinta, sétima, nona, décima primeira, décima terceira e, dentro do possível, para além delas (*parte superior da imagem ao lado*). Esses arranjos de tom podem render algumas estruturas harmônicas surpreendentemente complexas; contudo, os últimos três membros da pilha ainda conservam a sua identidade, e imbuem todo o edifício de um sabor básico. Desde o final do século XIX, a música tem explorado essas possibilidades harmônicas expandidas, particularmente o *jazz*.

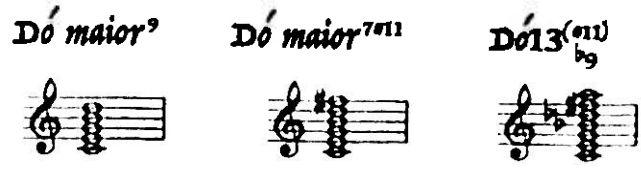
Os acordes de sexta são uma categoria de harmonias, com alterações cromáticas que não se encaixam na usual estrutura de empréstimo maior/menor paralela, por vezes referidas como *errantes*. São alterações do acorde subdominante, decorando o dominante.

Um exemplo de notação de acorde com extensões é apresentado abaixo.

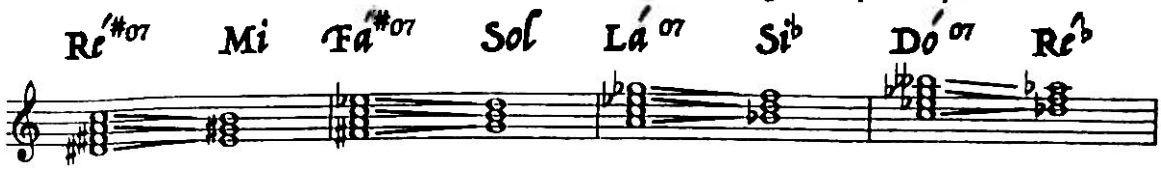
MISTY (Lá)[14] Mi♭maior7 | Si♭m9 Mi♭13 | Lá♭maior7 | Lá♭m9 Re♭13#11

Mi♭maior7 Dó7#9 | Fá m7 Si♭7 | Sol m7 Dó7♭9 | Fá m7 Si♭13♭9

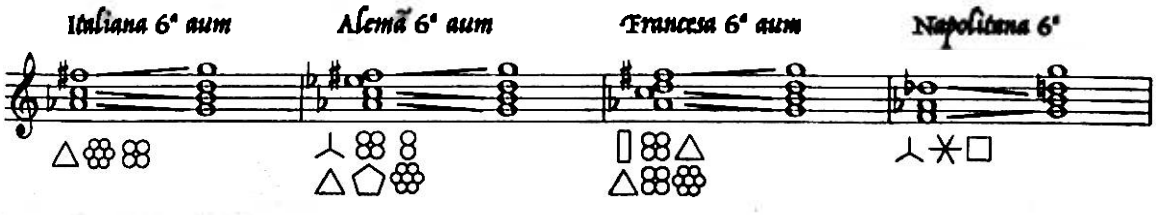




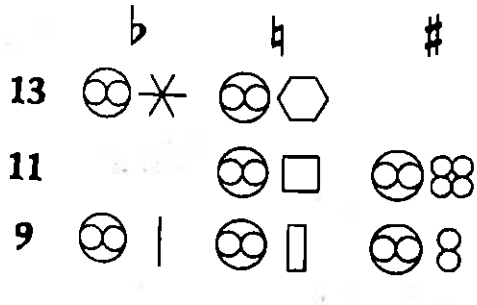
Os tons podem ser empilhados sobre um acorde para além da fundamental, da terça, da quinta, da sétima e da oitava, complicando e enriquecendo ainda mais a sua estrutura e o sabor intervalar. Quanto mais altos esses tons, menos funcionais e mais coloridos eles se tornam. À medida que continuamos a empilhar, assumimos que cada nova nota abaixo está incluída – assim, um acorde de nona inclui a sétima, por exemplo. Se a extensão não for empilhada, então ela é "adicional" (ver página 270). Alguns exemplos são apresentados acima.



As múltiplas resoluções do acorde de sétima diminuta. Por ser o acorde diminuto completamente simétrico, composto inteiramente de terças menores e trítonos, todo e qualquer de seus tons pode funcionar como fundamental em potencial. Em cada exemplo, as mesmas quatro notas de cada inversão produzem uma grafia enarmônica ligeiramente diferente do mesmo acorde diminuto, preservando a sintaxe das terças. Cada tom tem a oportunidade de ser um tom principal, e resolver-se em um meio-tom para cima; e pode, portanto, determinar quatro acordes possíveis. Essas quatro fundamentais resultantes, por sua vez, formam um acorde diminuto, construído a partir de terças menores consecutivas (Mi – Sol – Si♭ – Ré♭).



A resolução dos vários acordes de sexta alterados. As versões italiana, francesa e alemã funcionam como dominantes secundárias, substituindo a dominante. Na italiana, a sexta aumentada é criada entre o Lá♭ e o Fá#, uma vez que se resolvem para fora. O acorde alemão está de posse de uma quinta perfeita, enquanto o sabor incomum do francês se deve à quarta elevada, criando um acorde com duas terças maiores e duas quartas aumentadas ou trítonos – um acorde simétrico sugestivo harmonicamente. A versão napolitana funciona como a subdominante, na maioria das vezes um acorde bII, popular na menor.



Assim como os tons intermediários (segunda, quarta e sexta) vêm em determinados sabores, seus correlatos, uma oitava acima (nona, décima primeira e décima terceira), vêm nos mesmos sabores: rebaixado, natural ou elevado. Todos os tons acima da oitava correspondem aos tons dentro da oitava, com sete intervalos adicionados.

FORMAS AVANÇADAS

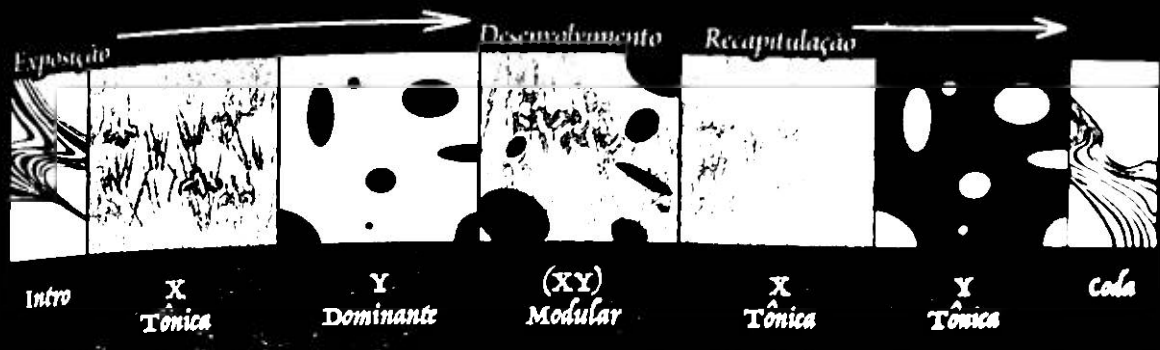
Organizando-se

As formas musicais são muitas vezes mescladas e combinadas com híbridos históricos comuns. As unidades moleculares binárias e ternárias podem ser combinadas e compostas para produzir estruturas mais complexas, sendo utilizadas de forma flexível como modelos gerais.

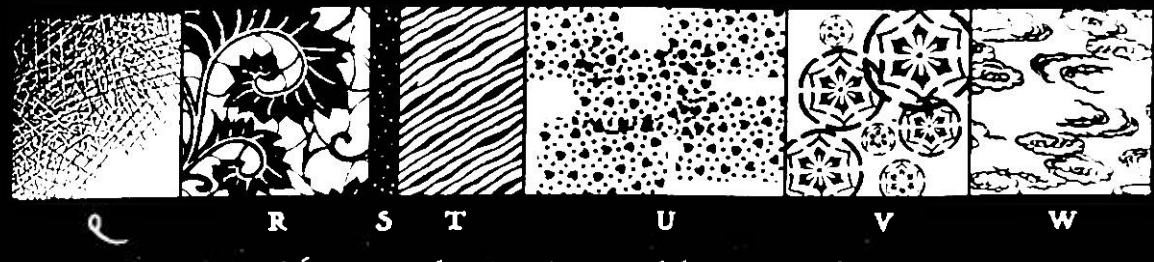
A atenção tende a ser maior no início de uma composição, de modo que a música frequentemente contém, nesse momento, o material mais exigente intelectualmente. Um ritmo inicial será animado (*allegro*), talvez precedido de uma introdução mais lenta. Os movimentos intermediários são amiúde contemplativos e reflexivos, em uma ruptura com o primeiro movimento. Os finais são geralmente leves, divertidos e semelhantes à dança. Esse modelo comum deriva de suítes de dança barrocas, que eram uma coleção desses diferentes humores, variadamente extrovertidos e introvertidos.

Há um formato genérico no desdobramento retórico de uma forma complexa: exposição, contraste, desenvolvimento, adição e, ocasionalmente, transformação. Com frequência, há um clímax ou uma série deles, com picos e ápices progressivamente mais altos, finalmente seguidos por uma descida, um desenlace ou um desfecho.

O modelo da sonata atingiu seu ápice na época clássica, e ainda se encontra em uso hoje. Possui uma relação fixa de tonalidades e temas. Após uma introdução, é apresentado um tema, seguido por um tema contrastante. Os dois temas são, então, desconstruídos e combinados em uma seção de desenvolvimento, muitas vezes tonalmente instável ou ambígua, depois da qual os dois temas retornam, como uma recapitulação. No entanto, o segundo tema retorna agora na tonalidades tônica, embora tenha sido apresentado primeiro na dominante (ou, às vezes, em outra tonalidade relacionada), amarrando assim a jornada de contraste e diferenciação.



SONATA: *Possui uma estrutura muito específica. O tema Y ocorre pela primeira vez transposto, muitas vezes para a dominante, e ao retornar é restaurado para a tônica.*



RAPSÓDIA: *Cada seção é nova e diferente. Geralmente, há pouca ou nenhuma repetição.*

RONDÓ: *Um tema principal alterna-se com seções contrastantes intermediárias.*

ARCO: *Uma estrutura do tipo palíndromo, com sua pedra angular no centro.*

TEMA E VARIAÇÕES: *Um tema principal, seguido por seções geradas e derivadas dele.*

JUNTANDO TUDO

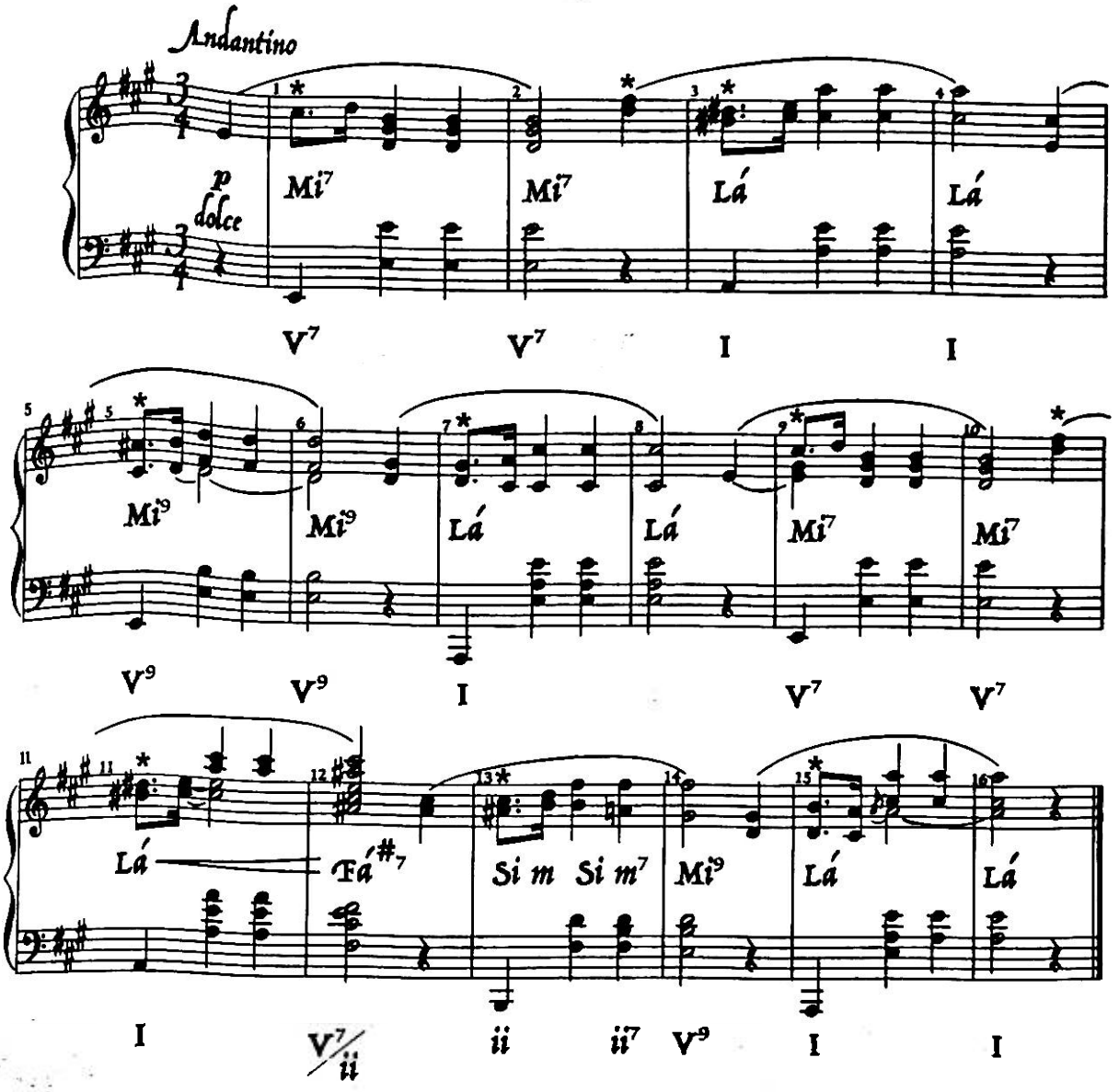
Conceber, criar e compor

Perceber a música como um desdobramento de epigramas, moléculas de significado e unidades de opostos permite uma nova apreciação de sua qualidade narrativa. Torna-se possível perceber, ou até medir, a taxa de transferência, conforme a música se desenrola, e apreciar mais profundamente o caminho pelo qual o drama é reforçado ou negado, ao observar os verdadeiros mecanismos através dos quais se realizam essas coisas. Os graus de contraste e repetição podem ser medidos, e, mais importante, a variação e a transformação podem ser compreendidas como uma espécie de evolução. Assim como os graus da escala e o movimento ritmado, os epigramas também possuem gravidade, e o que acontece entre eles comunica parte do drama da intencionalidade da transferência – sua história, sua condição. E, nas mãos mais habilidosas, nossas almas seguem seu exemplo.

Na melodia, essas nuanças são mais facilmente ouvidas na grande variedade de escalas encontradas ao redor do mundo. Embora todas elas possuam algumas formas de quintas e terças, são as notas nesse intervalo que transmitem o significado real, a tensão e o relaxamento, as distâncias desses "entre" tons, e como eles são colocados ritmicamente. Mais uma vez, considerando o ritmo – embora muitas vezes haja uma cadência previsível –, o que acontece nos espaços intermediários é muito mais complexo, e pode sugerir tensões contra as batidas diferentes, com base em suas distâncias relativas a partir do pulso. Esses epigramas melódicos e rítmicos podem ser organizados, então, em estruturas coerentes mais amplas, as composições, unificando também os opostos; e, assim, nasce a música.

A música que amamos é o drama da transferência de epigramas, opostos em interação, desdobrando-se, repetindo-se, contrastando-se, e, mais importante, variando por meio de melodia, harmonia e ritmo.

Prelúdio de Chopin Op. 28, Nº 7



Um Prelúdio de Chopin. O tom é Lá; o ritmo é andantino, um pequeno ritmo de passeio; a métrica de 3/4 é para ser tocada dolce *(docemente). As linhas curvas (modulação, ligação) indicam as frases. A melodia começa com uma aceleração no pulso três, e começa no primeiro compasso completo. Um acorde Mi⁷ sugere o tom Lá. O Dó# em compasso 1 é uma apojatura (*appoggiatura*), juntamente com seu ritmo pontuado, seguido por três acordes repetidos – o epigrama primário para esta pequena composição. No pulso três do compasso 2 está um par de tons de fuga, seguidos por um par de apojaturas no compasso 3. A harmonia continua de V para I, completando uma frase completa. O compasso 5 revela novamente o primeiro epigrama, com a apojatura no pulso 1, duplicado, agora com um acorde de nona dominante, elaborando a sétima dominante anterior. A terça – Sol# – agora está perdida. A segunda frase completa a primeira pelo compasso 8. O compasso 9 começa novamente a primeira frase, o que é uma repetição literal. O compasso 11 soa muito semelhantemente ao compasso 3, pronunciado levemente mais alto em alcance, mas se resolve para o surpreendente Fá#⁷ dominante secundário, o acorde mais denso na peça. Agora é hora de voltar para casa. No compasso 13, há um tom de passagem no pulso 1, seguido pela sétima de Si menor em queda, e uma expressão da nona dominante, desta vez com a terça – Sol# – inclusa (Obrigado, Chopin.). A última frase dos dois últimos compassos é o movimento final, amplamente espaçado, com a tônica no topo, deixando-nos perceber que a música realmente terminou.*

Notas da Tradutora

[1] Disponível em espanhol: Boecio, *Sobre el Fundamento de la Musica*. Madrid, Gredos, 2009.

[2] Termo utilizado para definir um sistema de afinação – ou *temperamento musical* – no qual cada par de notas adjacentes tem uma relação de frequência idêntica.

[3] Na Antiguidade grega, *peã* ou *paiân* (em grego: παιάν) é o nome de um tipo de hino sacro especialmente dedicado ao deus Apolo. Foi citado por Homero, sendo um canto de triunfo, exaltação ou ação de graças, cantado em forma antifonal por um solista e um coro, acompanhado pela cítara, o instrumento de Apolo, e também por aulos (instrumento de sopro da Grécia antiga). Tipicamente, era composto no modo dórico. Em torno do século IV a.C., o peã havia degenerado para uma mera fórmula de adulação, sendo usado também para celebrar os mortais. Hoje em dia, é geralmente usado para significar uma expressão de louvor ou exaltação (um "cântico de louvor"). Referência: Enciclopédia Britânica.

[4] Um *estudo* ou *étude* é uma composição musical para exercitar uma habilidade técnica específica na execução de um instrumento solo. Por exemplo, o estudo para piano *Op. 25 nº 6* de Frédéric Chopin enfatiza a execução de terças na mão direita, o *Op. 25 nº 7* concentra-se na qualidade cantante das melodias em uma textura polifônica, e o *Op. 25 nº 10* abrange oitavas paralelas.

[5] Nota ou sequência de notas que precedem o primeiro tempo forte do primeiro compasso de uma música.

[6] Notas mais acentuadas no primeiro e no último tempo forte de um ritmo.

[7] Qualquer instrumento musical que produz sons primeiramente por meio de sua vibração, sem o uso de cordas ou membranas – o corpo do instrumento vibra, sem a necessidade de nenhuma tensão. Esta categoria compreende a maior parte dos instrumentos executados por *atrito* (como o reco-reco) e por *agitação* (como o chocalho), bem como muitos instrumentos de *percussão* melódica (como os xilofones). Referência: Don Michael Rendel (ed.), *The New Harvard Dictionary of Music* (Harvard University Press Reference Library). Cambridge, Belknap Press, 1986.

[8] Cordas feitas de tripa.

[9] A palavra foi mantida no original porque já se encontra, de certa forma, incorporada ao nosso vocabulário, ao menos nas áreas de publicidade, *design* e cinema, principalmente, as quais utilizam a técnica do *esboço sequencial* em seus projetos. Um *storyboard* é, basicamente, uma sequência de desenhos (em seus primórdios, esboçados em "pranchas" de papel, daí o nome em inglês) destinados a mostrar os elementos principais de um comercial, um filme ou uma apresentação, entre outros, e assim orientar o desenvolvimento desses trabalhos.

[10] Do inglês *leading tone*, é também chamado *subtônica* em português e, em alguns casos, *sensível*, correspondendo ao grau VII das funções harmônicas da escala.

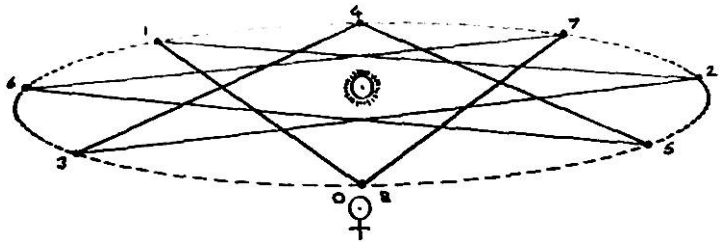
[11] Do alemão *scheinmodulation* (em tradução literal), diz respeito ao tratamento de um tom – com exceção da tônica global – como uma tônica temporária em uma composição. Em inglês, o termo usado para isto é *tonicization*, para o qual não há tradução em português.

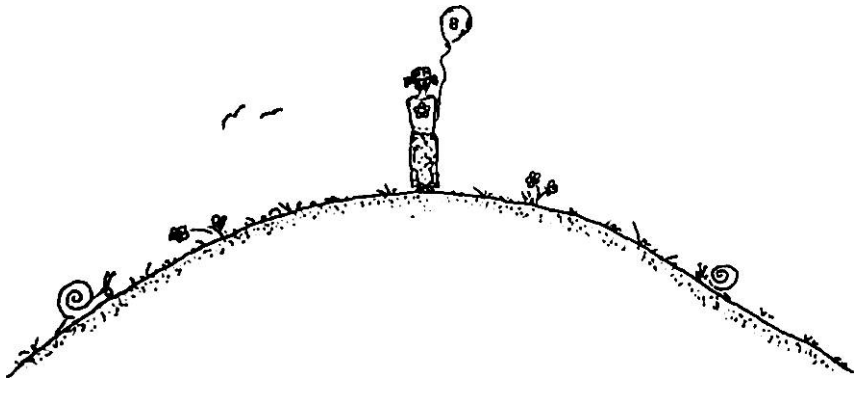
[12] Nome em sânscrito que denomina os modos usados na música clássica indiana. Um *raga* pode ser visto como um conjunto de normas de como construir uma melodia. Embora as notas sejam um elemento importante do *raga*, este não se resume a uma escala, pois vários *ragas* podem compartilhar uma mesma escala. A escala usada em um *raga* pode ter de cinco a sete notas, chamadas na música clássica indiana *swaras*. Nas escalas com sete notas, todas, exceto a primeira, podem ser variadas ascendente ou descendentemente, de modo a chegar às doze notas da escala ocidental. Seja como for, os *ragas* podem especificar mudanças microtonais nas escalas: uma segunda um pouco abaixo, uma sétima um pouco acima, e assim por diante. Essas variações podem ocorrer de acordo com o estilo, o músico ou o clima. Não há afinação absoluta. Em vez disso, em cada performance simplesmente se escolhe uma nota principal, e os demais graus da escala se põem em relação a essa nota. A música clássica indiana baseia-se sempre em *ragas*, mas o *raga* não é utilizado unicamente na música clássica. Muitas canções populares de filmes indianos também são baseadas em *ragas*. Referências: Walter Kaufmann,

The Ragas of North India. Calcutta, Oxford & IBH Publishing Company, 1968; Joep Bor, *The Rāga Guide*. Charlottesville, Virginia, Nimbus Records, 1999.

[13] Um *thāt* ou *thaat* é um modo encontrado na música hindustani ou do norte da Índia, sempre composto por sete tons diferentes, chamados *swara*. É uma base para a organização e classificação de *ragas* na música clássica indiana.

[14] Nebuloso, obscuro, triste, vago, indistinto.

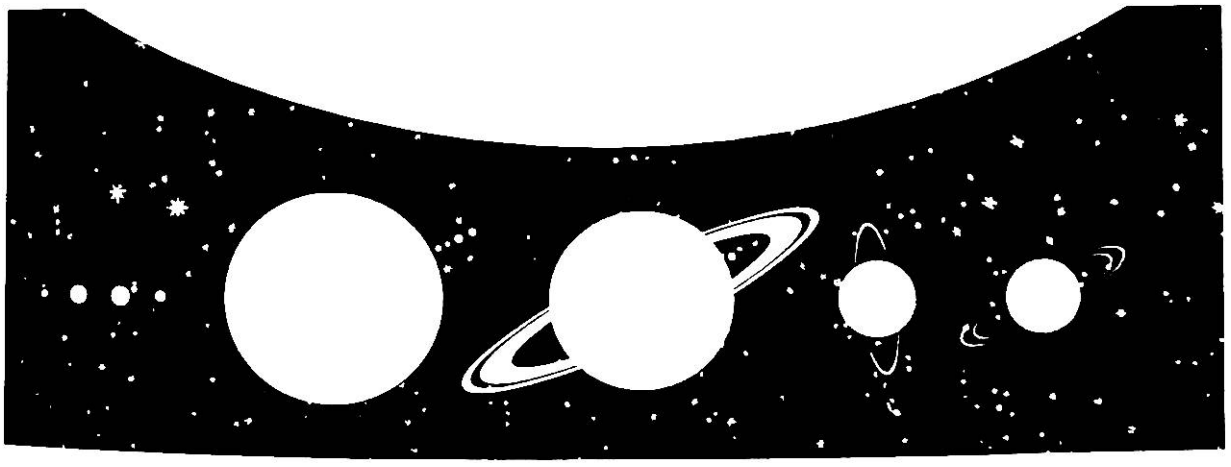




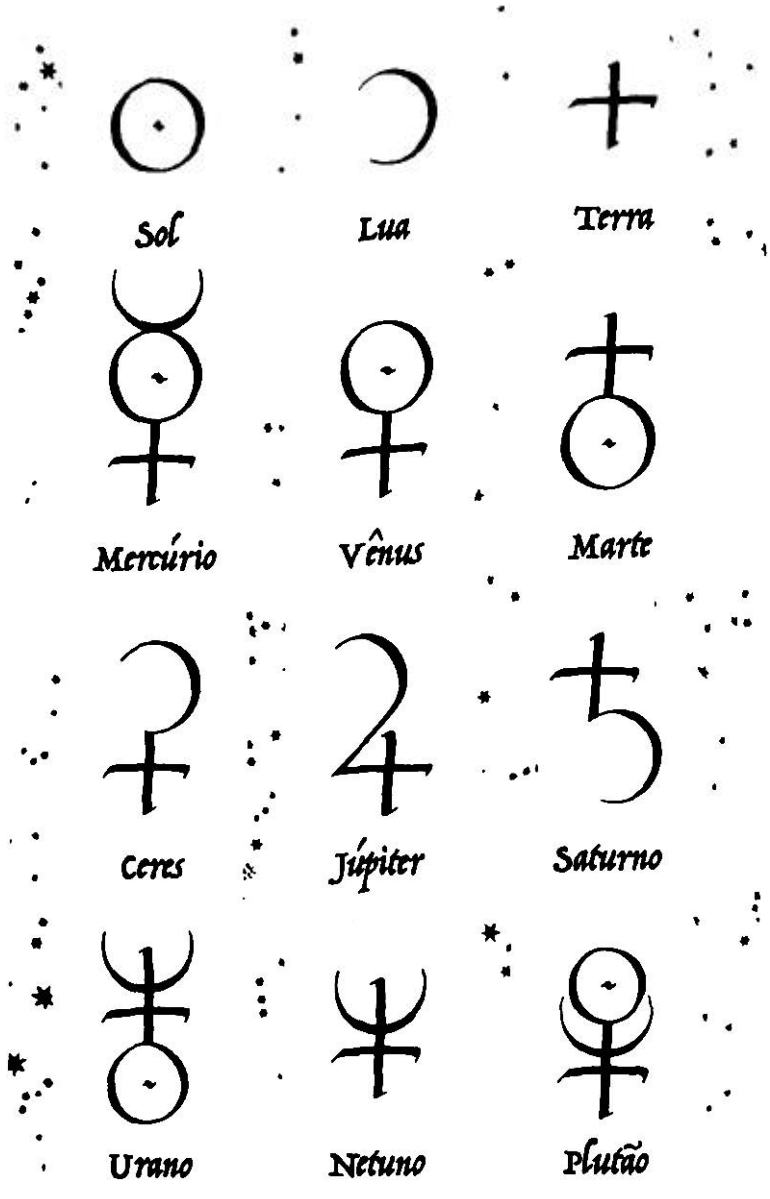
Todos os anos, na data de seu aniversário, suba um morro ao meio-dia e olhe para o Sol. A cada ano, Vênus estará três oitavos mais distante de seu caminho em torno do Sol, desenhando um octograma perfeito ao longo de oito anos. Agora olhe para o diagrama na página 45.

L I V R O V I

UM PEQUENO LIVRO DA COINCIDÊNCIA NO SISTEMA SOLAR



John Martineau



Um conjunto útil de glifos para os planetas, desenhados pelo calígrafo Mark Mills, cada um deles feito de Sol, Lua e Terra, e utilizados ao longo deste livro.

Introdução

Hoje, pensa-se que a vida biológica apareceu no planeta não muito depois de sua formação. Parece que as sementes de bactérias para esse processo podem ter chegado à Terra na cauda de um cometa ou meteoro. Novamente, é abundante a especulação sobre a existência de vida sob a superfície de Marte, na lua gelada de Júpiter – Europa – e, na verdade, em qualquer lugar que se tenha conhecimento da existência dessa substância sagrada que é a água em estado líquido. As partes mais recentes do universo retratam uma estrutura misteriosamente semelhante a uma vasta rede neural, sugerindo a possibilidade de uma mente cósmica, uma ideia antiga que atualmente tem experimentado um renascimento.

A ciência do cosmos mudou imensamente desde as visões grega e medieval dos círculos de esferas planetárias. Mas, apesar de todos os avanços científicos recentes, a Terra permanece um mistério contemporâneo. Ainda não existe uma teoria convincente para explicar o milagre da vida consciente, nem as inúmeras coincidências cósmicas que circundam o nosso planeta. Talvez as duas coisas estejam relacionadas. Este livro não é apenas outro guia de bolso para o nosso sistema solar, pois sugere que pode haver relações fundamentais entre espaço, tempo e vida que ainda precisam ser compreendidas.

Hoje em dia, varremos os céus tentando escutar sinais de rádio inteligentes e procurando outros planetas semelhantes ao nosso. Enquanto isso, nossos vizinhos planetários mais próximos criam os padrões mais requintados ao nosso redor, no espaço e no tempo, e ainda nenhum cientista explicou exatamente o porquê. Será tudo realmente apenas uma coincidência? Por que o Sol e a Lua tem o mesmo tamanho no céu? Como Vênus põe em movimento, ao nosso redor, os mesmos números que as plantas exibem na Terra? Continue lendo e veja o que pensa sobre isso.

POEIRA GALÁCTICA

O universo bem afinado

Há muita coisa acontecendo no universo. Agora podemos ver tantas estrelas, dentro do espaço-tempo de nosso horizonte em forma de bolha, quanto grãos de areia há na Terra. Nosso planeta e nós mesmos somos feitos de uma fumegante poeira estelar que se reorganizou, um fato muito ensinado por culturas antigas. Sabemos hoje que a própria poeira estelar é simplesmente feita de efervescência gasosa, cintilantes redemoinhos de luz altamente sintonizados, há muito espremidos no interior das estrelas. Vivemos entre o pequeno e o grande, em um tempo e lugar no universo onde as coisas se condensaram, cristalizaram, foram construídas, sintonizadas e estabelecidas.

Quão especiais somos nós e nossa Terra? Curiosamente, os cientistas hoje estão intrigados com o estranho fato de que todo o universo parece especial. De forma *precisa*, há material suficiente no universo para estabilizá-lo; e as relações entre as forças fundamentais parecem *especificamente* organizadas para produzir um universo deveras complexo, belo e duradouro. Mexa com qualquer uma das constantes, ainda que de leve, e você terá um universo de buracos negros, efervescências insubstanciais ou outros cenários sem vida. Isso é projetado ou mera coincidência? Quiçá nosso universo seja filho de pais bem-sucedidos, que nos concederam essa estrutura. Talvez todo esse espetáculo quanticamente emaranhado seja mesmo consciente, como Platão ensinou.

A história da busca de ordem, padrão e significado no cosmos é muito antiga. Há muito se suspeita que os planetas de nosso sistema solar escondem relações secretas. Na Antiguidade, aqueles que estudavam tais coisas ponderavam sobre a música das esferas; hoje, eles experimentam, de forma semelhante, com a simples precisão das leis de Kepler, de Newton e de Einstein.

Quem pode adivinhar o que virá a seguir?

Você está aqui

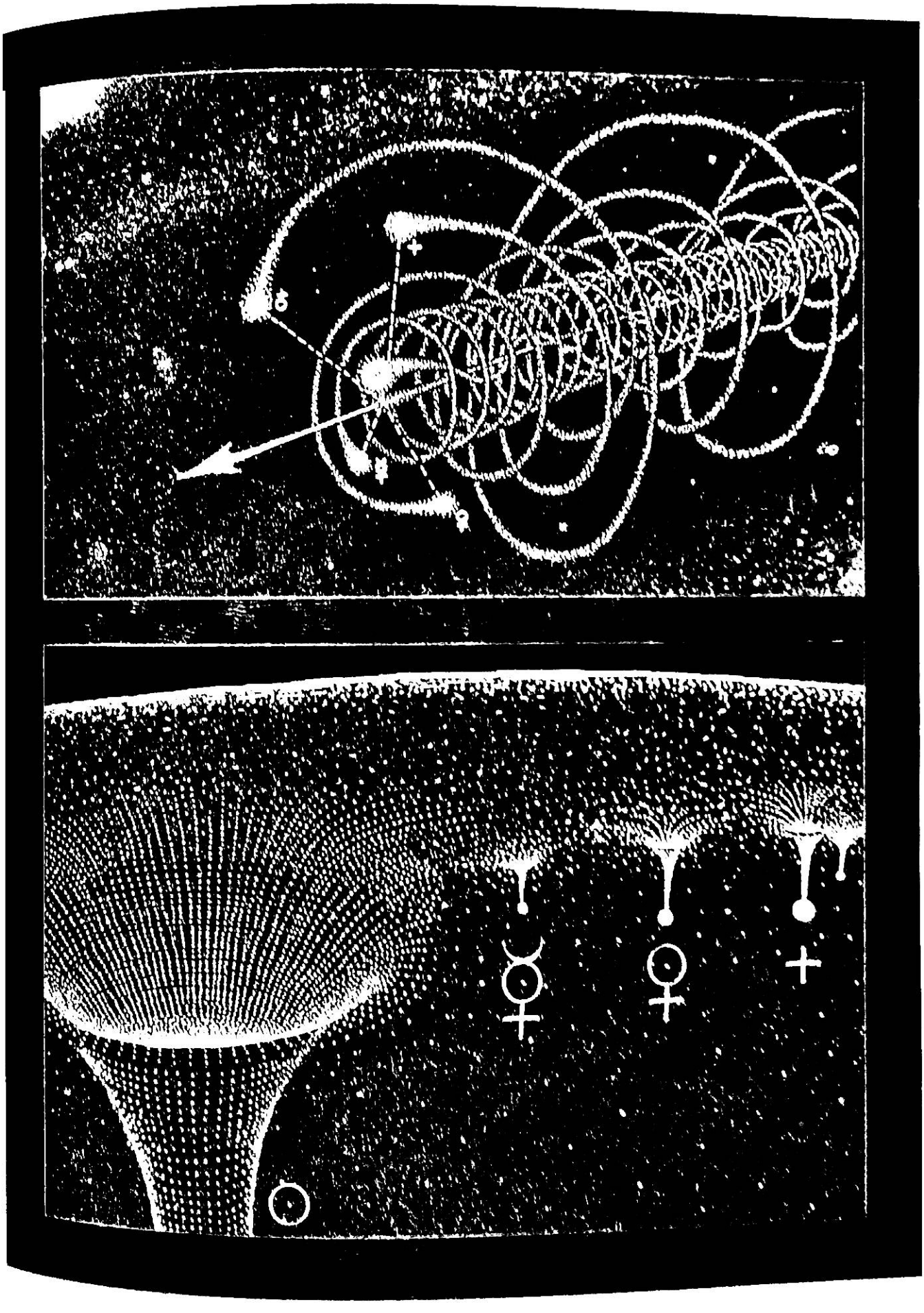
O SISTEMA SOLAR

Espirais em toda parte

Nosso sistema solar parece ter-se condensado a partir dos escombros de uma versão anterior, cerca de 5 bilhões de anos atrás. Um sol incendiou-se no centro, e os materiais remanescentes foram atraídos uns pelos outros, de modo a formar pequenos asteroides rochosos. Gases mais leves foram soprados pelo vento solar e condensaram-se como quatro asteroides de gás gigantes – Júpiter, Saturno, Urano e Netuno –, enquanto outros asteroides se transformavam em planetas, no interior do sistema solar, com as últimas peças voando para seus lugares com mais e mais energia, conforme os tamanhos aumentavam (muitos ainda possuem núcleos fundidos até hoje, devido a essas colisões). As ressonâncias orbitais atraíram e repeliram planetas em direção a novas órbitas, e nosso sistema solar acabou por assumir a forma do disco estável que vemos hoje.

O plano do sistema solar está inclinado cerca de 30 graus em relação ao plano da galáxia, e enrosca-se em espiral no seu caminho ao redor do braço da Via Láctea. A imagem ao lado (*figura superior, a partir de Windelius & Tucker*) é um esquema dos movimentos dos quatro planetas internos.

Outra maneira de retratar o sistema solar é pensar no espaço-tempo como uma folha de borracha, com o Sol como uma bola pesada e os planetas como bolinhas de gude colocadas sobre ela (*figura inferior, imagem ao lado, a partir de Murchie*). Este é o modelo de Einstein para a forma como a matéria dobra o espaço-tempo, e ajuda a visualizar a força da gravidade entre as massas. Se agitarmos uma pequena ervilha sem atrito sobre nossa folha, ela pode ser facilmente capturada por uma das bolinhas de gude; também pode girar pela folha algumas vezes e ser cuspida para fora; ou pode estabelecer-se em uma órbita elíptica, girando rápido no meio de qualquer dos buracos de minhoca. Como um planeta, quanto mais longe a ervilha se move dentro do funil, mais rápido ela tem de girar a fim de impedir-se a si mesma de cair no tubo. Além disso, quanto mais rápido gira, mais pesada fica, e, assim, seus relógios correm um pouco mais lentamente.



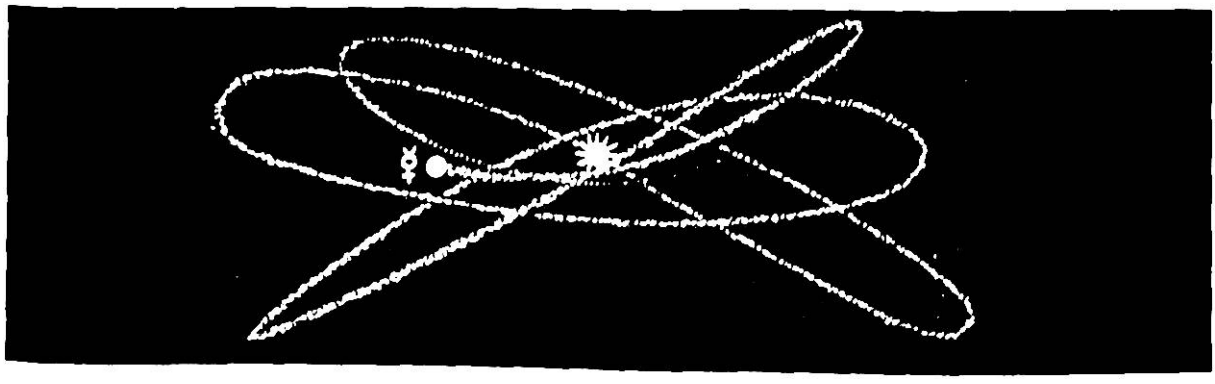
MOVIMENTO RETRÓGRADO

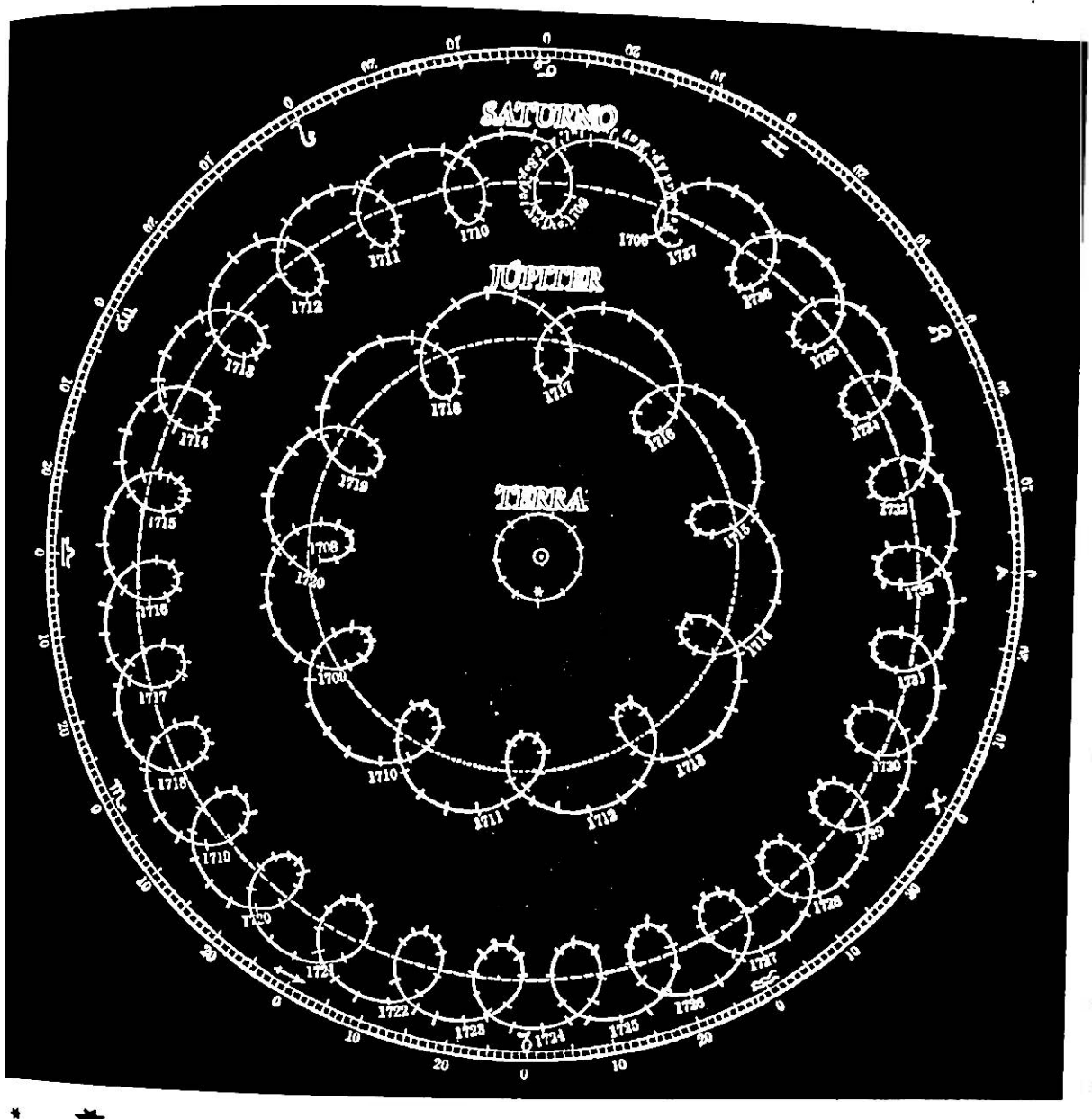
Correndo e beijando por aí

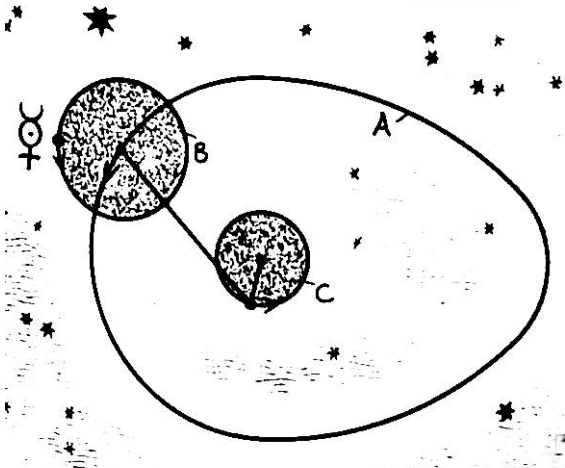
Os antigos astrônomos que observavam da Terra o céu perceberam que, além do Sol e da Lua, havia cinco pontos de luz facilmente visíveis movendo-se através das estrelas. Esses são os planetas, que parecem mover-se ao redor da Terra seguindo aproximadamente o ciclo anual do Sol, a eclíptica ou as estrelas do zodíaco. Se a vida fosse assim tão simples!...

Observe os planetas por qualquer período de tempo e perceba que, longe de se moverem de forma simples, eles oscilam como abelhas embriagadas, dançando e rodopiando. Conforme dois planetas passam um pelo outro, ou se beijam, eles aparentam, por determinado período de tempo, estar retrocedendo ou indo para trás em direção às estrelas.

O diagrama abaixo mostra o padrão, como pode ser visto da Terra, realizado por Mercúrio em torno do Sol, monitorado ao longo de um ano (*a partir de Schultz*). Na imagem ao lado, vemos o esboço de Cassini,[1] do século XVIII, para os movimentos de Júpiter e Saturno, conforme vistos da Terra. Em tempos antigos, sistemas extremamente complexos de círculos e rodas foram desenvolvidos para tentar imitar esses movimentos planetários (*figura inferior, imagem ao lado*), culminando com o sistema de Ptolomeu, criado há mais de 2 mil anos e composto por 39 *deferentes* e *epiciclos*, usados para modelar os movimentos dos sete corpos celestes.







Até quatrocentos anos atrás, os movimentos planetários eram modelados mediante a utilização de um "deferente" (A) e de um "epiciclo" (B). Outros truques refinaram o sistema: aqui um tipo de manivela (C), chamada "excêntrico móvel", produz um deferente em forma de ovo para representar a dança de Mercúrio.

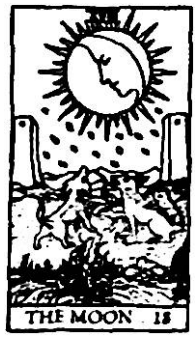
CALENDÁRIOS

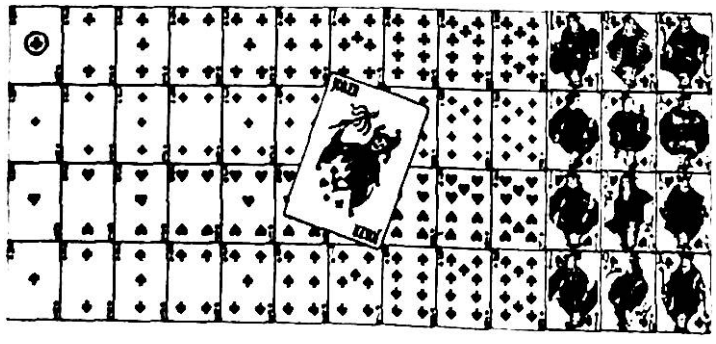
Sincronizando o Sol e a Lua

O Sol e a Lua podem parecer perfeitamente equilibrados no céu, mas, na prática, executam um complexo padrão que inquietou grande número de culturas durante muito tempo. Os 29,53 dias que se passam entre as luas cheias são exibidos no calendário chinês por meses alternados de 29 e 30 dias. De forma similar, no círculo de blocos de arenito de Stonehenge, encontramos 29 pedras com a mesma largura e uma com metade da largura das demais, representando 29,5 dias.

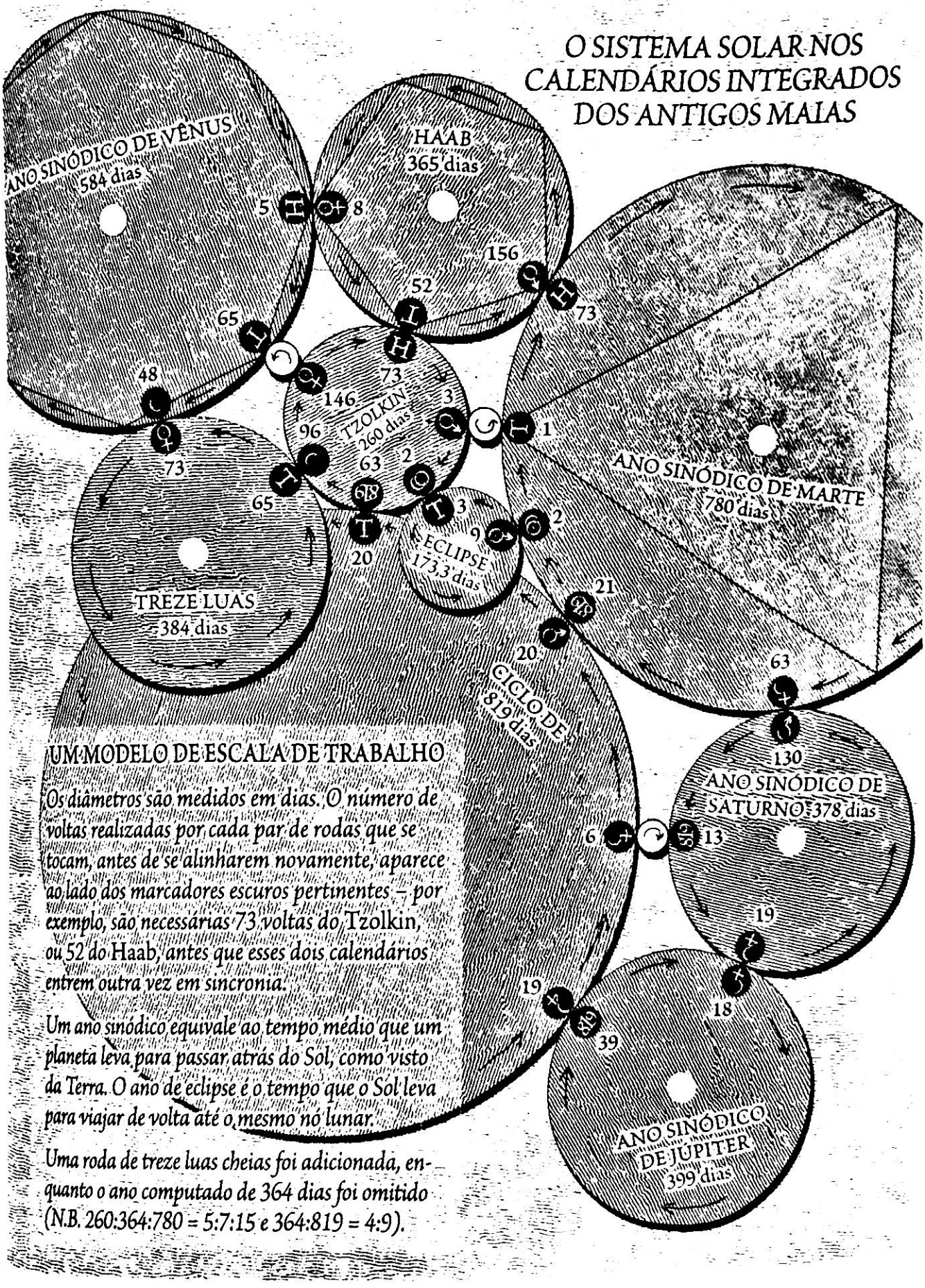
Muitos dispositivos escondem temas de calendário. Por exemplo, um baralho de cartas comum pode ser visto como as quatro estações do ano (quatro naipes), cada uma com 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 91 dias, 364 ao todo, com o curinga como o 365º dia. Do mesmo modo, o Tarô esconde segredos, como a Lua e o Sol sendo atribuídos aos números 18 e 19, que são, na verdade, os dois números que melhor definem o calendário, como veremos na página 333.

O sistema mais extraordinário já inventado para casar os ciclos celestes com os empreendimentos terrestres talvez seja a série de calendários interligados desenvolvida pelos antigos maias. Em 900 d.C., eles já haviam modelado a maior parte do sistema solar visível com apenas três ciclos: o *Haab* com 365 dias, o *Tzolkin* com 260 dias, e o enigmático ciclo com 819 dias. O incrível diagrama de Geoff Stray, ao lado, é um testemunho de quão longe os cientistas estão dispostos a ir para que tudo faça sentido.





O SISTEMA SOLAR NOS CALENDÁRIOS INTEGRADOS DOS ANTIGOS MAIAS



UM MODELO DE ESCALA DE TRABALHO

Os diâmetros são medidos em dias. O número de voltas realizadas por cada par de rodas que se tocam, antes de se alinharem novamente, aparece ao lado dos marcadores escuros pertinentes – por exemplo, são necessárias 73 voltas do Tzolkin, ou 52 do Haab, antes que esses dois calendários entrem outra vez em sincronia.

Um ano sinódico equivale ao tempo médio que um planeta leva para passar atrás do Sol, como visto da Terra. O ano de eclipse é o tempo que o Sol leva para viajar de volta até o mesmo nó lunar.

Uma roda de treze luas cheias foi adicionada, enquanto o ano computado de 364 dias foi omitido (N.B. 260:364:780 = 5:7:15 e 364:819 = 4:9).

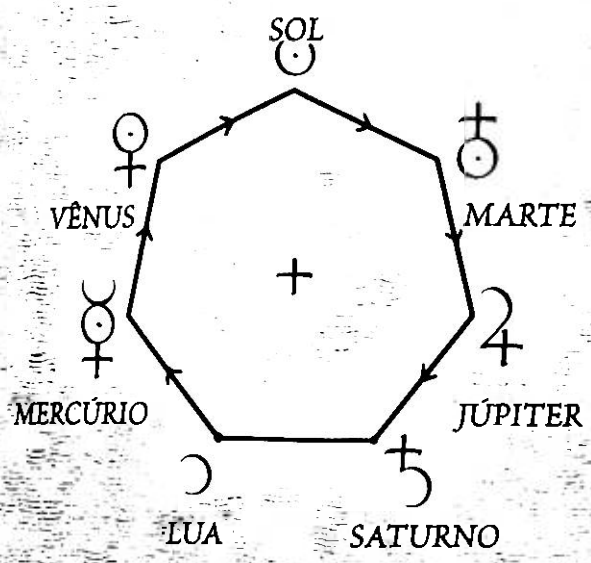
O SEGREDO DO SETE

Planetas, metais e dias da semana

Há apenas quatrocentos anos, os diagramas ao lado ainda constituíam a pedra angular do pensamento cosmológico científico e mágico, em todo o mundo ocidental, assim como haviam feito por muitos milhares de anos. Atualmente, esses emblemas do sistema sétuplo da Antiguidade aparecem como lembranças pitorescas de uma cosmologia alquímica, agora enterrada sob planetas recém-descobertos e elementos físicos.

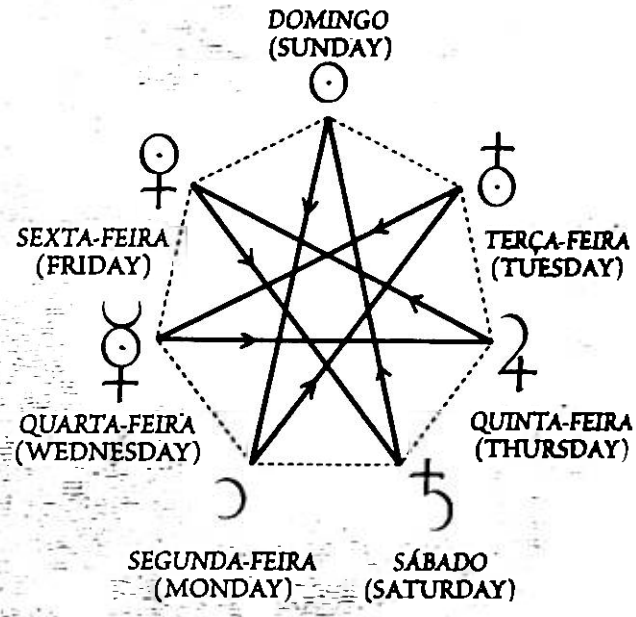
Há sete corpos celestes errantes que são claramente visíveis e que podem ser dispostos em torno de um heptágono, na ordem de sua velocidade aparente em relação às estrelas fixas. A Lua parece mover-se mais rápido, seguida por Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno (*figura superior esquerda*). Os planetas foram atribuídos a dias da semana, algo que ainda aparece em muitas línguas, e a ordem dos dias foi dada pelo heptagrama primário mostrado ao lado (*figura superior direita*). Em inglês, foram usados os nomes mais antigos de alguns planetas (ou deuses), e, assim, temos *dia de Wotan*, *dia de Thor* e *dia de Freya*, por exemplo.

Na Antiguidade, os sete metais conhecidos correspondiam aos sete planetas, com seus compostos dando origem a associações de cor. Vênus, por exemplo, foi associado aos verdes e azuis dos carbonatos de cobre. Os estudantes de alquimia frequentemente refletiam sobre essas relações, enquanto forjavam coisas cada vez mais sutis. Por incrível que pareça, o antigo sistema também fornece a ordem *moderna* desses metais por número atômico! Siga o heptagrama mais aberto, ao lado, para ordenar *Ferro 26*, *Cobre 29*, *Prata 49*, *Estanho 50*, *Ouro 79*, *Mercúrio 80* e *Chumbo 82* (*figura inferior esquerda, a partir de Critchlow & Hinze*). A sequência de condutividade elétrica também aparece rodeando externamente esse heptagrama, começando com o chumbo.



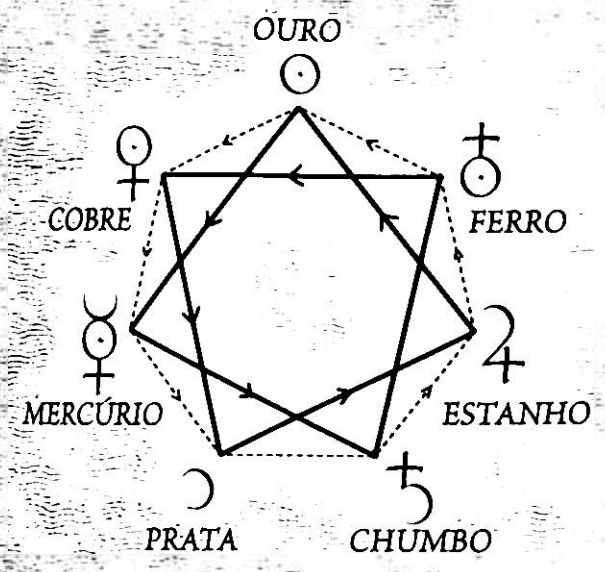
OS SETE CORPOS CELESTIAIS

Comece com a Lua e siga as setas para gerar a "Ordem Caldaica" das esferas.



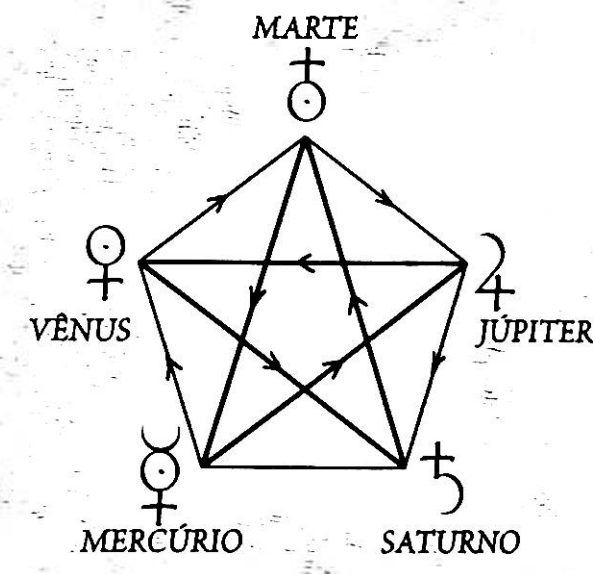
OS SETE DIAS DA SEMANA

Em francês: Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi... *siga as setas novamente.*



OS SETE METAIS DA ANTIGUIDADE

Comece com ferro e siga as setas para encontrar a ordem dos elementos com número atômico crescente.



OS CINCO VIAJANTES

Comece com Mercúrio. O movimento ao redor do pentagrama aumenta a distância em relação ao Sol.

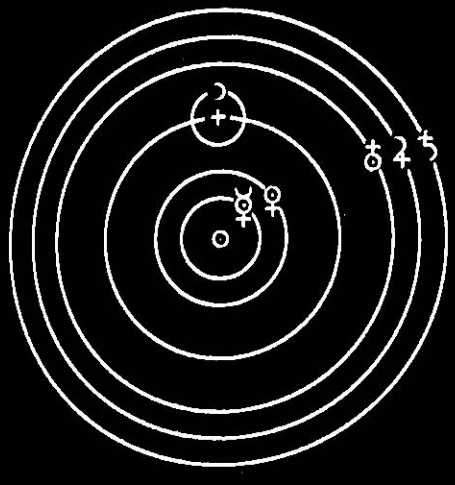
GEOCÊNTRICO OU HELIOCÊNTRICO

Terra ou Sol no centro

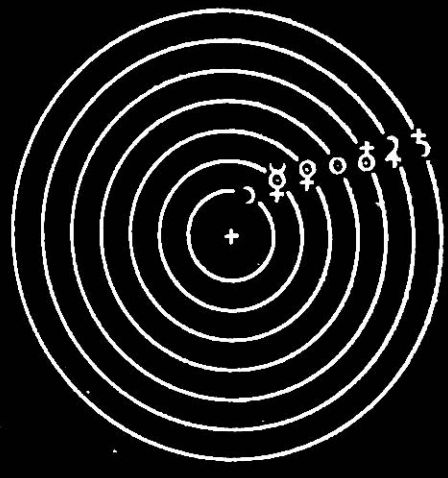
O extraordinário mundo de Ptolomeu, com os seus epiciclos e deferentes, durou um tempo surpreendentemente longo. Apesar de sua complexidade, ele "salvava as aparências", e também foi dito que salvava almas. De fato, as elipses foram estudadas pelos primeiros matemáticos gregos, como Apolônio, e já em 250 a.C. Aristarco de Samos propunha um sistema de planetas que orbitavam o Sol. No entanto, não era para ser, e por 1.500 anos a Terra permaneceu no centro do universo, exatamente como nós a experimentamos, enquanto o sistema de Ptolomeu era transmitido dos gregos para os árabes e, depois, de volta para o Ocidente mais uma vez.

Os quatro primeiros sistemas planetários são apresentados ao lado (*a partir de Koestler*), e cada esfera de cada diagrama deve ser entendida como possuindo sua própria ligação de epiciclos e excêntricos.[2] Apesar de ter colocado o Sol no centro de seu sistema (*figura superior esquerda*), em 1543, Copérnico permaneceu devoto do epiciclo, aumentando o número de rodas invisíveis, a partir das 39 de Ptolomeu, até a espantosa quantidade de 48 rodas. No final do século XVI, Tycho Brahe[3] tentou desesperadamente manter a Terra estacionada no centro do universo (*figura inferior esquerda*), no momento em que um antigo modelo grego desenvolvido por Heráclides,[4] semelhante a uma versão posterior de Erígena, procurava um consenso.

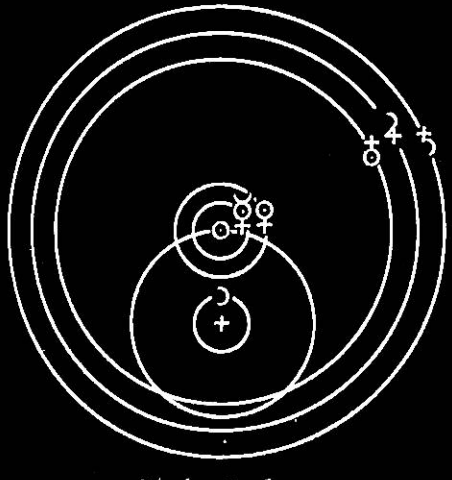
Durante o século XVII, o Sol tornou-se o centro do sistema solar, e muitas pessoas começaram a esquecer que os planetas, algumas vezes, se movem para trás. O modelo moderno do sistema solar (*figura inferior ao lado*) apresenta os planetas (incluindo um asteroide, Ceres) orbitando o Sol em elipses, com a elipse de cada planeta girando lentamente para criar um toroide ou "concha" orbital ao longo do tempo. Esse modelo básico foi idealizado por Johannes Kepler em 1596, e é para esta sua ideia que nos voltamos a partir de agora.



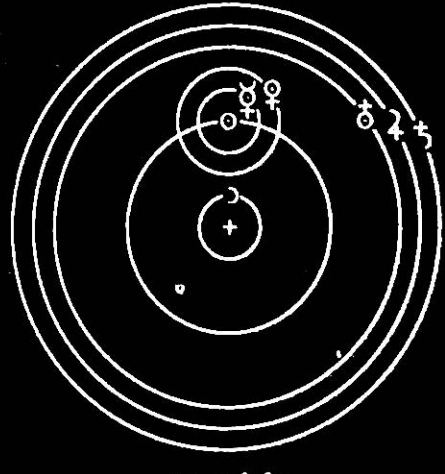
Aristarco e Copérnico



Ptolomeu



Tycho Brahe



Heráclides

Kepler

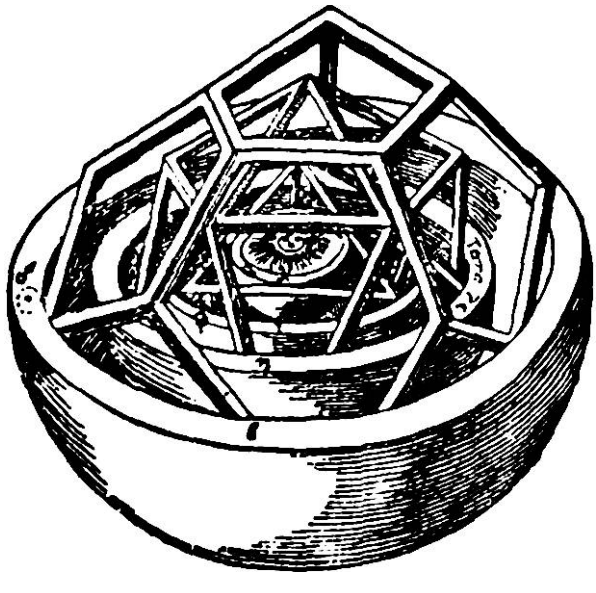
A VISÃO DE KEPLER

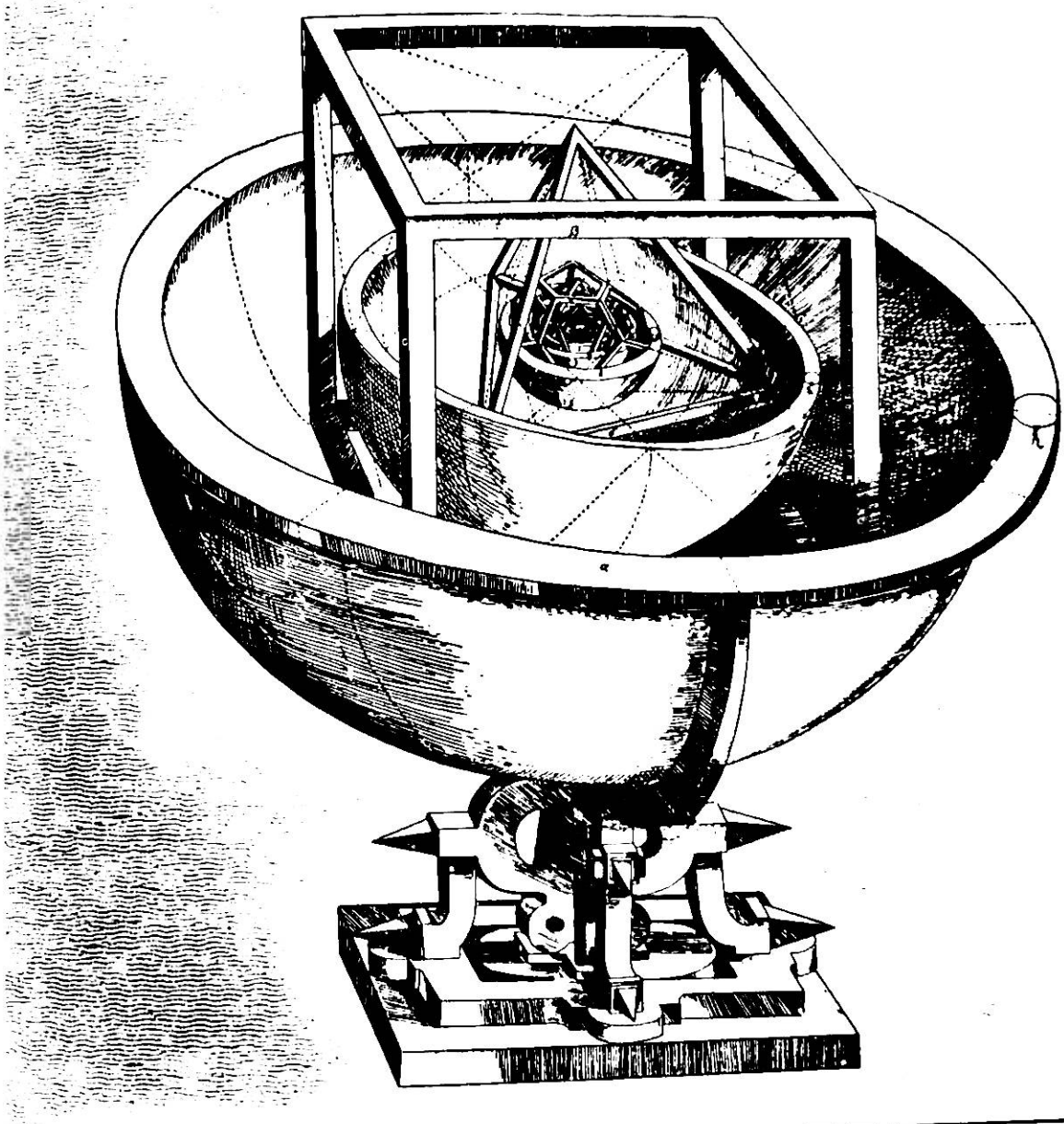
Elipses e sólidos encaixados

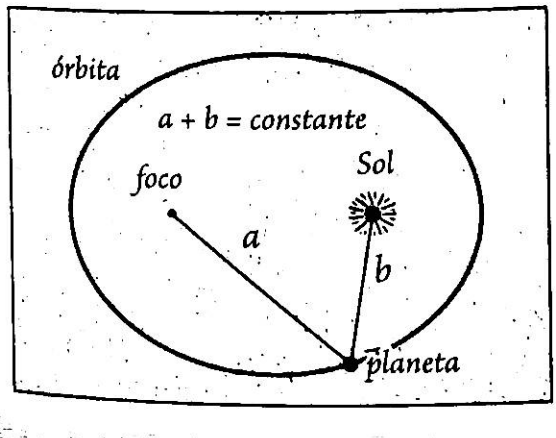
Kepler percebeu três coisas a respeito das órbitas planetárias. Em primeiro lugar, que elas são elipses (*de modo que a + b = constante; figuras menores ao lado*), com o Sol em um foco. Segundo, que a área do espaço percorrida por um planeta, em dado momento, é constante. Terceiro, que o período T de um planeta se relaciona a R, seu semieixo maior (ou órbita "média"), de modo que T^2/R^3 é uma constante ao longo de *todo* o sistema solar.

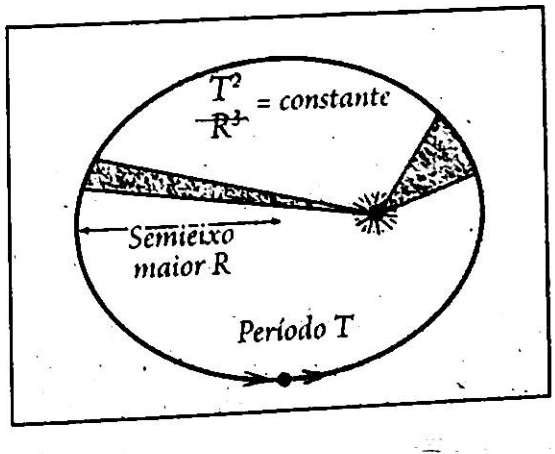
Procurando uma solução geométrica ou musical para as órbitas, Kepler observou que seis planetas heliocêntricos significavam cinco intervalos. A famosa solução geométrica experimentada por ele fez com que os cinco *sólidos platônicos* coubessem entre as esferas desses planetas (*figura detalhada abaixo e maior ao lado*).

Mais recentemente, longe de diminuir a visão de Kepler, a lei de Einstein mostrou, na realidade, que os pequenos efeitos de espaço-tempo, causados pelo movimento mais rápido (e, portanto, mais pesado e com o tempo desacelerado) de Mercúrio, quando está mais próximo do Sol, criam uma rotação de precessão das elipses durante milhares de anos, reforçando, assim, as conchas de Kepler.






órbita
a + b = constante
foco
Sol
a
b
planeta

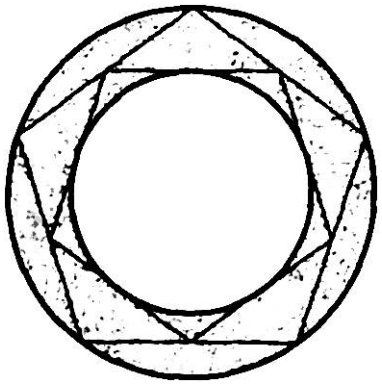

$\frac{T^2}{R^3}$ = constante
Semieixo maior R
Período T

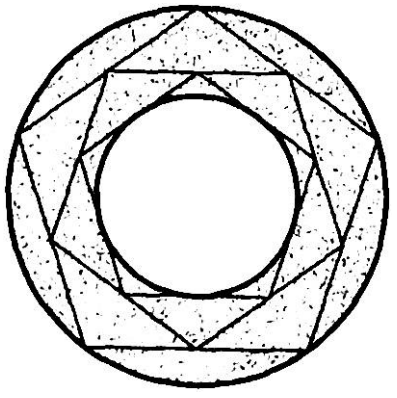
A MÚSICA DAS ESFERAS

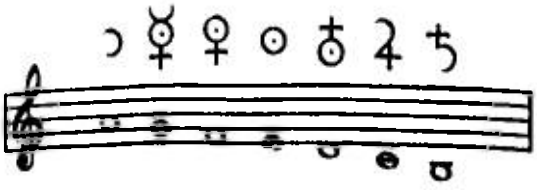
Planetas movimentando-se em sintonia

Nos tempos antigos, as sete notas musicais eram atribuídas aos sete corpos celestes em vários arranjos simbólicos (*topo da imagem ao lado*). Com os seus dados exatos, Kepler começa a calcular com precisão esse tão imaginado mundo de harmonias (*Harmoniae Mundi*). Particularmente, ele notou que as relações entre as velocidades angulares extremas dos planetas eram todas intervalos harmônicos (*centro da imagem ao lado, a partir de Godwin*). Mais recentemente, o trabalho de Molchanov mostrou que todo o sistema solar pode ser visto como uma estrutura quântica "sintonizada", com Júpiter como o maestro da orquestra.

Música e Geometria são companheiros íntimos, e a teoria de Weizsacker sobre a condensação dos planetas (*quadros escuros ao lado, a partir de Murchie & Warshall*) lança ainda mais luz sobre essas órbitas difíceis de compreender. Poderia parecer fantasioso, não fosse pelo fato de que dois pentágonos encaixados (*abaixo à esquerda*) definem a concha de Mercúrio (99,4%), o espaço vazio entre Mercúrio e Vênus (99,2%), as órbitas médias relativas da Terra e de Marte (99,7%) e o espaço entre Marte e Ceres (99,8%), enquanto três pentágonos encaixados (*abaixo à direita*) definem o espaço vazio entre Vênus e Marte (99,6%) e também as órbitas médias de Ceres e Júpiter (99,6%).

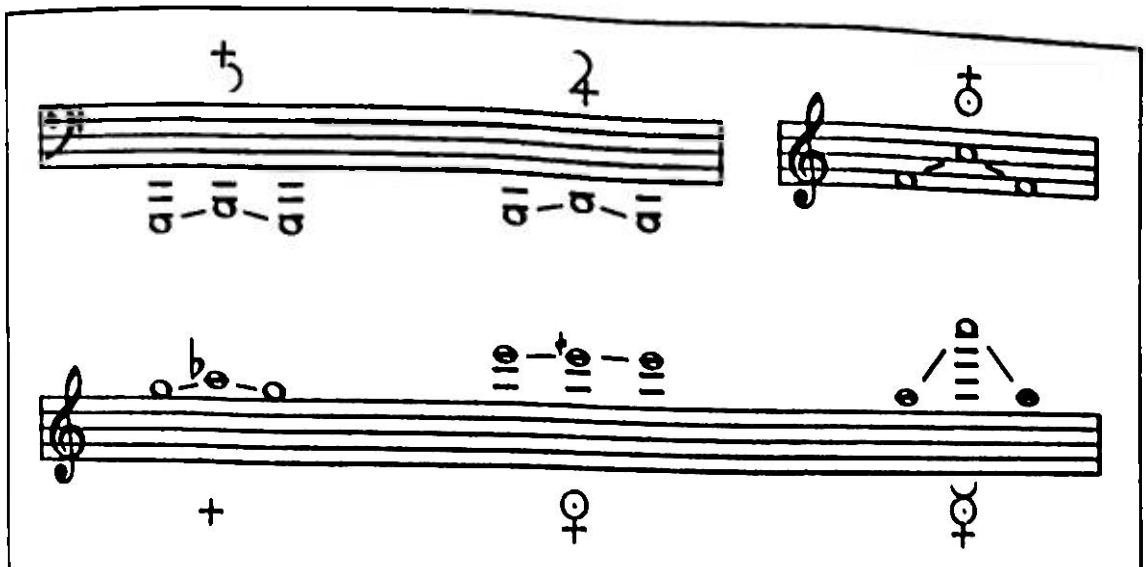




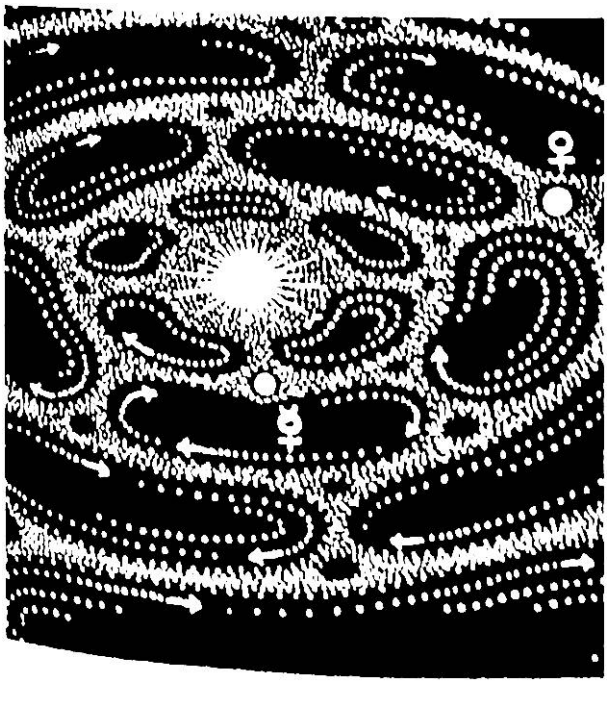


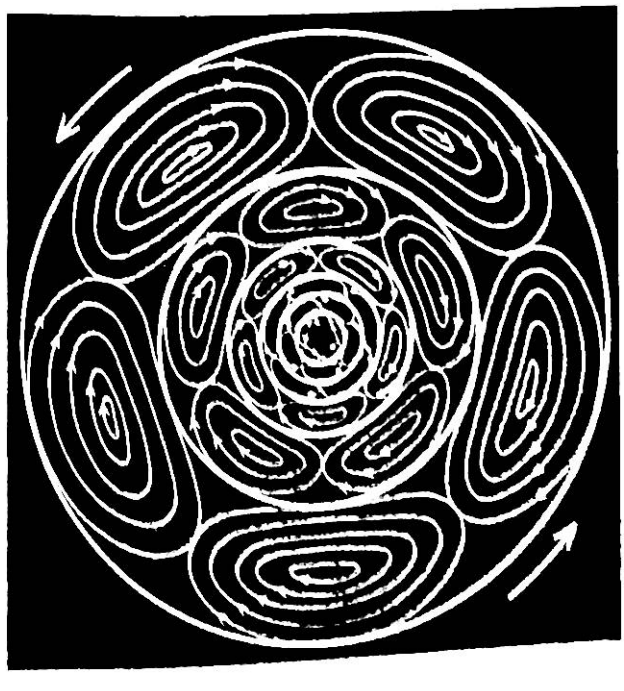
ANTIGO SISTEMA EGÍPCIO

CÍCERO - O SONHO DE CIPIÃO



AS HARMONIAS CELESTIAIS DE KEPLER





A LEI DE TITIUS-BODE E OS SÍNODOS

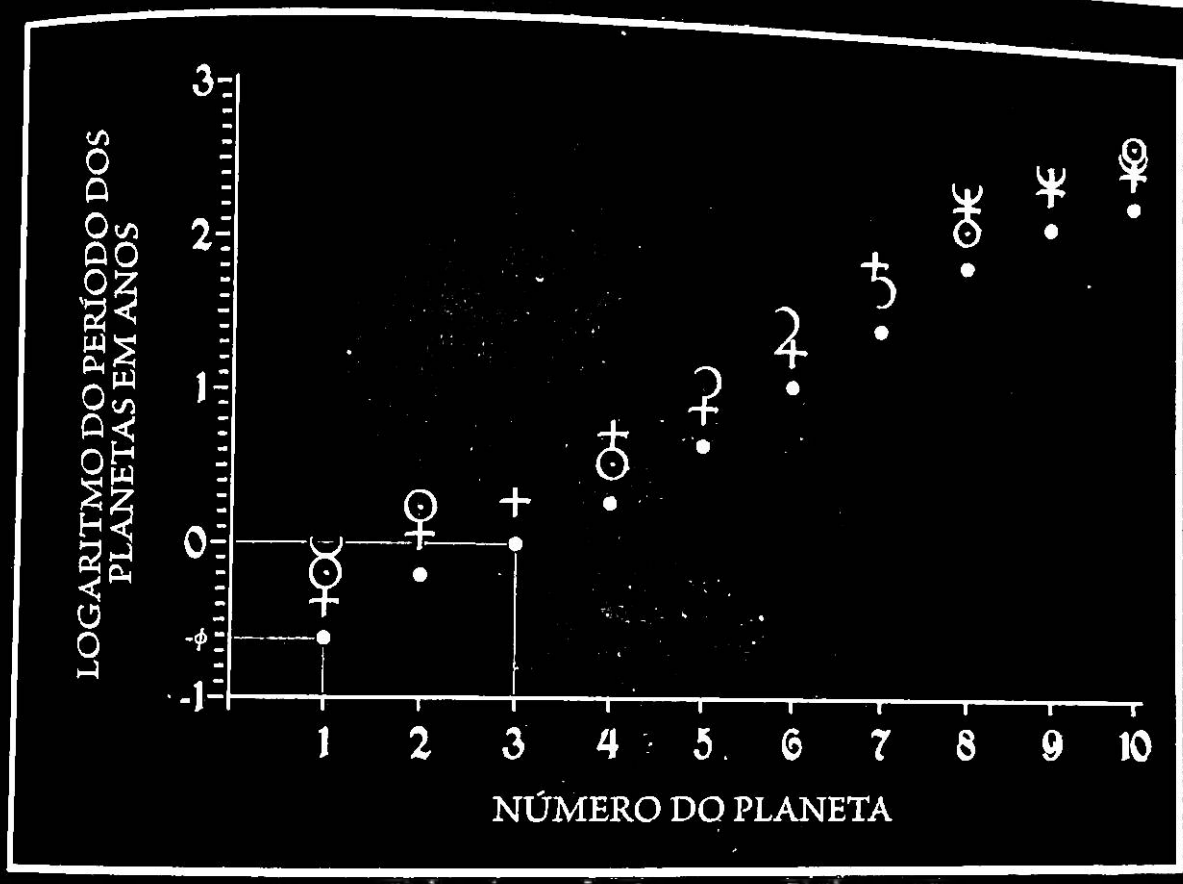
Harmonia e beijos rítmicos

Houve várias tentativas de descobrir padrões nas órbitas e períodos dos planetas. Um gráfico logarítmico básico (*topo, quadro ao lado*) mostra uma clara ordem subjacente ao movimento dos planetas (*a partir de Ovendon & Ray*).

Um sistema conhecido é a regra de Titius & Bode (1750): adiciona-se quatro à série 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 e 384, resultando em 4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196 e 388. Esses resultados se encaixam muito bem nos raios orbitais planetários (com exceção de Netuno). A fórmula previa que faltava um planeta a uma distância de 28 unidades entre Marte e Júpiter, e em 1º de janeiro de 1801 Piazzi descobriu Ceres, o maior dos planetas menores[5] no cinturão de asteroides, na órbita correta.

A duração de tempo que leva para um planeta dar uma volta ao redor do Sol é conhecida como o seu *período*. Algumas vezes, os períodos ocorrem como simples relações entre si, sendo um exemplo famoso a relação de 2:5 entre Júpiter e Saturno (99,3%). Urano, Netuno e o minúsculo Plutão são especialmente rítmicos e harmônicos, exibindo uma relação de períodos de 1:2:3, com Urano e Netuno adicionando-se para produzir Plutão (99,8%).

Como um redemoinho, os planetas internos[6] orbitam o Sol muito mais rápido que os planetas externos, e a tabela (*abaixo, quadro ao lado*) mostra o número de dias entre os beijos, as passagens ou as aproximações dos dois planetas, adequadamente chamados *sínodos*. Será que a Terra sente alguma harmonia? Bem, temos dois vizinhos planetários, Vênus (do lado do Sol) e Marte (do lado do espaço), e os números revelam que beijamos Marte *três* vezes para cada *quatro* beijos de Vênus (99,8%). Assim, uma polirritmia ultralenta de três para quatro, ou uma quarta musical profunda, está sendo tocada ao nosso redor *todo* o tempo!



	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆	♇	☋
☿	∞	144,6	115,9	100,9	92,83	89,79	88,70	88,22	88,10	88,05
♀	144,6	∞	583,9	333,9	259,4	237,0	229,5	226,4	225,5	225,3
♁	115,9	583,9	∞	779,9	466,7	398,9	378,1	369,7	367,5	366,7
♂	100,9	333,9	779,9	∞	1.162	816,5	733,9	702,7	694,9	692,2
♃	92,83	259,4	466,7	1.162	∞	2.744	1.991	1.777	1.728	1.712
♄	89,79	237,0	398,9	816,5	2.744	∞	7.252	5.045	4.669	4.551
♅	88,70	229,5	378,1	733,9	1.991	7.252	∞	16.570	13.100	12.210
♆	88,22	226,4	369,7	702,7	1.777	5.045	16.569	∞	62.890	46.440
♇	88,10	225,5	367,5	694,9	1.728	4.669	13.100	62.890	∞	179.800
☋	88,05	225,3	366,7	692,2	1.712	4.551	12.210	46.440	179.800	∞

OS PLANETAS INTERNOS

Mercúrio, Vênus, Terra e Marte

Nosso sistema solar pode ser pensado como uma série de anéis giratórios finos, cada um estabelecendo-se lentamente. Dividido em duas metades por um cinturão de asteroides, a região interna exibe quatro pequenos planetas rochosos orbitando rapidamente o Sol, enquanto a metade externa tem quatro enormes e lentos planetas de gás e gelo.

O Sol ainda não desistiu de seus segredos. Composto principalmente por hidrogênio e hélio, e uma fábrica de elementos, é também um gigante ímã geométrico fluido, com temperaturas de 15 milhões °C em seu núcleo e 6.000 °C na superfície. Ele espalha um vento de partículas através de todo o sistema solar, e suas manchas e imensas explosões solares afetam tudo que é eletrônico na Terra.

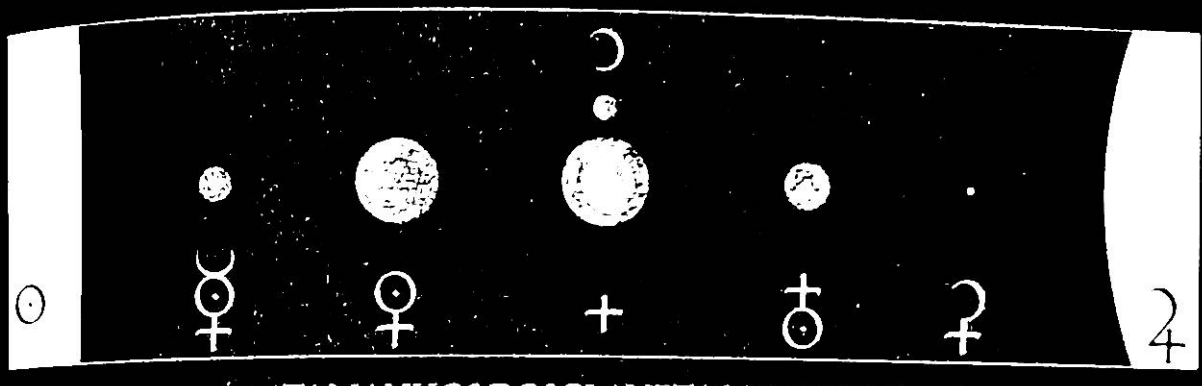
Mercúrio é o primeiro planeta. Em sua maior parte composto por ferro sólido, é um mundo de crateras, sem atmosfera, com uma temperatura de 400 °C ao sol e -170 °C à sombra.

Vênus é o segundo planeta, um mundo de estufa envolto por nuvens. Na superfície, a temperatura chega a inacreditáveis 480 °C, e a rica atmosfera de dióxido de carbono é *noventa* vezes mais densa que a da Terra. Lá uma maçã seria instantaneamente incinerada pelo calor, esmagada pela atmosfera e, finalmente, dissolvida em uma chuva de ácido sulfúrico.

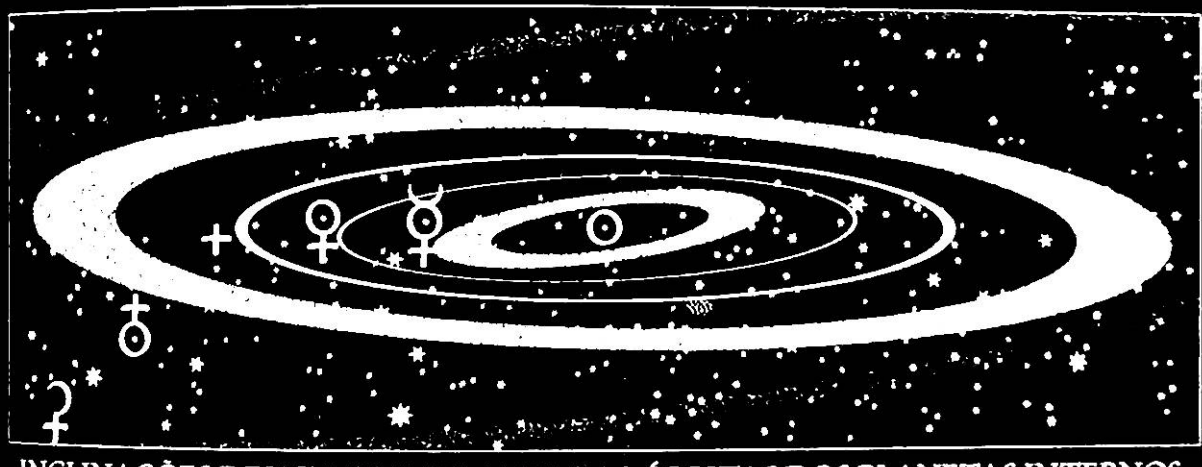
A Terra é o terceiro planeta, o único com vida e uma lua.

Marte é o quarto, um mundo vermelho rochoso, quase glacial. As calotas de gelo cobrem os polos sob uma atmosfera rarefeita. Os leitos de rio sugerem que outrora pode ter havido oceanos em Marte, mas eles já se foram há muito tempo, e hoje as tempestades de poeira envolvem regularmente o planeta por dias a fio. Imensos vulcões mortos, um deles três vezes maior que o Monte Everest, são testemunhas de uma época passada. Marte tem duas luas minúsculas.

Para além de Marte está o Cinturão de Asteroides, e para além dele estão os planetas gigantes.



TAMANHOS DOS PLANETAS INTERNOS



INCLINAÇÕES E EXCENTRICIDADES DAS ÓRBITAS DOS PLANETAS INTERNOS

HELIOCÊNTRICO

VISTA DA TERRA

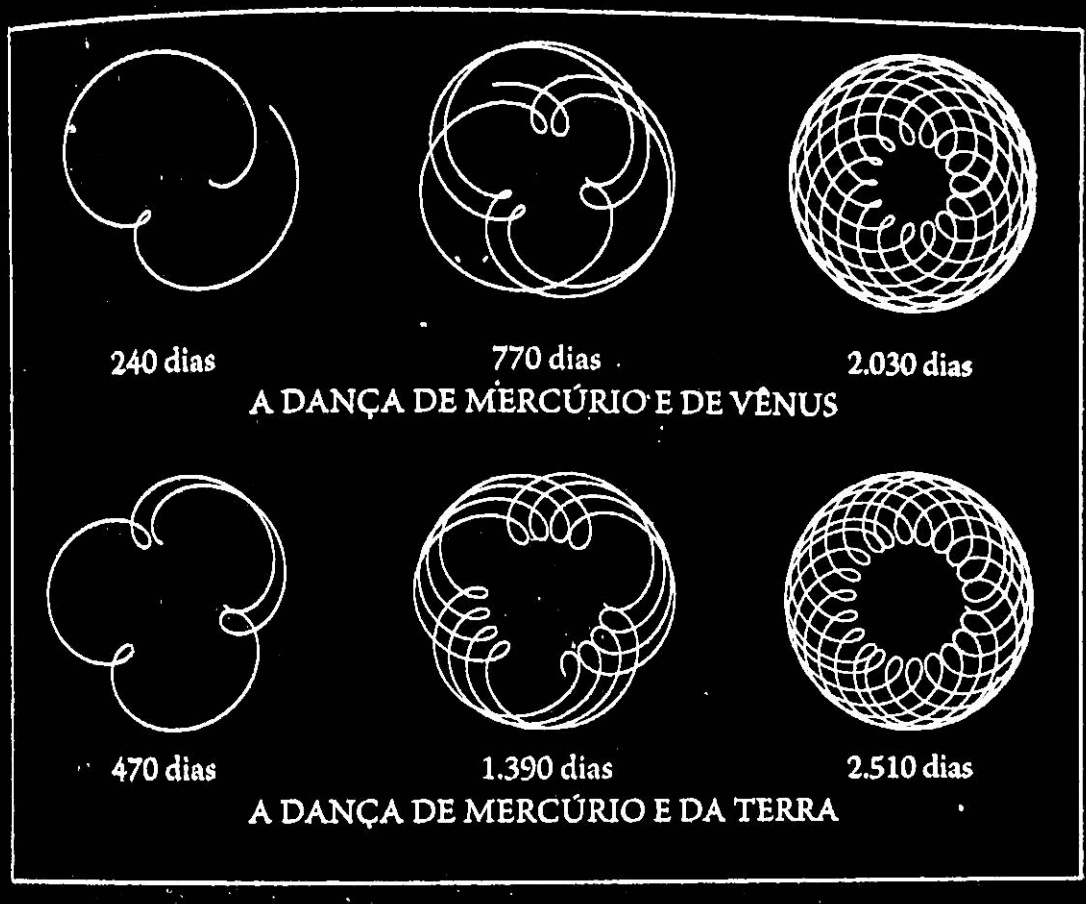
ENTENDENDO O SENTIDO DAS IMAGENS

Algumas dicas sobre as aparências

Visto da Terra, seja dia ou noite, o Sol move-se lentamente para a esquerda, contrariamente às estrelas (à direita, no hemisfério Sul), levando um ano para retornar à mesma estrela. A Lua circula velozmente na mesma direção todo mês, levando 27,3 dias para retornar a uma estrela. Vênus e Mercúrio oscilam em torno do Sol, indo e vindo, enquanto o próprio Sol gira lentamente em seu circuito anual. Imagine-se de pé em Vênus: o Sol move-se mais rápido, em direção contrária às estrelas, e Mercúrio está mais perto, girando ao redor do Sol como um *waltzer*[7] em um parque de diversões.

Cada par de planetas cria uma dança singular. Não importa em qual dos dois você esteja, a dança de seu parceiro, ao seu redor, será a mesma. É uma experiência compartilhada. As valsas em evolução de Mercúrio com a Terra e Vênus são apresentadas ao lado (*retângulo superior*). Terra e Mercúrio beijam-se cerca de 22 vezes em sete anos, embora os gregos antigos também conhecessem um ciclo mais preciso de 46 anos e 145 sínodos. Mercúrio e Vênus estão maravilhosamente em sintonia depois de apenas quatorze beijos.

No retângulo inferior (*imagem ao lado*) aparece a proporção áurea, φ ou *phi*, encontrada em todo pentagrama e na série de números Fibonacci (*lado direito*), que começa com 1, 2, 3, 5, 8 e 13 – todos estes números podem ser vistos nos planetas internos. A proporção áurea é, essencialmente, 0,618, mas, uma vez que um *dividido* por ela é igual a 1,618 (o mesmo que adicionar um à proporção áurea), e 1,618 *vezes* 1,618 é igual a 2,618 (o mesmo que adicionar mais um de novo), ela frequentemente assume qualquer desses valores. A proporção áurea é encontrada em todas as formas de vida orgânica; é a marca da vida e, como veremos mais adiante, também se encontra muito presente, de forma precisa, no interior do sistema solar.


240 dias
770 dias
2.030 dias
A DANÇA DE MERCÚRIO E DE VÊNUS
470 dias
1.390 dias
2.510 dias
A DANÇA DE MERCÚRIO E DA TERRA

1,618
1,618
1
2,618
A SEÇÃO ÁUREA
1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
2 + 3 = 5
3 + 5 = 8
5 + 8 = 13
8 + 13 = 21
13 + 21 = 34
21 + 34 = 55
34 + 55 = 89
1 2 3 5 8 13 ...
1 + 1 = 1
1 + 2 = 0,5
2 + 3 = 0,6667
3 + 5 = 0,6
5 + 8 = 0,625
8 + 13 = 0,6154
13 + 21 = 0,6190
21 + 34 = 0,6176
34 + 55 = 0,6182
55 + 89 = 0,6180
ϕ = 0,61803399...
OS NÚMEROS DE FIBONACCI

AS ÓRBITAS DE MERCÚRIO E DE VÊNUS

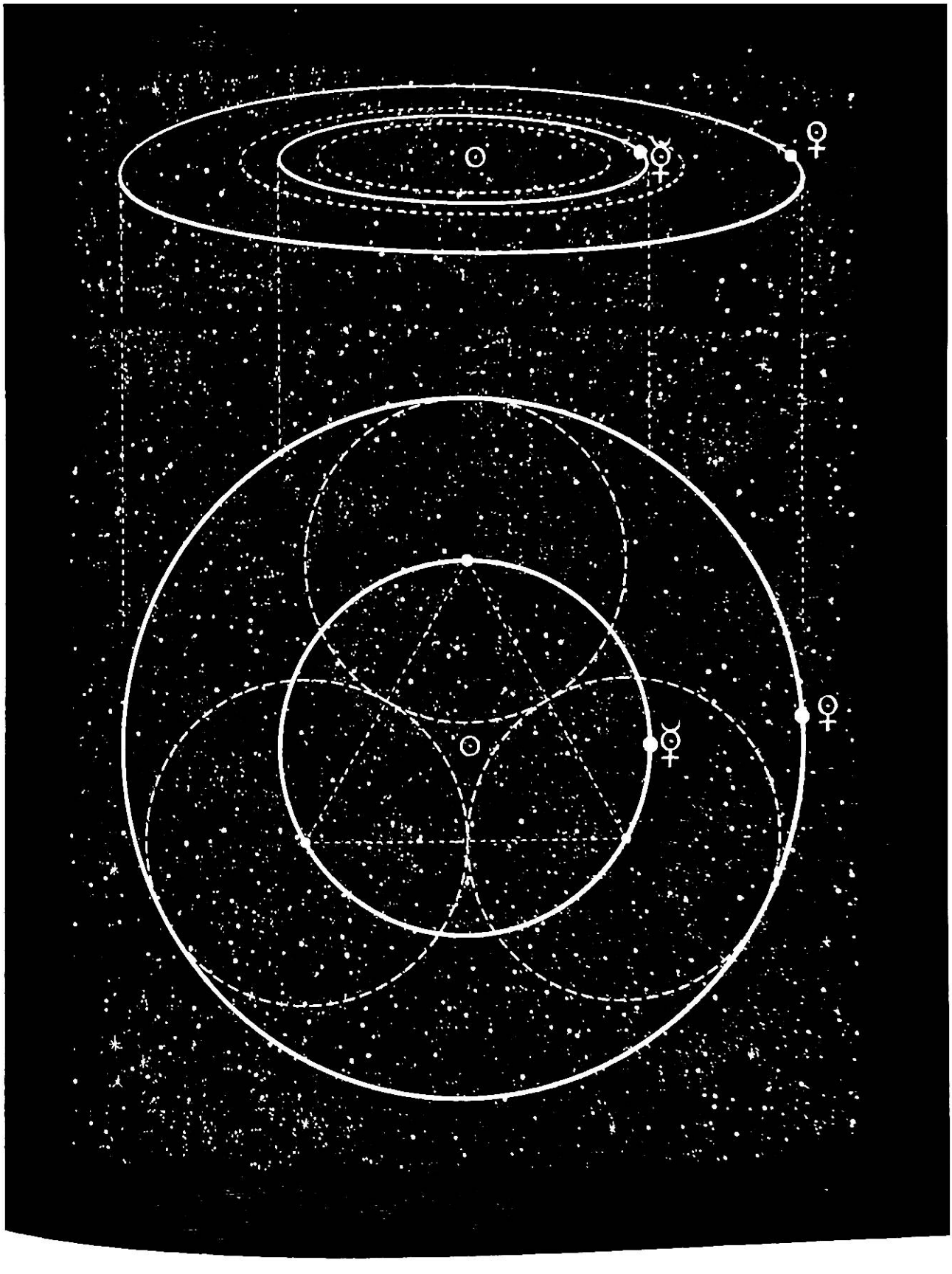
Um memorizador muito simples

Poucas coisas são mais simples que um círculo. Com a descoberta das elipses por Kepler, e com Newton e Einstein colocando-as para girar, as órbitas planetárias puderam ser pensadas como "círculos" orbitais, centrados no Sol, com a excentricidade engrossando ligeiramente o círculo, ou fornecendo uma concha às esferas (*ver diagrama de Kepler, página* 309).

Uma das primeiras coisas que você pode fazer com os círculos é colocar três deles juntos, de forma que todos se toquem. Surpreendentemente, as órbitas dos dois primeiros planetas do sistema solar estão escondidas nesse modelo simples. Se a órbita média de Mercúrio passar através dos centros dos três círculos, então Vênus circunda a figura (99,9%).

Esse é um truque simples de lembrar, pois ele está o tempo todo ao nosso redor, em casa, no *design*, na arquitetura, na arte e na natureza. Cada vez que pegamos três copos ou empurramos três bolas em conjunto, recriamos as órbitas circulares dos dois primeiros planetas, com um grau extraordinário de precisão. Deve haver uma razão para essa bela correspondência entre o ideal e o manifesto, mas ainda não se conhece nenhuma explicação, e esse tipo de problema está fora de moda atualmente. Talvez um brilhante cientista do século XXI encontre uma resposta – até lá, ela permanece uma "coincidência".

O triângulo é um símbolo da oitava musical 2:1, e Mercúrio executa um delicioso solo sobre esse tema, já que um dia do planeta leva exatamente dois anos para completar-se, durante os quais Mercúrio gira precisamente três vezes sobre o seu próprio eixo.[8] Assim, o primeiro planeta do sistema solar executa as primeiras harmonias e desenha, com sua órbita, uma das primeiras formas geométricas. Começamos com o um, ouvimos um dois e vimos um três.



O BEIJO DE VÊNUS

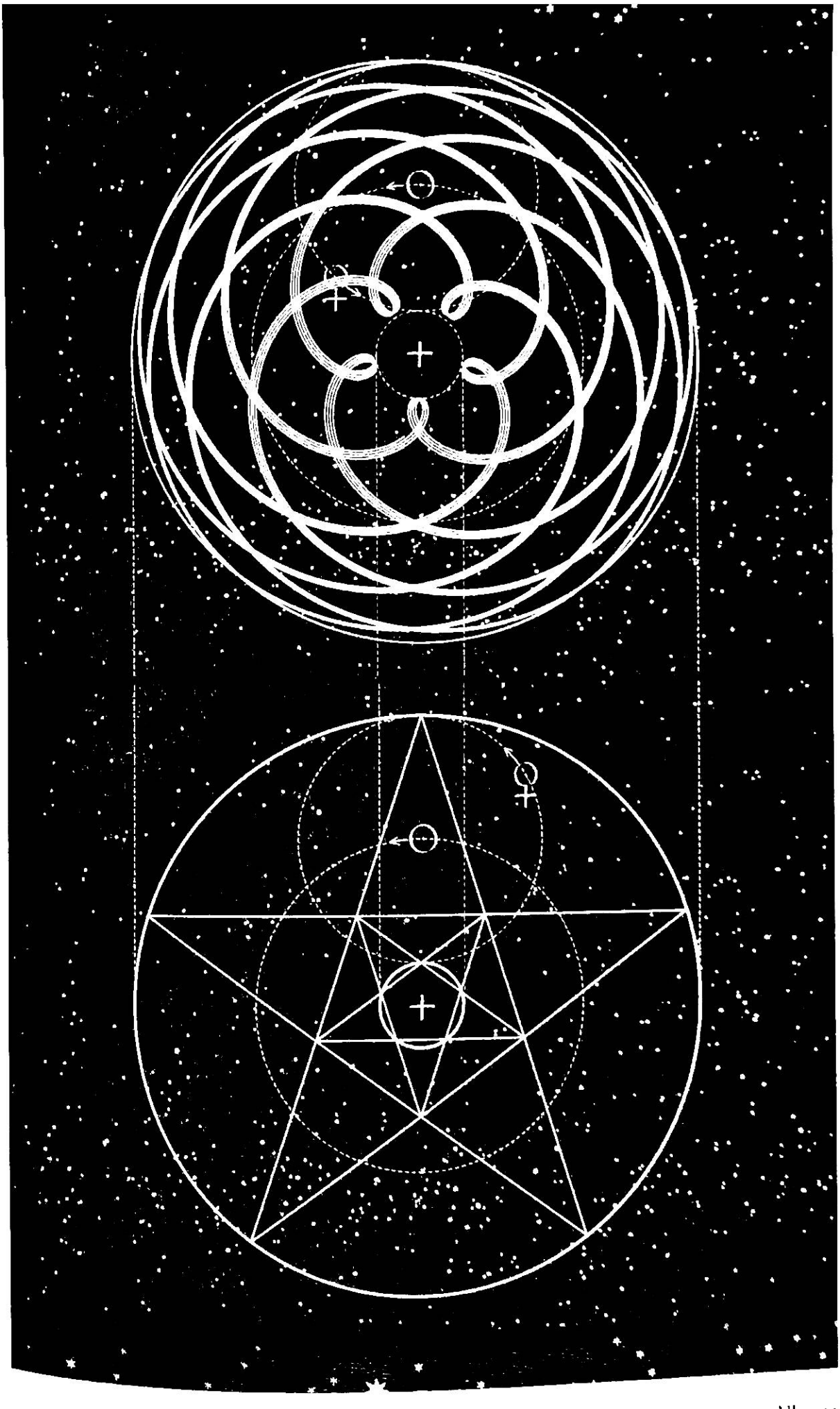
Nossa mais bela relação

Além do Sol e da Lua, o ponto mais brilhante no céu é o planeta Vênus, a estrela da manhã e da noite. É o nosso vizinho mais próximo, e beija-nos a cada 584 dias, quando passa entre a Terra e o Sol. Cada vez que ocorre um desses beijos, Vênus e a Terra alinham-se até dois quintos de um círculo ao redor; assim, desenha-se um pentagrama de conjunções, levando exatamente oito anos (99,9%), ou treze anos venusianos (99,9%), para ser completado. Observe novamente os números de Fibonacci – 5, 8 e 13 – que regulam a maior parte do crescimento vegetal na Terra. Os períodos de Vênus e da Terra também estão intimamente relacionados a φ:1 (99,6%).

Vista da Terra, essa harmonia aparece como se Vênus rodopiasse em torno do Sol giratório, desenhando um padrão surpreendentemente belo. No diagrama ao lado (*superior*), são mostrados quatro ciclos de oito anos, que resultam em 32 anos. Os pequenos laços se criam quando Vênus, em seu beijo mais próximo e encantador, parece inverter brevemente a direção em relação às estrelas de fundo (*mostrado abaixo, como visto da Terra*).

A natureza quíntupla da dança de Vênus e da Terra estende-se às distâncias mais próximas e mais distantes entre eles, já que o *perigeu* e o *apogeu* de Vênus são definidos por dois pentagramas (*diagrama inferior, ao lado*). O corpo do espaço que um desenha ao redor do outro é, portanto, dimensionado em 1:φ^4 (99,98%).

Todos esses diagramas também se aplicam à experiência que Vênus tem da Terra.



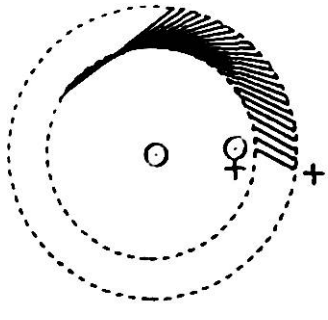
A BELEZA PERFEITA DE VÊNUS

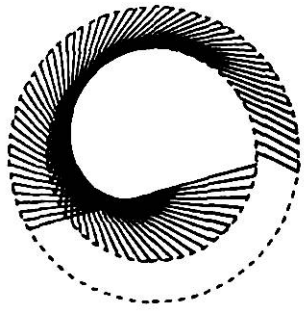
As coisas que não nos ensinam na escola

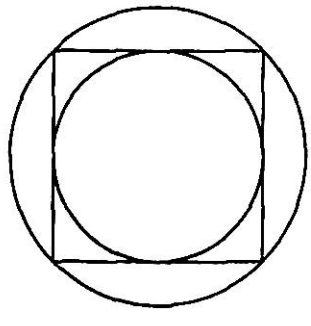
Com o Sol no centro, olhemos para as órbitas de Vênus e da Terra. A cada dois dias, uma linha é traçada entre os dois planetas (*abaixo à esquerda*). Por orbitar mais rápido, Vênus executa um circuito completo ao mesmo tempo que a Terra executa pouco mais da metade de um circuito (*abaixo no centro*). Se continuarmos a observar por exatos oito anos (ou treze anos venusianos), aparecerá o padrão da imagem ao lado, a versão heliocêntrica da flor de cinco pétalas da página anterior.

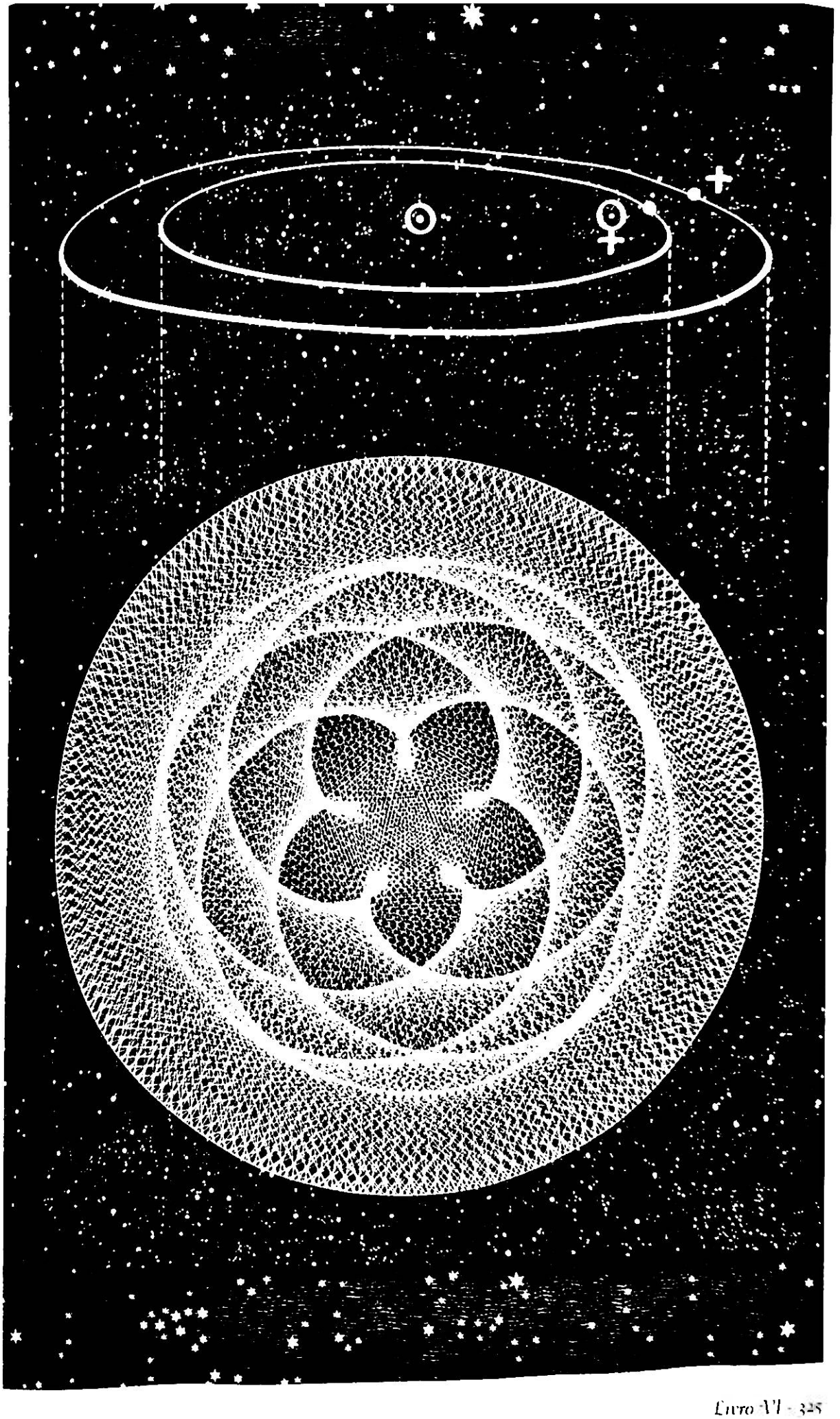
A relação entre a órbita externa da Terra e a órbita interior de Vênus – ou seja, as suas *casas* – é dada, de maneira intrigante, por um quadrado (*abaixo à direita*) (99,9%).

Vênus gira muito lentamente em seu próprio eixo, na direção oposta à maioria das rotações no sistema solar. Seu período de rotação é precisamente dois terços de um ano terrestre, o que equivale a uma quinta musical. Isso está em estreita harmonia com a dança na imagem ao lado, de modo que, toda vez que Vênus e Terra se beijam, Vênus tem a *mesma face* voltada para a Terra. Se pudéssemos pintar um local na superfície de Vênus, quando o planeta passa em frente ao Sol, toda vez que ele se alinhasse novamente com o Sol, como visto da Terra, esse local estaria apontando para nós. Ao longo dos oito anos terrestres que são necessários para os cinco beijos, Vênus gira sobre o seu próprio eixo doze vezes, em treze de seus anos (*a partir de Kollerstrom*) – todos belos números musicais.









FILOTAXIA

A espiral da vida

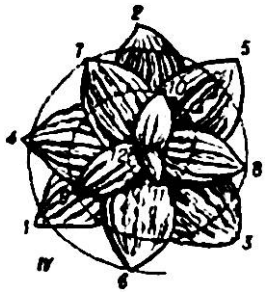
A vida na Terra utiliza um conjunto específico de números acima de todos os demais. A filotaxia é o estudo da forma como as folhas estão dispostas ao longo da haste de uma planta, e também descreve outras características vegetais, tais como flores, cabeças de sementes e frutos. A chave para a filotaxia é a sequência Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, e assim por diante, em que os termos adjacentes definem cada vez melhor a proporção áurea – e estão presentes em pentagramas, como vimos anteriormente.

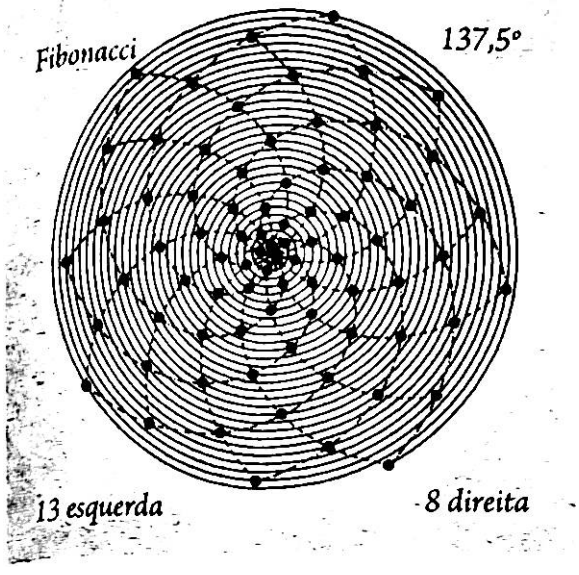
É um fato básico que a maioria das plantas na Terra produz folhas alternadas em frações Fibonacci de uma rotação completa. Por exemplo, algumas plantas produzem folhas ao longo da haste a cada 1/2 rotação; em aveleiras e faias o ângulo é 1/3; em damasqueiros e carvalhos é 2/5; em pereiras e álamos é 3/8; e em amendoeiras e salgueiros é 5/13. Os abacaxis exibem espirais com 5, 8 e 13 braços. Conte o número de brotos ao longo de um ramo de salgueiro e encontrará uma espiral com 13 brotos em 5 voltas.

Os seres humanos apresentam os mesmos números em seu corpo (de maneira quádrupla). Temos cinco dedos (mão e pé) em cada quarta parte do corpo, um padrão que se repete em nossa boca, com cinco dentes de leite, substituídos por oito dentes adultos, treze no total, em cada quarta parte da boca.

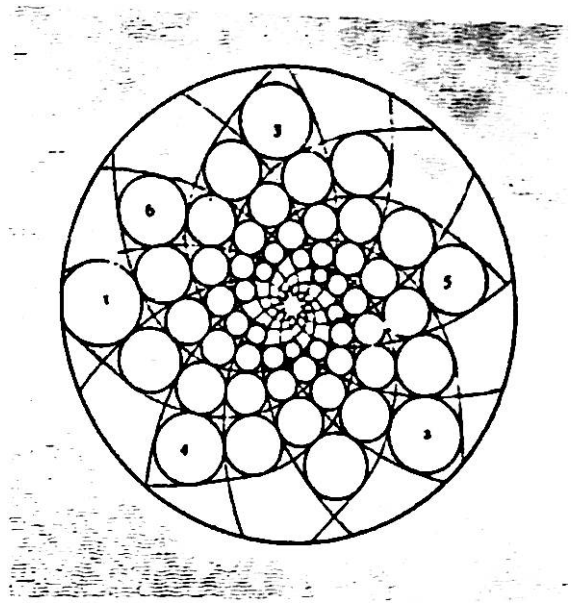
O número mais comum de pétalas em flores é cinco, e os números da filotaxia mais comumente utilizados em plantas são cinco, oito e treze.

Tal como é acima, assim é abaixo, pois esses também são os números de Vênus!

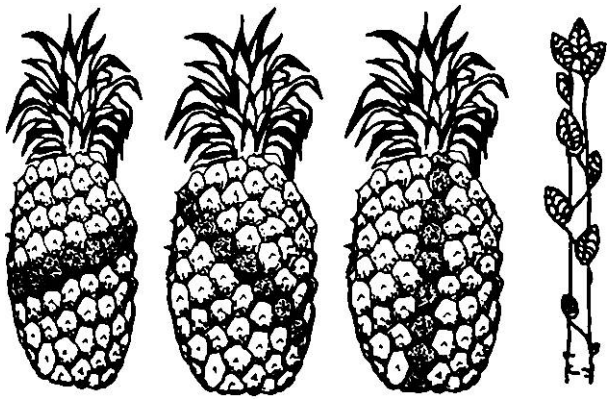




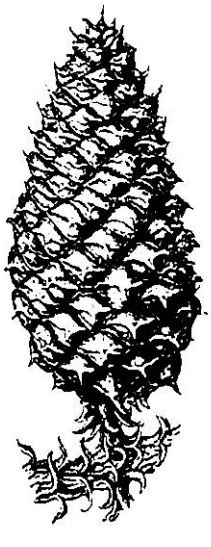
Filotaxia de 8:13. Novos elementos unitários aparecem ao longo de uma espiral de Arquimedes, a cada 137,5°.

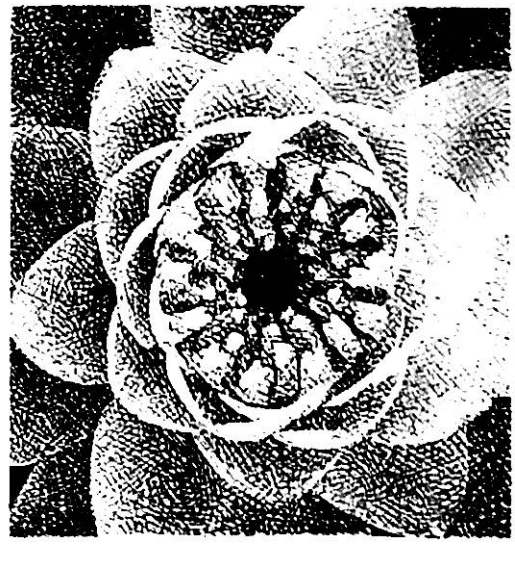


O modelo de filotaxia de Wilhelm Hofmeister, que comprime espaço, é baseado na sugestão de Leonardo da Vinci de que a filotaxia otimiza o acesso da planta ao orvalho e à luz solar.



Os abacaxis exibem adoráveis filotaxias de 5:8:13, com cinco espirais quase horizontais, oito espirais de 45° e treze espirais verticais.





Muitas cabeças de sementes exibem filotaxias como resultado da filotaxia implícita nas pétalas de suas flores.

MERCÚRIO E TERRA

Ainda mais números cinco e oito

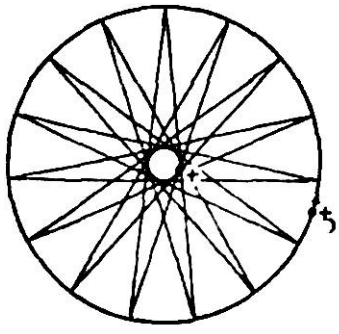
Os tamanhos físicos de Mercúrio e da Terra estão na mesma relação que suas órbitas médias. Várias camadas quíntuplas e óctuplas são apresentadas na imagem ao lado, mostrando a proporção entre as órbitas *e* os tamanhos dos dois planetas.

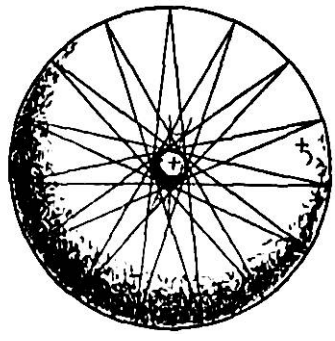
O diâmetro da órbita mais interna de Mercúrio é sugerido pelo pentagrama inserido no círculo (*imagens ao lado, acima à esquerda*) (99,5%), que também é a distância entre as órbitas médias dos dois planetas (99,7%).

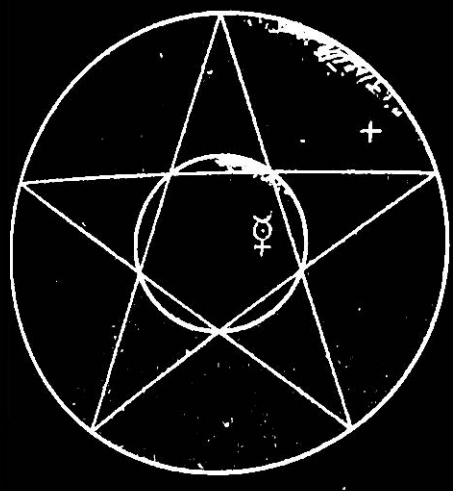
O diagrama mais abaixo à direita expande os três círculos que se tocam, apresentados na página 319. Oito círculos centrados na órbita de Vênus produzem a órbita média da Terra (99,99%) – como os oito anos necessários para os cinco beijos, talvez?

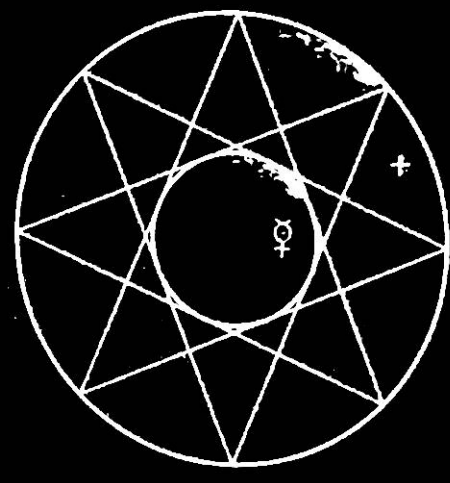
Mercúrio, Vênus e Terra mostram uma coincidência peculiar: se trabalharmos em unidades de raio e período orbitais de Mercúrio, então o período de Vênus multiplicado por 2,618 equivale ao raio orbital da Terra ao quadrado (99,8%). A dança de Mercúrio nas proximidades da Terra também produz seu ano sinódico de 115,9 dias. Richard Heath descobriu recentemente que isso equivale a 2,618 vezes uma quinta musical vezes uma lua cheia (99,9%), onde uma quinta musical é 3:2, o valor 2,618 corresponde a Φ^2 (ou 1,618 x 1,618), e uma lua cheia ocorre a cada 29,53 dias.

As órbitas relativas e os tamanhos da Terra e de Saturno são dados por uma estrela de quinze pontas (*abaixo*), que também fornece a inclinação da Terra.

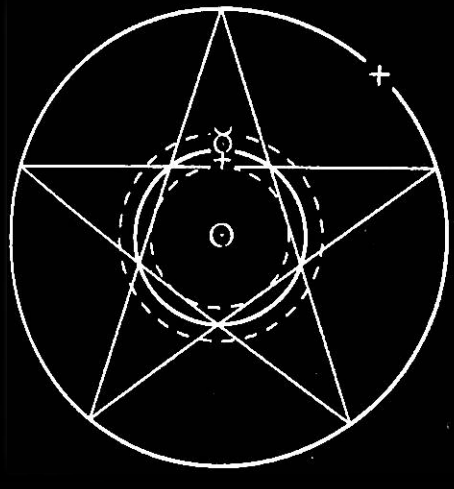


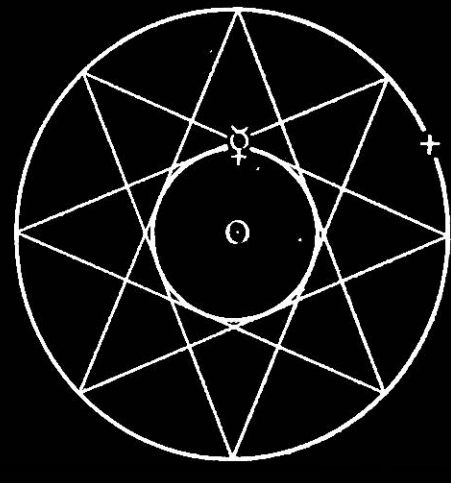




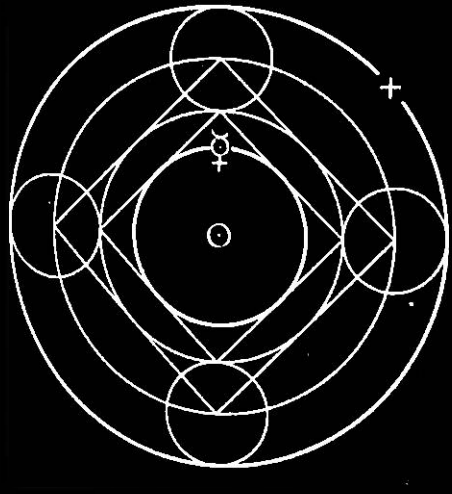


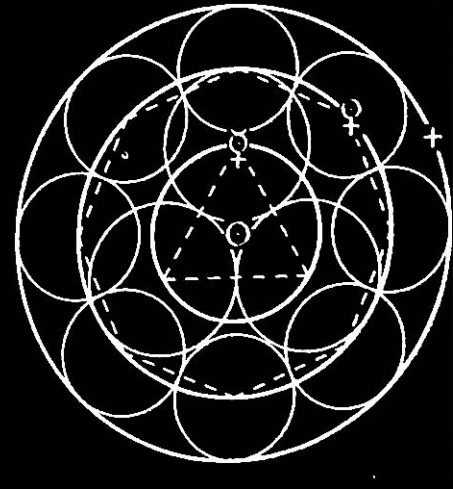
Os tamanhos relativos de Mercúrio e da Terra, definidos por um pentagrama ou por um octograma (99%).





As órbitas relativas de Mercúrio e da Terra, definidas pelo mesmo pentagrama e pelo mesmo octograma (99%).





Outras maneiras mais precisas de desenhar as órbitas internas (99,9%).

O CASAMENTO ALQUÍMICO

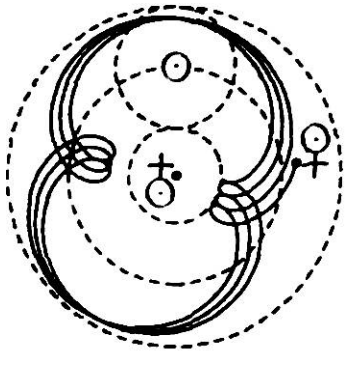
A relação de três para onze em todo lugar

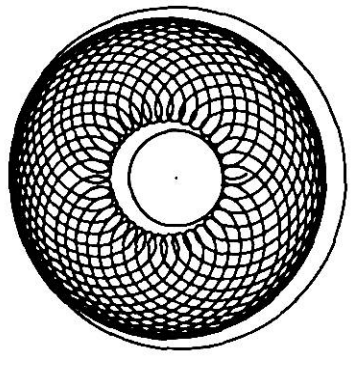
A partir da superfície da Terra, o Sol e a Lua parecem *do mesmo tamanho*. De acordo com a cosmologia moderna comum,[9] essa é "apenas" uma coincidência, mas qualquer bom mago dirá que o equilíbrio entre esses dois corpos primários é a prova clara de uma magia muito antiga.

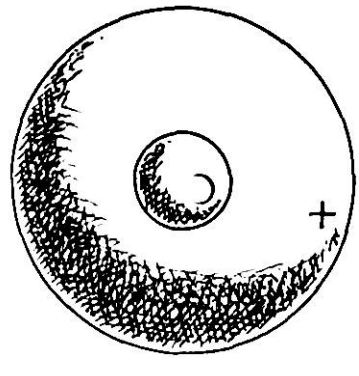
O tamanho da Lua em comparação com a Terra é de 3 para 11 (99,9%). O que isso significa é que, se você atrair a Lua para a Terra, o círculo que passa pelo centro da Lua celestial terá uma circunferência igual ao perímetro de um quadrado envolvendo (e tangenciando) a Terra. Como vimos na página 80, essa proporção também está presente em todo arco-íris duplo que vemos. Os antigos parecem ter tomado conhecimento disso e escondido esse saber na definição da milha (*quadro ao lado, a partir de Mitchell & Ward*).

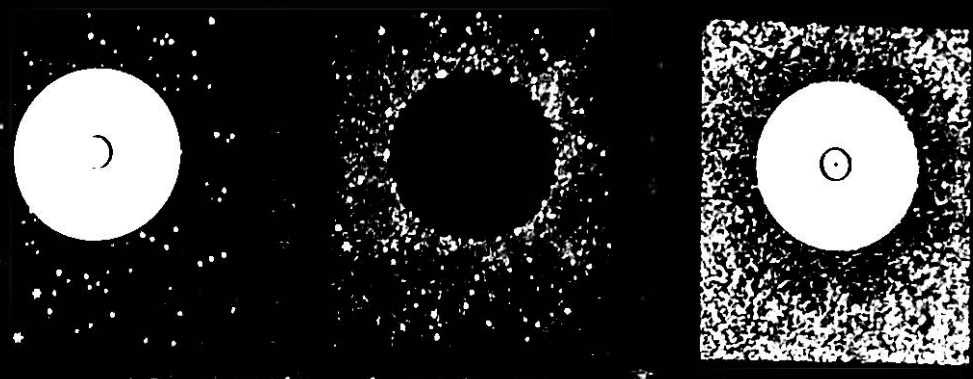
A proporção Terra-Lua também é invocada com precisão por nossos dois vizinhos, Vênus e Marte (*nas figuras abaixo, Vênus aparece dançando nas redondezas de Marte*). A relação entre as distâncias *mais próxima* e *mais distante* que cada um experimenta do outro é, inacreditavelmente, 3:11 (99,9%). A Terra e a Lua acomodam-se entre os dois planetas, ecoando com perfeição essa graciosa relação espacial local.

Acontece que a relação 3:11 é 27,3%, e a Lua orbita a Terra a cada 27,3 dias, o que equivale ao período de rotação médio de uma mancha solar. O Sol e a Lua se parecem muito com um casal unido.

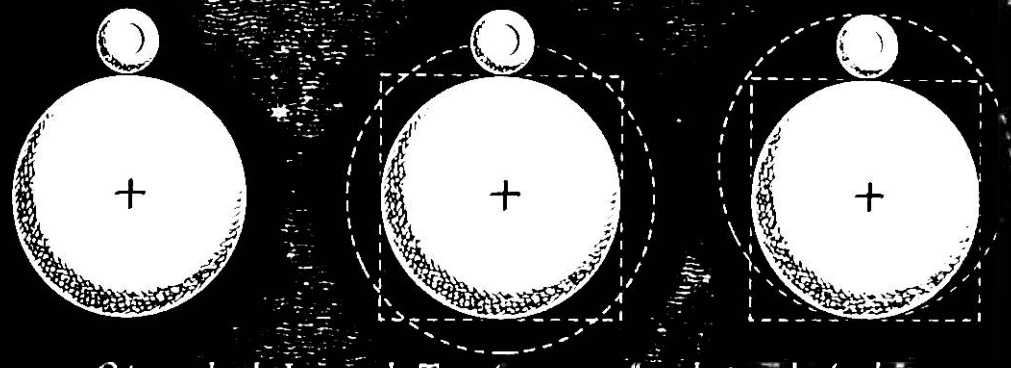








A Lua, um eclipse solar total e o Sol, como vistos da Terra.



O tamanho da Lua e o da Terra fornecem a "quadratura do círculo". O quadrado e o círculo tracejados têm o mesmo comprimento.

MILHAS DA LUA E DA TERRA

Raio da Lua = 1.080 milhas = 3 x 360 milhas

Raio da Terra = 3.960 milhas = 11 x 360 milhas

Diâmetro da Lua = 2.160 milhas = 3 x 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 milhas

Raio da Terra + raio da Lua = 5.040 milhas
= 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 = 7 x 8 x 9 x 10 milhas

Diâmetro da Terra = 7.920 milhas = 8 x 9 x 10 x 11 milhas

Existem 5.280 pés em uma milha
= (10 x 11 x 12 x 13) - (9 x 10 x 11 x 12)

A MAGIA DO CALENDÁRIO

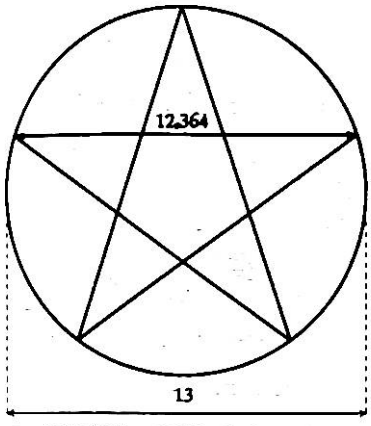
Apenas três números realizam o truque

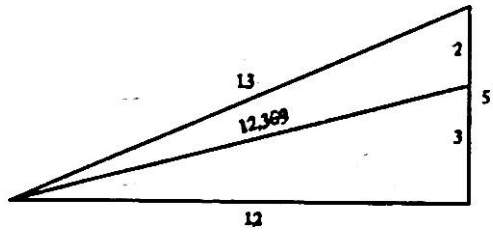
Um trabalho recente de Robin Heath revelou ferramentas geométricas e matemáticas simples que sugerem ordem e forma dentro do sistema Sol-Lua-Terra. Imagine que queiramos descobrir o número de luas cheias em um ano (algo entre doze e treze). Desenhe um círculo, de diâmetro igual a treze, com um pentagrama dentro dele. Os braços do pentagrama medirão, então, 12,364, que é o número de luas cheias em um ano (99,95%).

Uma forma ainda mais precisa de fazer isso é desenhar o segundo triângulo de Pitágoras, que é justamente formado por lados de tamanhos 5, 12 e 13 – novamente, os números do teclado e de Vênus (*página* 322). Dividir o lado de tamanho 5 em sua proporção harmônica 2:3 gera um novo comprimento, a raiz quadrada de 153, que é 12,369, ou seja, o número de luas cheias em um ano (99,999%).

A Lua parece acenar-nos para procurar mais. Todos nós sabemos que seis círculos cabem ao redor de um, em uma superfície plana (6 e 7). Doze esferas envolvem com perfeição uma décima terceira, em nosso familiar espaço tridimensional (12 e 13 de novo). Parece que estamos nos movendo em grupos de seis. Seria possível que *dezoito* esferas de tempo coubessem ao redor de uma, em uma quarta dimensão de tempo? Inacreditavelmente, todos os principais ciclos de tempo atuais, do sistema Sol-Lua-Terra, vieram a ser precisamente definidos como combinações simples dos números 18, 19 e da proporção áurea.

A proporção áurea é evidente no pentagrama, no icosaedro, no dodecaedro e em todas as coisas vivas. As órbitas de todos os quatro planetas internos mostram a sua presença. Seus valores – 0,618, 1, 1,618 e 2,618 –, adicionados ao mágico número 18, produzem 18, 18,618, 19, 19,618 e 20,618, os quais se multiplicam uns pelos outros, como apresentado ao lado.





Duas técnicas antigas para encontrar o número de luas cheias em um ano

18 ANOS = O CICLO DE ECLIPSE SAROS (99,83%)
(Eclipses similares ocorrerão após 18 anos.)

18,618 ANOS = REVOLUÇÃO DOS NODOS LUNARES (99,99%)
(Os nodos lunares são os dois lugares onde se cruzam os círculos ligeiramente deslocados das órbitas do Sol e da Lua.)

19 ANOS = O CICLO METÔNICO (99,99%)
(Se houver uma lua cheia em seu aniversário este ano, haverá outra em seu aniversário daqui a 19 anos.)

O ANO DE ECLIPSE = 18,618 X 18,618 DIAS (99,99%)
(O Ano de Eclipse é o tempo que leva para o Sol retornar à mesma posição dos nodos lunares. Tem menos 18,618 dias que um ano solar [99,99%]. Há 19 anos de eclipse em um Saros.)

12 LUAS CHEIAS = 18,618 X 19 DIAS (99,82%)
(12 luas cheias são o ano lunar ou islâmico.)

O ANO SOLAR = 18,618 X 19,618 DIAS (99,99%)
(O ano solar é o ano de 365,242 dias a que estamos acostumados.)

13 LUAS CHEIAS = 18,618 X 20,618 DIAS (99,99%)
(13 luas cheias são mais 18,618 dias após o ano solar.)

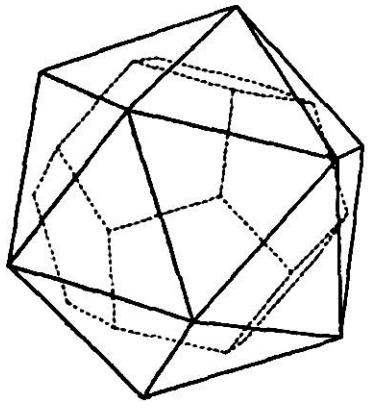
FUTEBOL CÓSMICO

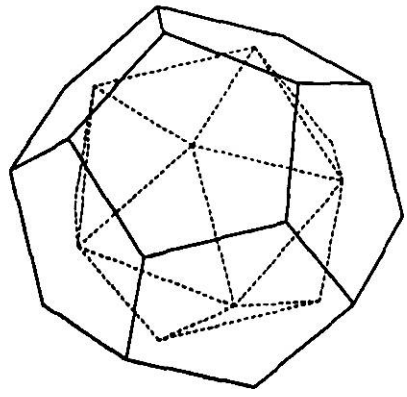
Marte, Terra e Vênus espaçados

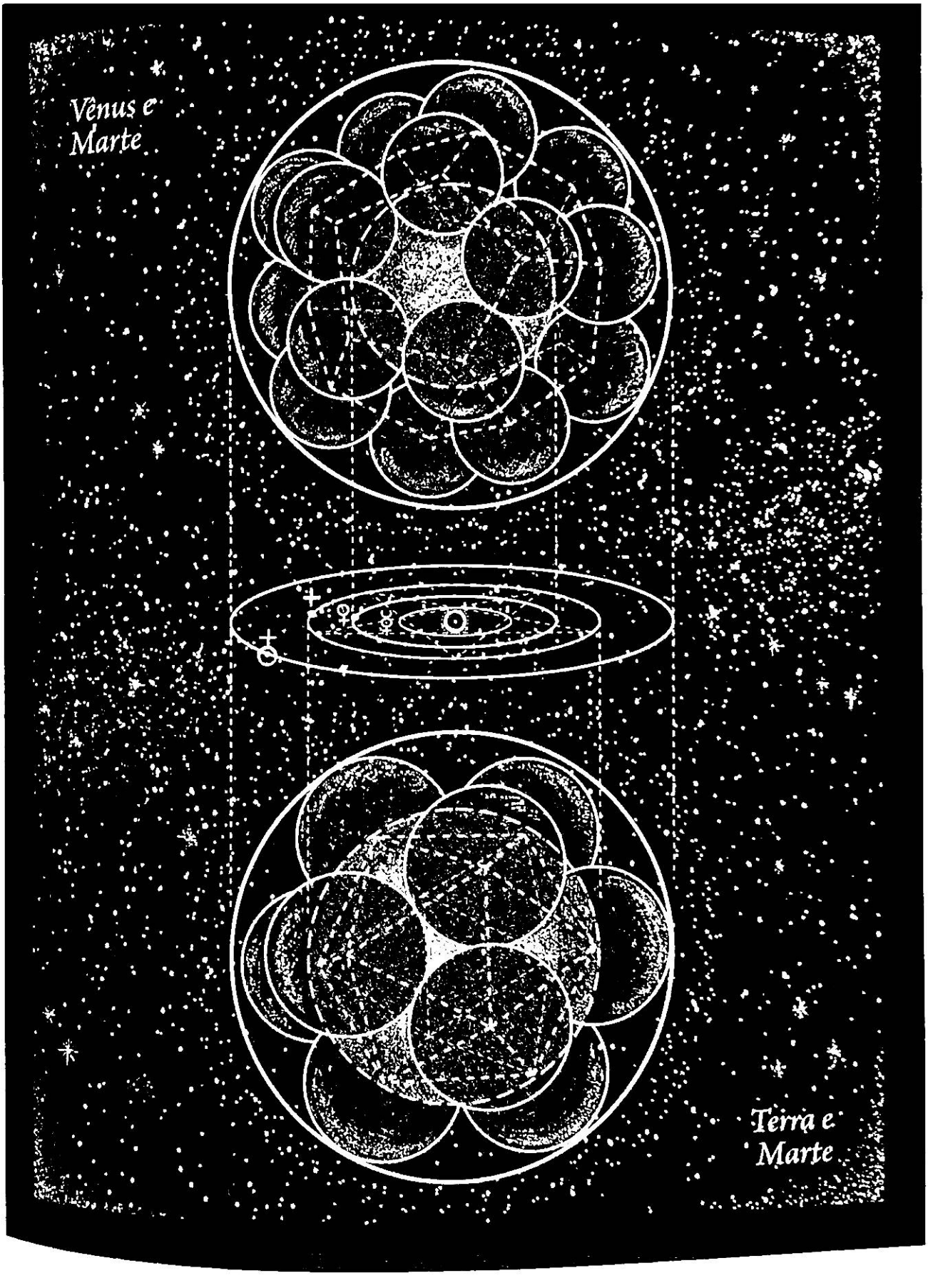
O próximo planeta depois da Terra é Marte, o quarto planeta. Kepler tentou usar um *dodecaedro* para espaçar as órbitas de Marte e da Terra, e um *icosaedro* para espaçar a Terra de Vênus (*ver página 308*). Coincidentemente, ele estava muito perto de acertar.

O dodecaedro (composto de doze pentágonos) e o icosaedro (composto de vinte triângulos equiláteros) são os dois últimos dos cinco sólidos platônicos (*veja o Livro III deste volume*). Eles formam um par, uma vez que cada um cria o outro a partir dos centros de suas faces (*figuras abaixo*). Na imagem ao lado, eles aparecem em forma de bolha dentro da órbita esférica média de Marte. O dodecaedro produz, quase que por encanto, as órbitas de Vênus através da bolha interna (*imagem ao lado, figura superior*) (99,98%), enquanto o icosaedro define a órbita da Terra através dos centros de suas bolhas (*imagem ao lado, figura inferior*) (99,9%).

Nas ciências antigas, o icosaedro era associado com o elemento *água*, e por isso é apropriado vê-lo emanar de nosso planeta aquoso. O dodecaedro representava o *éter*, a força da vida, aqui envolvendo a Terra viva, definida por seus dois vizinhos.






Vênus e
Marte
Terra e
Marte

O CINTURÃO DE ASTEROIDES

Através do espelho

Alcançamos o fim do sistema solar interno. Além de Marte, encontra-se um espaço particularmente grande e, do outro lado, o enorme planeta Júpiter. É nesse espaço que o Cinturão de Asteroides se encontra, com milhares de pequenas e grandes rochas rolando ao redor do Sol, compostas de sílica, metálicas, carbonosas e outras. Nesse cinturão, há espaços que permanecem livres, as *Lacunas de Kirkwood*, onde ocorrem as ressonâncias orbitais com Júpiter. A maior lacuna está na distância orbital, o que corresponderia a um terço do período de Júpiter.

De longe, o maior dos asteroides é Ceres, compreendendo mais de um terço da massa total de todos os demais. Tem aproximadamente o tamanho das Ilhas Britânicas, e produz um perfeito padrão de dezoito laços com a Terra (*veja a página 409*).

A Lei de Titius-Bode previu algo à distância do cinturão de asteroides (*veja a página 314*), mas foi Alex Geddes que recentemente descobriu a estranha relação matemática entre os quatro pequenos planetas internos e os quatro gigantes gasosos externos. Seus raios orbitais magicamente "refletem" sobre o cinturão de asteroides e multiplicam-se, como mostrado abaixo e ao lado, para produzir duas constantes enigmáticas.

Vênus x Urano = 1,204 Mercúrio x Netuno

Mercúrio x Netuno = 1,208 Terra x Saturno

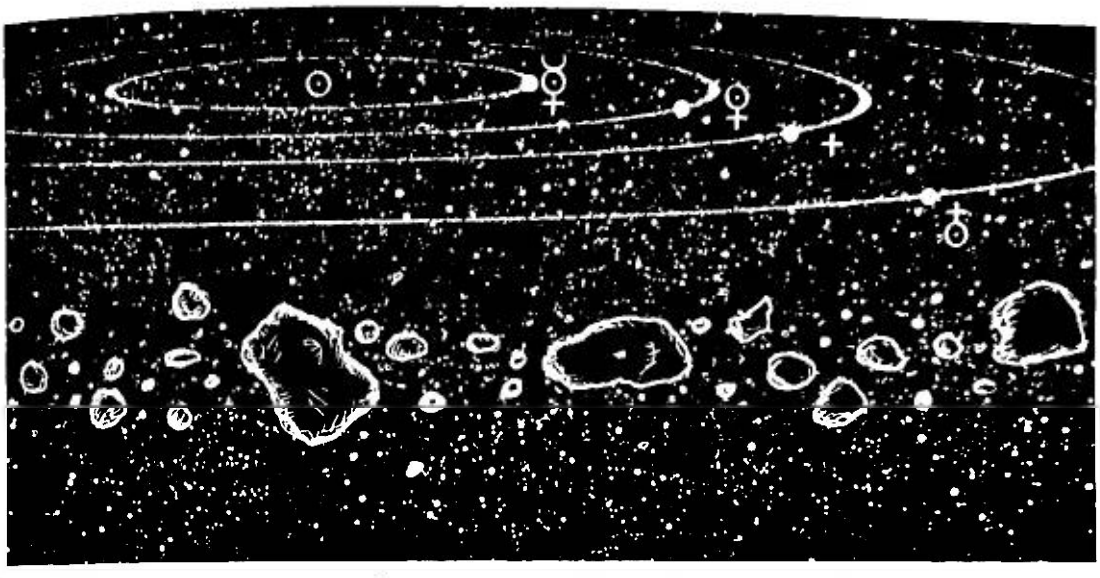
Terra x Saturno = 1,206 Marte x Júpiter

Vênus x Marte = 2,872 Mercúrio x Terra

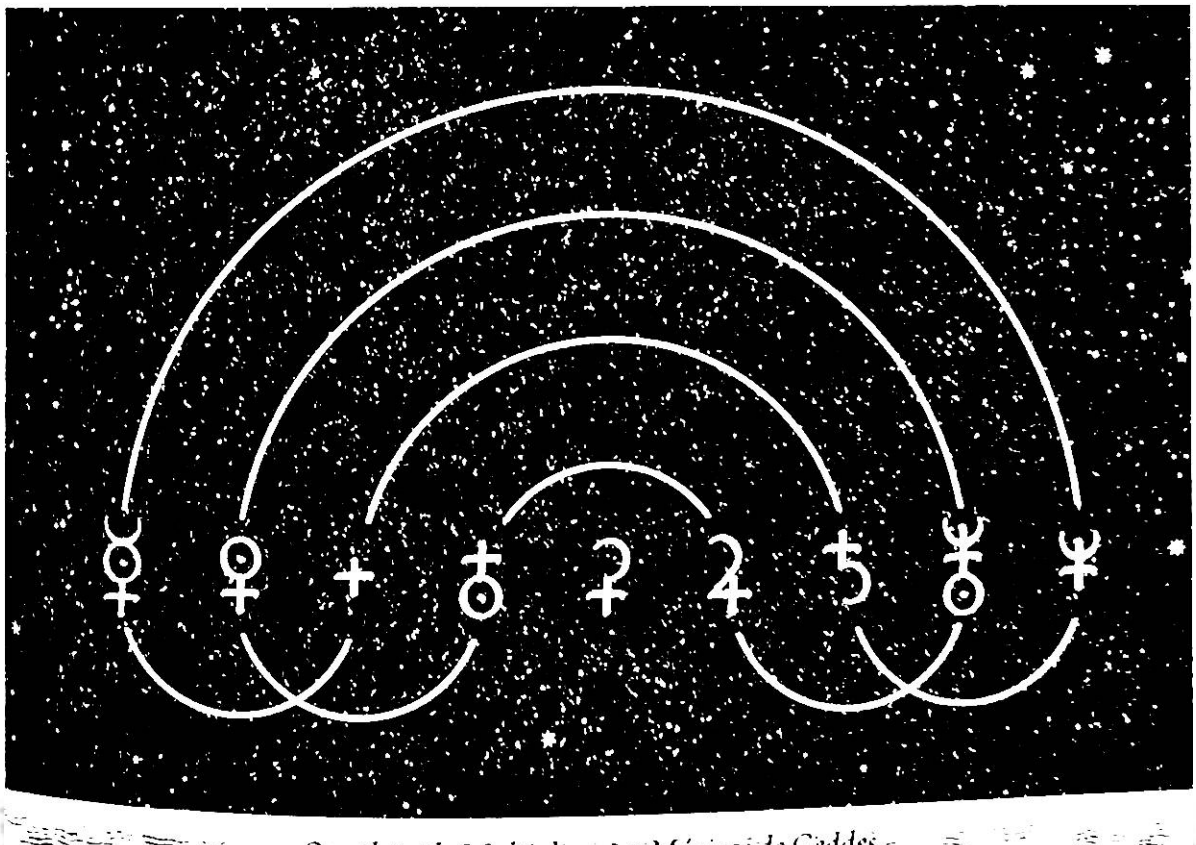
Saturno x Netuno = 2,876 Júpiter x Urano

(Vênus x Marte x Júpiter x Urano = Mercúrio x Terra x Saturno x Netuno)

É improvável que o cinturão de asteroides seja formado por restos de um planeta pequeno, já que nenhum corpo de tamanho considerável poderia ter sido formado tão próximo a Júpiter.



O cinturão de asteroides separa os quatro pequenos planetas rochosos internos dos quatro grandes externos.



O padrão de Multiplicações Mágicas de Geddes.

OS PLANETAS EXTERNOS

Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e além

Além do cinturão de asteroides, chegamos ao reino dos gigantes de gás e gelo: Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

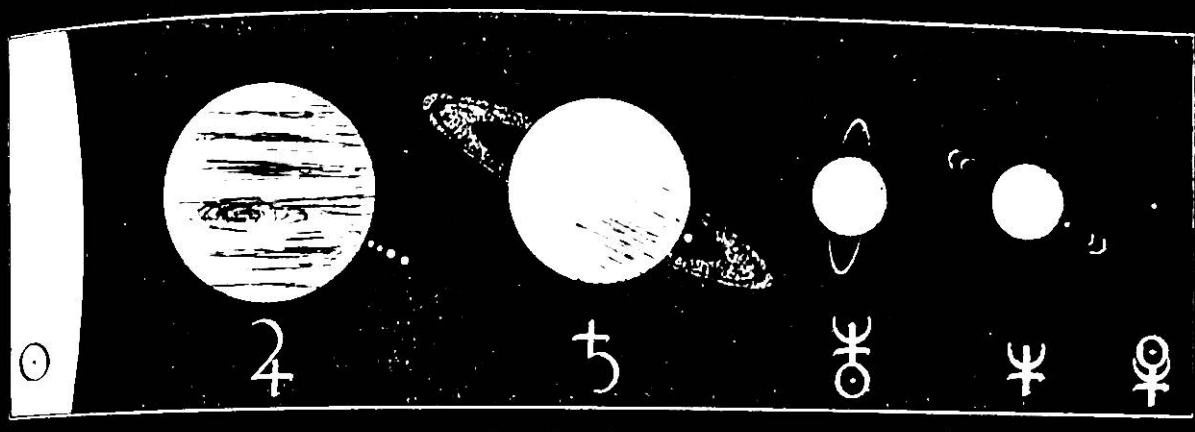
Júpiter é o maior planeta, e seu campo magnético é o maior objeto no sistema solar. Noventa por cento são de hidrogênio, mas ele é construído em torno de um núcleo rochoso, como todos os planetas gigantes. Hidrogênio metálico e, em seguida, hidrogênio líquido rodeiam esse núcleo. A famosa Mancha Vermelha é uma tempestade, maior que a Terra, que se tem intensificado por centenas de anos. As luas de Júpiter são numerosas e fascinantes: uma delas, Io, é o corpo mais vulcânico no sistema solar; a outra, Europa, pode ter oceanos de água quente por baixo de sua superfície gelada.

O planeta seguinte é Saturno, com seu belo sistema de anéis. A estrutura de Saturno, abaixo de suas nuvens, é praticamente a mesma mistura de hidrogênio e hélio que constitui Júpiter. Foi descoberto um grande número de luas, sendo Titã a maior delas: um mundo do tamanho de Mercúrio, com todos os elementos essenciais à formação da vida.

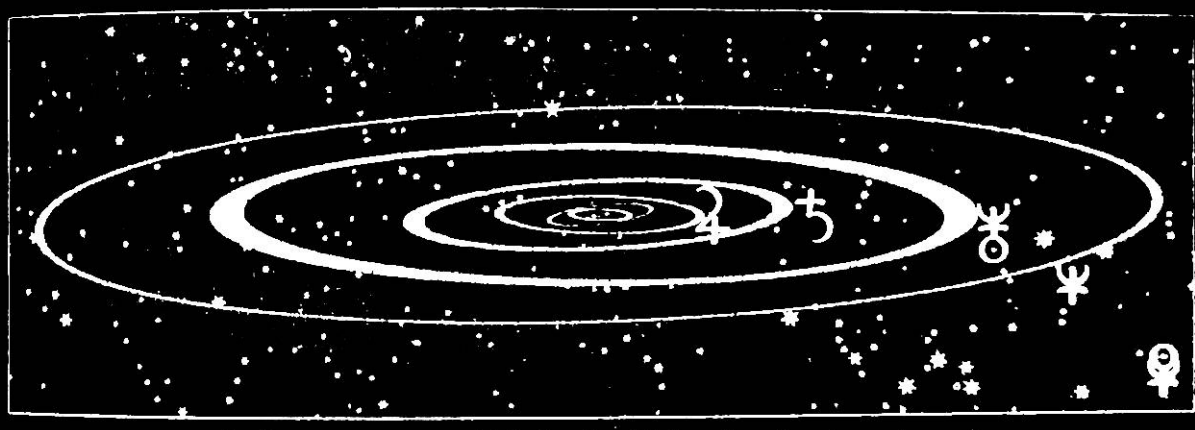
Para além de Saturno está Urano, que orbita ao seu lado. Lá, rajadas de vento passam sobre o equador a uma velocidade de 6 mil vezes a velocidade do som.

A seguir vem Netuno, que, como Urano, é um mundo gelado de água, amônia e metano. Sua maior lua, Tritão, tem calotas de gelo de nitrogênio e gêiseres que expelem nitrogênio líquido, em alto grau, na atmosfera.

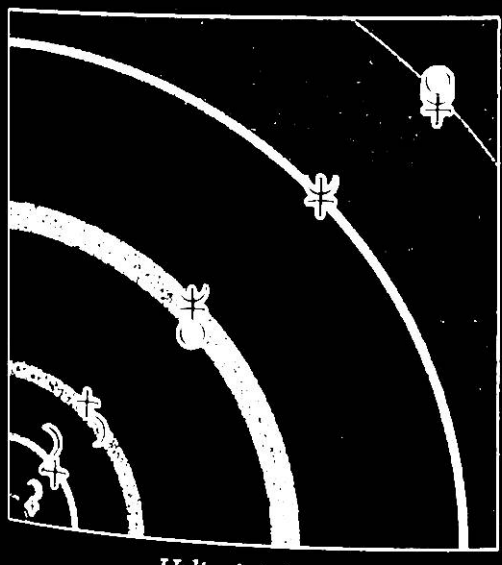
Finalmente, o pequeno Plutão e, para além dele, o enxame primordial do Cinturão de Kuiper. Então, estendendo-se a um terço do caminho para a estrela mais próxima, encontra-se a esfera de detritos gelados e cometas da Nuvem de Oort.



Tamanhos dos planetas externos



Inclinações e excentricidades das órbitas dos planetas externos



Heliocêntrico

Vista a partir da Terra

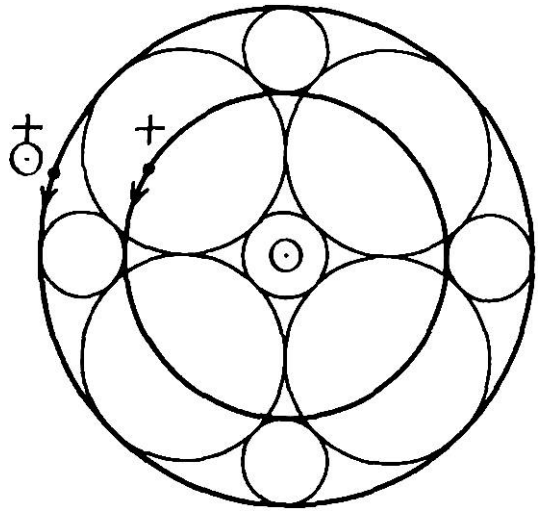
QUATRO

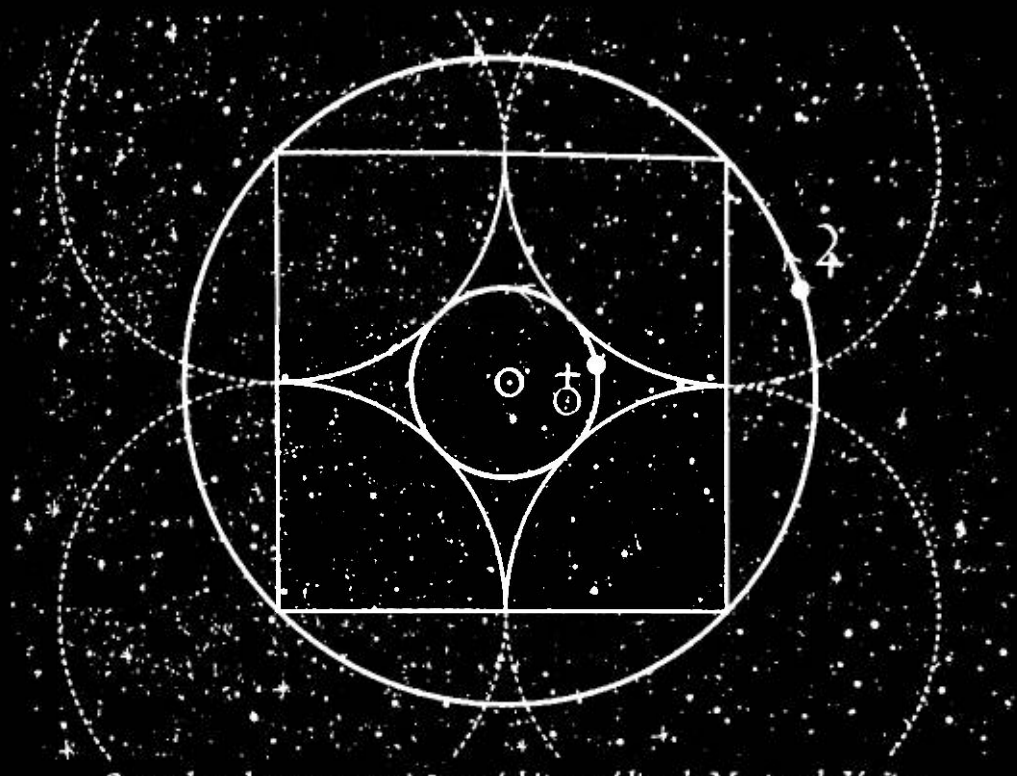
Marte, Júpiter e luas enormes

Um cinturão de asteroides e 550 milhões de quilômetros separam as órbitas de Marte e de Júpiter, mais distantes do que a Terra está do Sol. Júpiter é o primeiro e o maior dos gigantes de gás, o aspirador de pó do sistema solar. Se ele tivesse reunido somente um pouco mais de material, durante a sua longa e contínua formação, suas pressões internas teriam-no transformado em uma estrela, e nós teriamos um segundo sol.

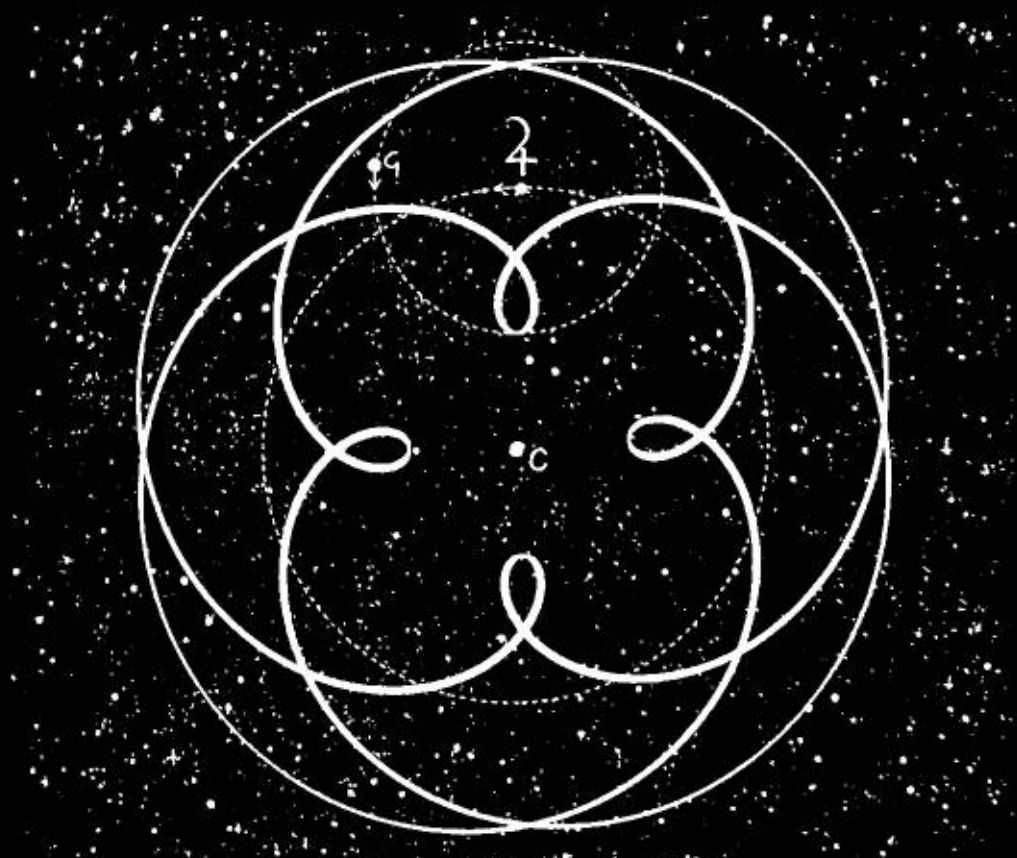
O diagrama superior, na imagem ao lado, mostra uma maneira simples de desenhar as órbitas de Marte e Júpiter, a partir de quatro círculos que se tocam ou de um quadrado (99,98%). É uma proporção comumente vista em janelas de igrejas e estações ferroviárias. Abaixo, é apresentado um padrão da mesma família, que posiciona com precisão o espaço entre as órbitas da Terra e de Marte (99,9%).

Júpiter tem quatro luas particularmente grandes. As duas maiores, Ganímedes e Calisto, são do tamanho do planeta Mercúrio e produzem um dos padrões de espaço-tempo mais perfeitos do sistema solar. Um observador que vivesse em qualquer dessas duas luas experimentaria os movimentos da outra, no espaço e no tempo, como o belo diagrama de quatro laços apresentado ao lado.





Como desenhar com precisão as órbitas médias de Marte e de Júpiter



A bela dança de Ganímedes e Cálisto

LUAS EXTERNAS

Padrões harmônicos

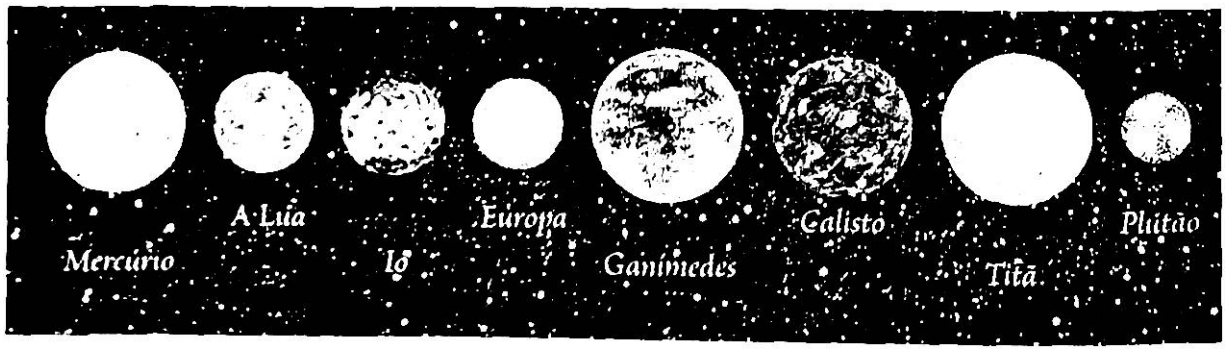
Quatro grupos de luas orbitam Júpiter. Os dois primeiros grupos têm quatro luas cada um e, juntos, parecem-se muito com um modelo de todo o sistema solar: quatro corpos internos pequenos, seguidos por quatro grandes corpos externos. O segundo grupo, de quatro luas particularmente grandes, as *Galileanas*,[10] é ainda dividido em dois pequenos mundos rochosos, Io e Europa, e duas luas de gás e gelo do tamanho de planetas, Ganímedes e Calisto.

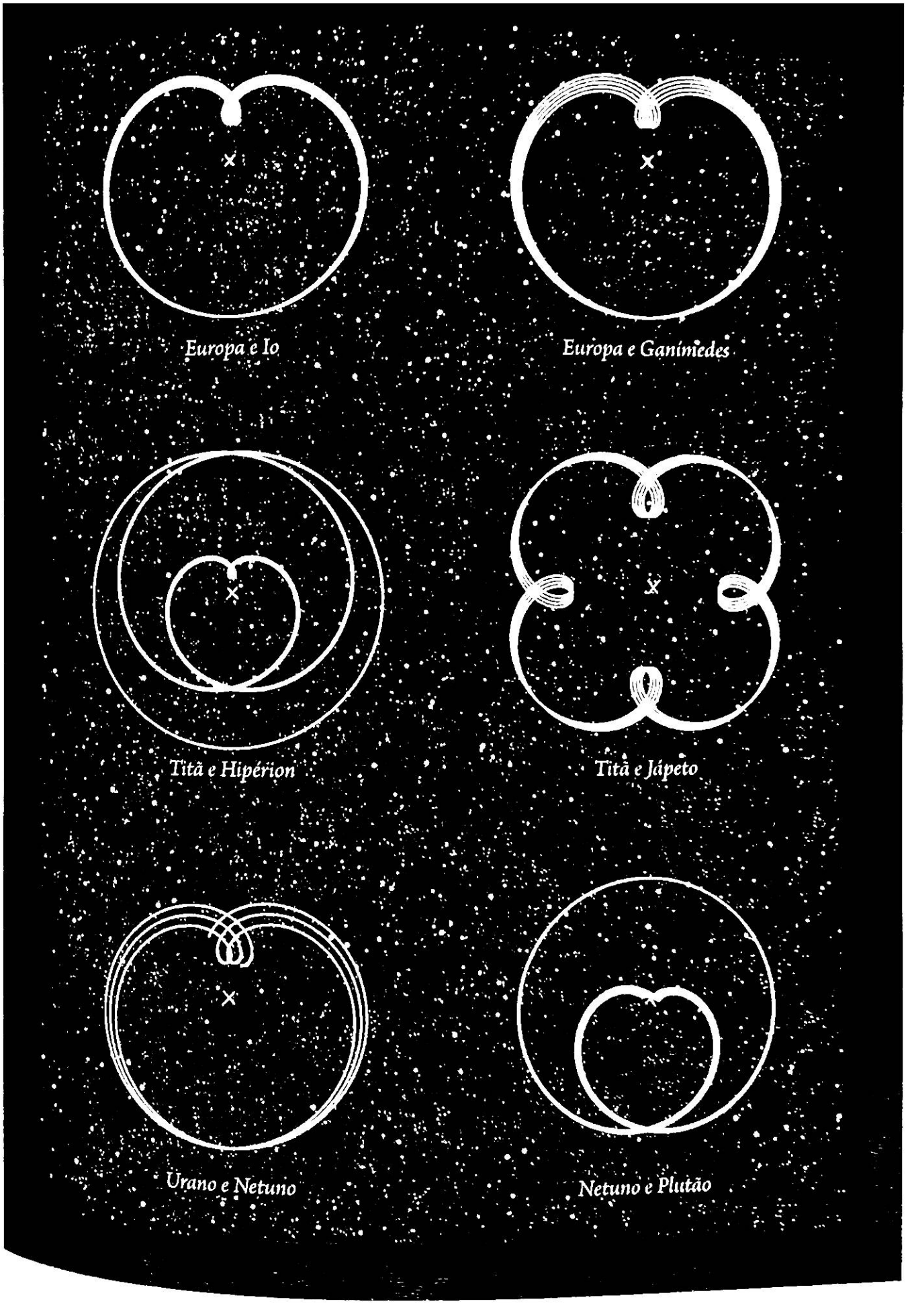
O agrupamento quádruplo é impressionante. Cada um dos quatro grupos tem o seu próprio tamanho geral de lua, seu plano orbital, período e distância a partir de Júpiter (e até a soma das inclinações dos quatro planos orbitais dos quatro grupos resulta em 90°, ou seja, um quarto de círculo [99,9%]).

Saturno tem mais de trinta luas, a maioria delas pastoreando[11] e ajustando os incríveis anéis aos corpos maiores, que tendem a estar mais para fora. Muito além dos anéis de Saturno, no entanto, encontram-se três luas: a gigante Titã,[12] a minúscula Hipérion e, ainda mais longe, Jápeto.

Na imagem ao lado são apresentados alguns padrões harmônicos: dois experimentados pelas maiores luas de Júpiter, dois experimentados por Titã, a gigante lua de Saturno, e dois experimentados por Netuno, o planeta externo do sistema solar.

As discordâncias são raras. O sistema solar parece apreciar a harmonia.




Europa e Io
Europa e Ganímedes
Titã e Hipérion
Titã e Jápeto
Urano e Netuno
Netuno e Plutão

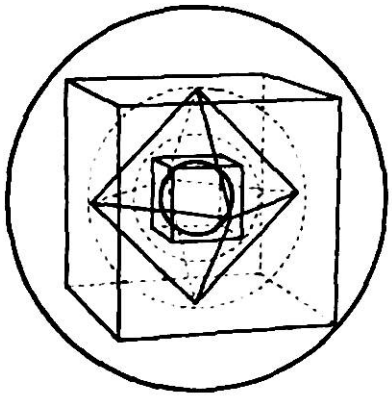
O SELO GIGANTE DE JÚPITER

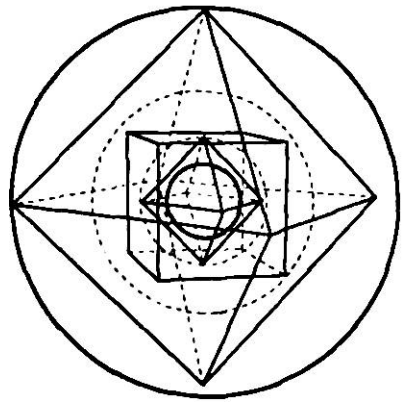
Hexagramas imensos e asteroides assertivos

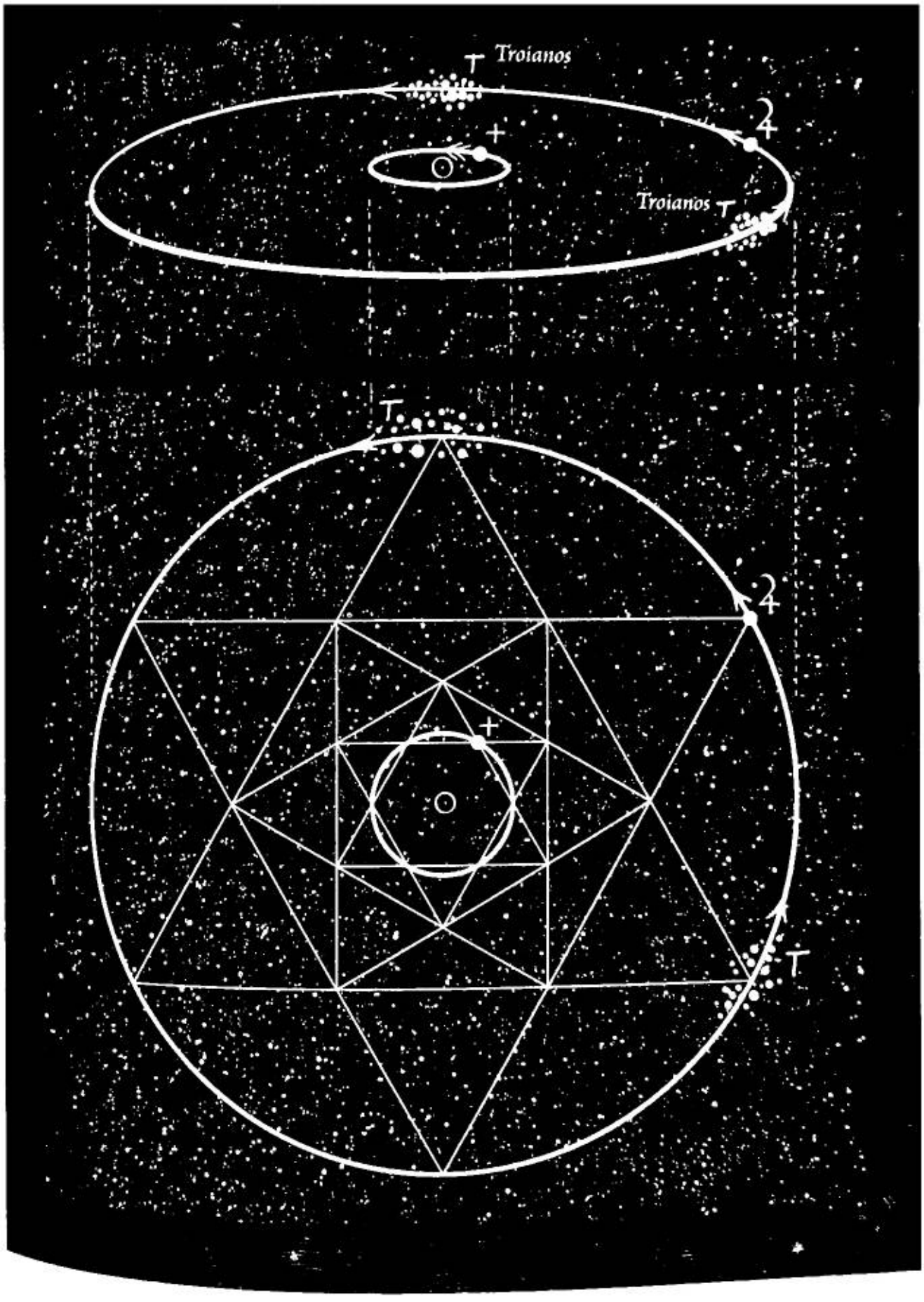
Júpiter, o maior dos planetas, era o rei dos deuses antigos, Zeus para os gregos. Uma característica encantadora de sua órbita é seu par de agrupamentos de asteroides. *Os Troianos* são dois grupos de asteroides que se movem ao redor da órbita de Júpiter, 60° à frente dele e 60° atrás (*imagem ao lado*). Essa parceria move-se perpetuamente em torno do Sol, como se mantida no lugar pelos raios de uma roda. As posições dos agrupamentos Troianos são conhecidas como *Pontos de Laplace*, com o Sol, Júpiter e os próprios Troianos formando triângulos equiláteros equilibrados de modo gravitacional.

Apenas por diversão, se juntarmos agora os raios, como indicado na imagem ao lado, então três hexagramas podem ser vistos produzindo a órbita média da Terra a partir de Júpiter (99,8%) – um truque muito fácil de lembrar. Desse modo, a Terra e as órbitas de Júpiter estão à espreita em cada cristal. Outro nome para uma estrela de seis pontas, feita de dois triângulos, é *Estrela de Davi* ou *Selo de Salomão*.

Exatamente a mesma proporção entre Terra e Júpiter pode ser recriada por três cubos, três octaedros ou qualquer combinação tripla desses dois sólidos, quando são esfericamente encaixados um dentro do outro (*exemplos abaixo*). Se a esfera externa é a órbita média de Júpiter, então a esfera interna é a órbita média da Terra. Caramba!






Troianos
Troianos

O RELÓGIO DE OURO

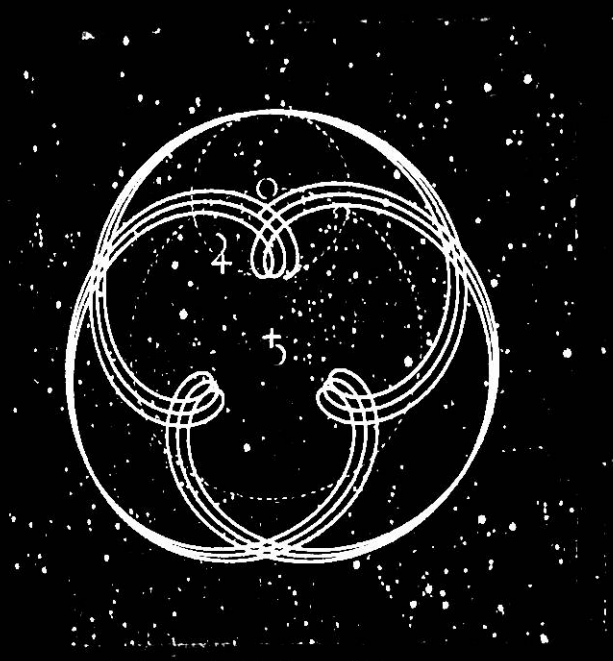
Júpiter e Saturno vistos da Terra

Júpiter e Saturno são os dois maiores planetas do sistema solar e governavam as duas esferas externas do sistema antigo. Na mitologia antiga, Saturno era Cronos, o Senhor do Tempo.

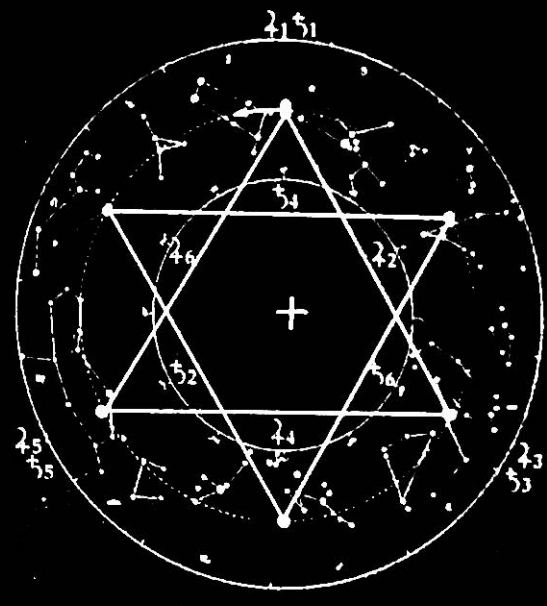
Os dois diagramas superiores, na imagem ao lado, mostram a estreita relação de 5:2 de seus períodos. À esquerda, vemos sua dança, com o belo harmônico tríplice imediatamente aparente, girando lentamente devido à pequena falha na harmonia. A partir da Terra, esse padrão é visto como uma sequência importante de conjunções e oposições entre Júpiter e Saturno, que se beijam a cada vinte anos. À direita, vemos o hexagrama criado por essas posições, com as conjunções marcadas do lado de fora do zodíaco e as oposições marcadas do lado de dentro. Os planetas movem-se em sentido anti-horário ao redor do círculo tracejado da eclíptica, começando às doze horas, com Júpiter movendo-se mais rápido que Saturno.

O diagrama inferior mostra as velocidades relativas das órbitas da Terra, de Júpiter e de Saturno. Começamos com os três planetas em uma linha sinódica às doze horas. A Terra orbita muito mais rápido que os planetas exteriores; dá uma volta completa em torno do Sol (365,242 dias) e, então, vai um pouco mais além, antes de se alinhar novamente com o molengão Saturno por um sínodo, após 378,1 dias. Três semanas depois, alinha-se novamente com Júpiter (após 398,9 dias). Recentemente, Richard Heath descobriu que a proporção áurea se define aqui, no tempo e no espaço, com uma precisão *impressionante* de 99,99%! Assim, os dois gigantes de nosso sistema solar exibem, no espaço e no tempo, a proporção áurea que existe em nós, reforçando a geometria da vida na Terra.

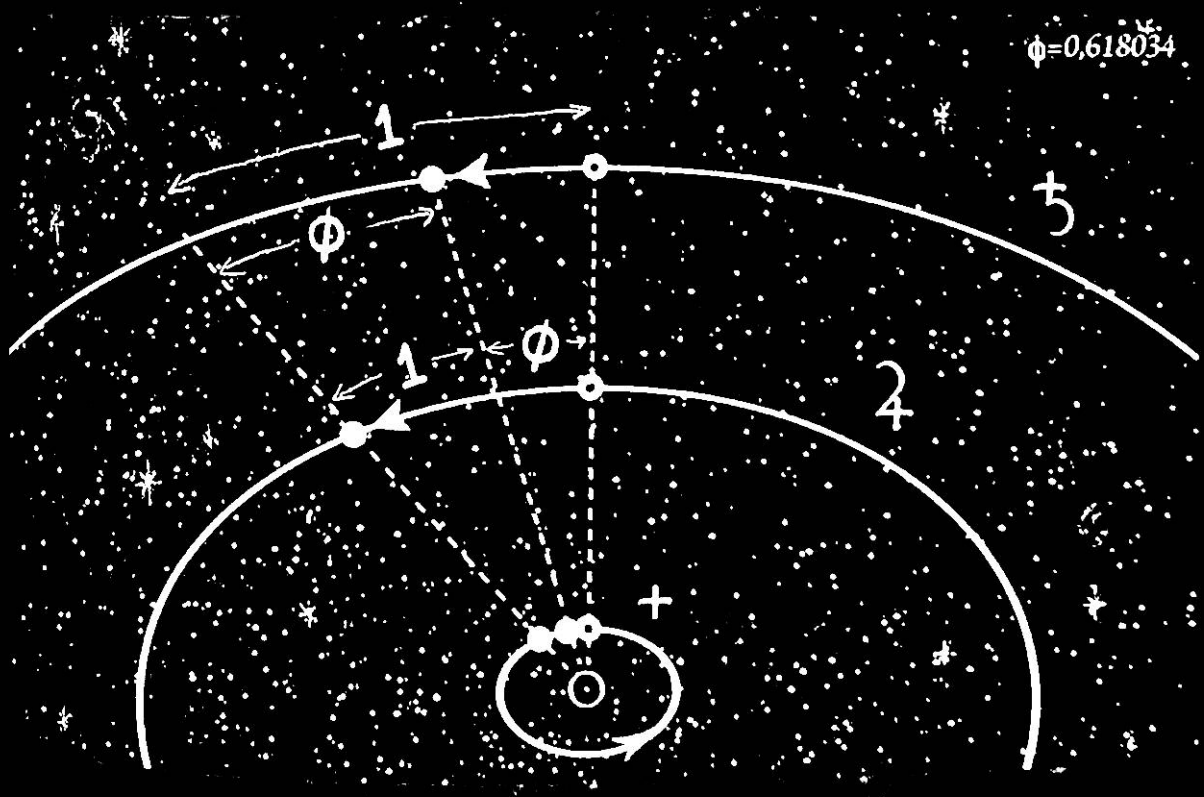
Um fato menos importante é que o mesmo *número* de anos que Saturno leva para dar uma volta em torno do Sol equivale ao número de dias entre as luas cheias (99,8%).



A dança de Júpiter e Saturno



Conjunções e oposições



Os sínodos de Júpiter e Saturno definem a proporção áurea

OITAVAS LÁ FORA

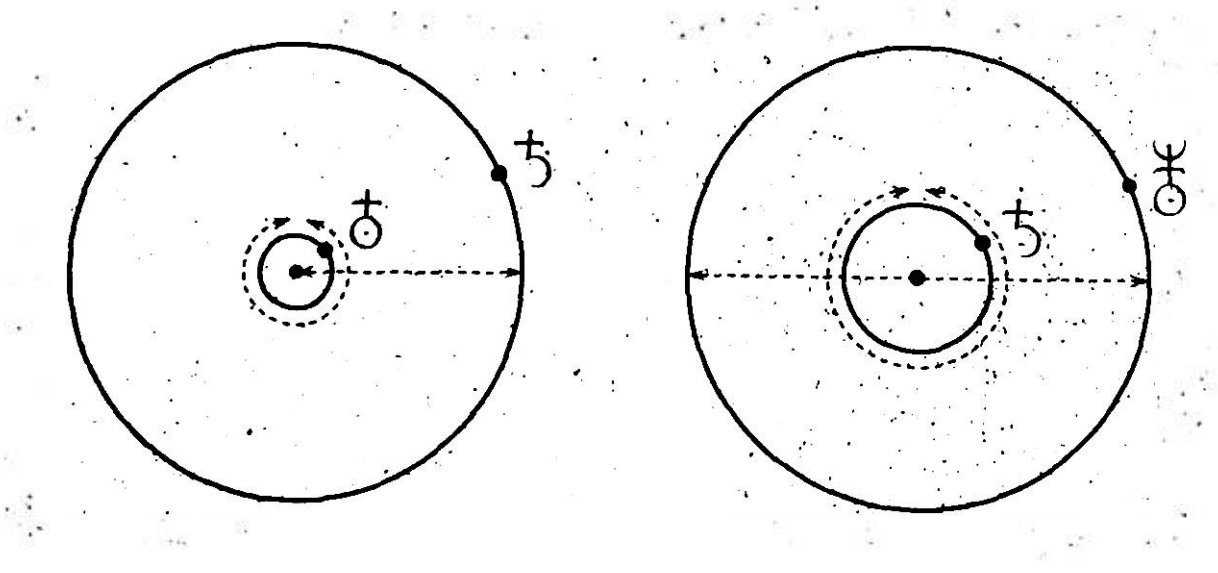
Três e oito novamente

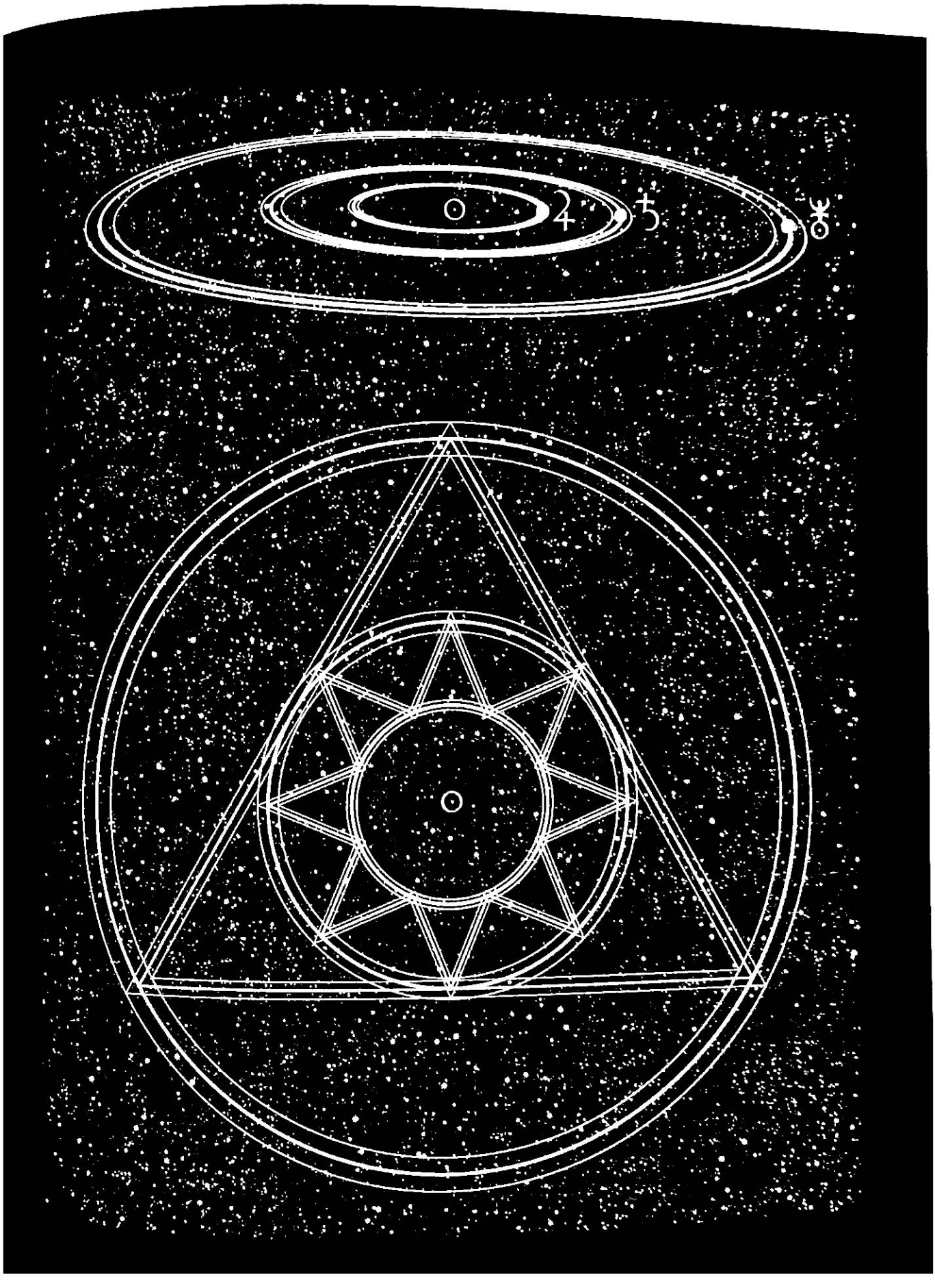
Se você quiser incorporar, em algum momento, Júpiter, Saturno e as órbitas de Urano a um projeto de janela ou de piso, o diagrama ao lado pode ajudar. Um triângulo equilátero e um octograma tornam proporcionais as órbitas exterior, média e interna dos três maiores planetas. Algumas imprecisões minúsculas são visíveis, mas o ajuste é excelente, de forma geral, memorável e adequado para muitas finalidades práticas. É uma inversão pontiaguda da solução, com círculos que se tocam, apresentada para os três primeiros planetas (*ver página* 327, *canto inferior direito*).

Uma maneira de representar a oitava musical (uma redução pela metade, ou uma duplicação da frequência ou comprimento de onda) é mediante um triângulo equilátero, uma vez que o círculo inscrito no triângulo tem metade do diâmetro do círculo que o contém.

Outra regra prática é lembrar que, se a órbita de Júpiter é 6, então a de Saturno é 11 (99,9%), duas vezes a relação de tamanho Lua:Terra (*página* 328).

A órbita de Saturno também invoca π ou "*pi*" – duas vezes (*abaixo*): seu raio é a circunferência da órbita de Marte (99,9%), e sua circunferência é o diâmetro da órbita de Netuno (99,9%).



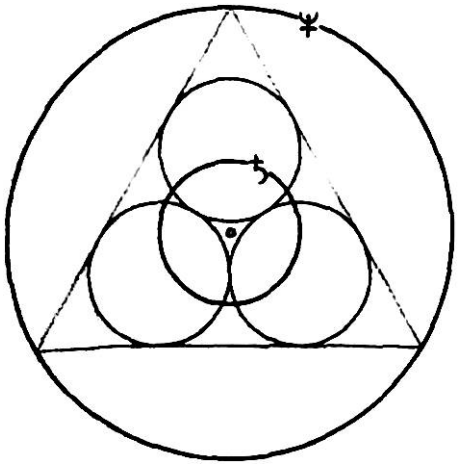


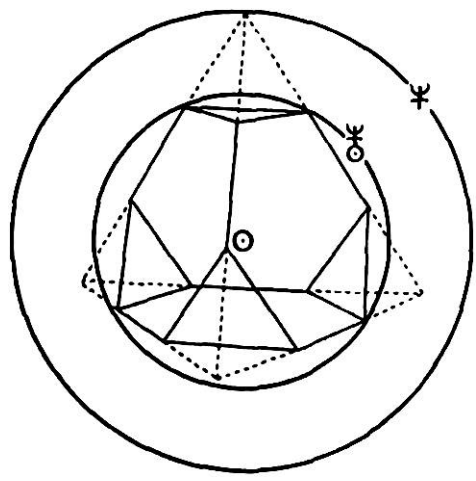
GEOMETRIA GALÁCTICA

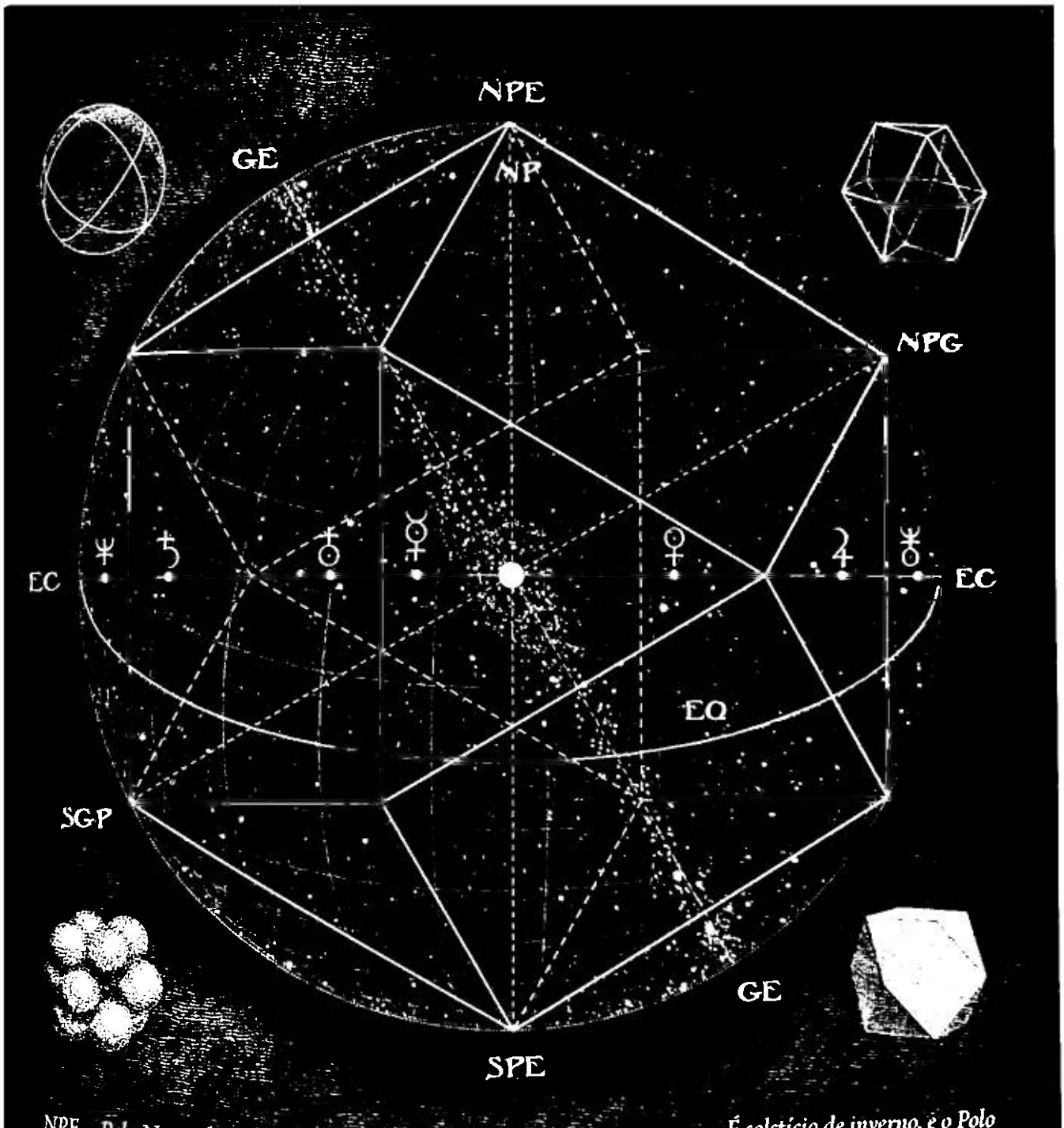
Em direção às estrelas e mais além

À medida que avançamos no espaço, as geometrias triangulares prevalecem (*duas são apresentadas abaixo* [99,9%]). Urano e Netuno, assim como Saturno, possuem sistemas de anéis misteriosos, com espaços livres a distâncias Kirkwood, onde as partículas orbitam em períodos harmônicos com uma ou mais luas. O brilhante anel exterior de Urano tem um diâmetro duas vezes maior do que o do próprio Urano (99,9%), ecoando as órbitas de Urano e Saturno; e o anel mais íntimo de Netuno é dois terços do tamanho de seu anel mais afastado (99,9%). Essas proporções invocam, de forma bela, o tempo local, já que o período orbital de Netuno é o dobro do período de Urano, e o de Urano é dois terços do de Plutão – um reflexo externo da proporção harmônica interna 1:2:3 que vimos com Mercúrio.

Uma das simetrias mais óbvias da cosmologia moderna ocorre no fato de que a Via Láctea – ou seja, o plano de nossa galáxia – está inclinada a quase exatamente 60° para a eclíptica ou plano de nosso sistema solar (*indicado na horizontal, imagem ao lado*) (99,7%). E mais: todo ano o Sol cruza a galáxia através de seu centro. Estar vivo nesses períodos significa que isso acontece no solstício de inverno. Como muitas das imagens nestas páginas, você pode precisar estudar sobre isso para entender!







NPE – Polo Norte da Eclíptica (PNE)
GE – Equador Galáctico (EG)
NP – Polo Norte da Terra (PN)
NPG – Polo Norte de nossa Galáxia (PNG)
EC – Eclíptica, Caminho do Sol
EQ – Equador da Terra
SGP – Polo Sul de nossa Galáxia (PSG)
SPE – Polo Sul da Eclíptica (PSE)

É solstício de inverno, e o Polo Norte da Terra é inclinado para longe do Sol, que está bem na frente do centro de nossa galáxia. Os polos da eclíptica e da galáxia definem quatro pontos de um hexágono no espaço que nos rodeia.

HALOS DE GELO

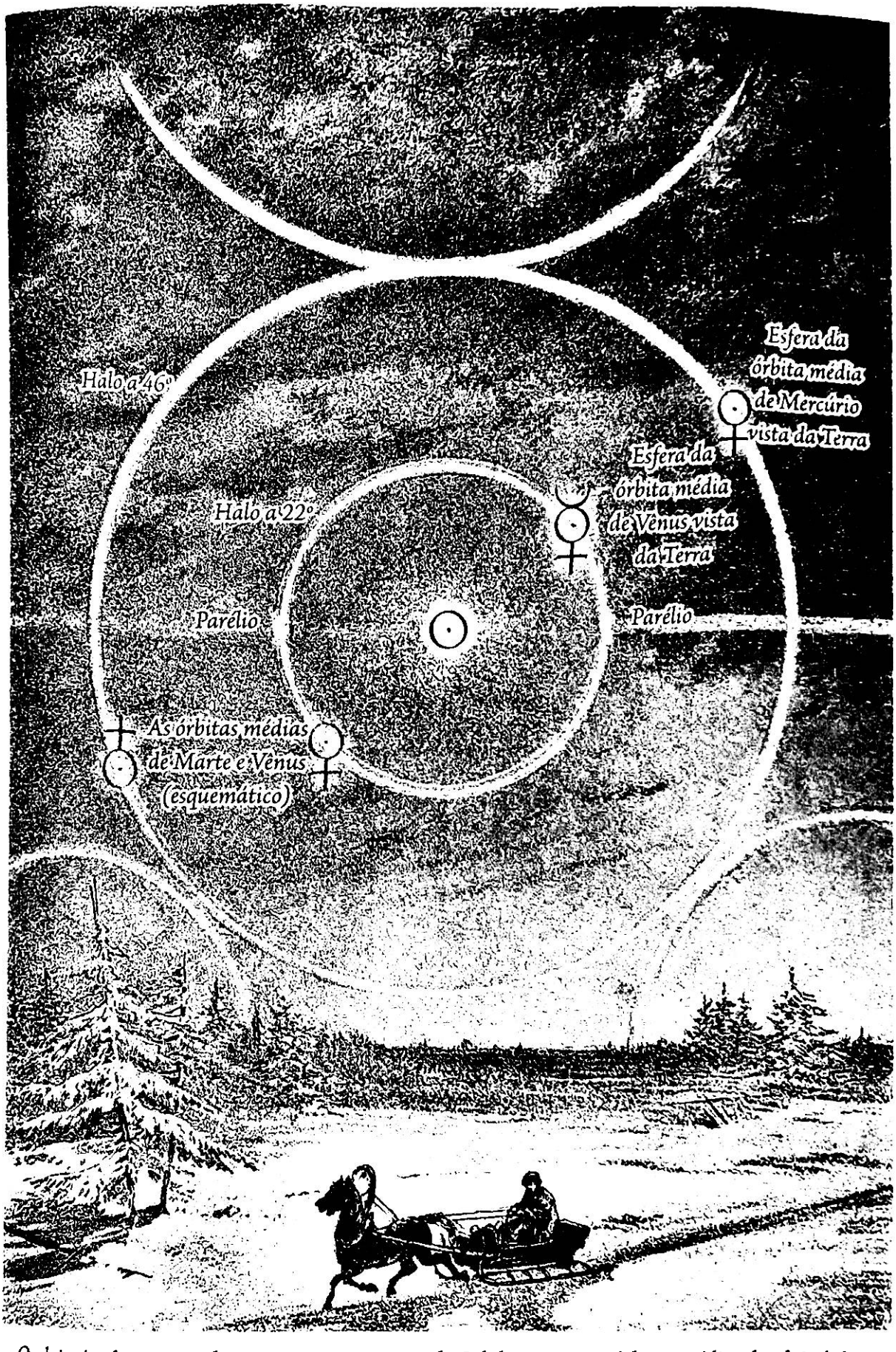
Arco-íris onde os planetas se encontram

Em certas tardes tranquilas, se você tiver sorte, verá um par de manchas de arco-íris à esquerda e à direita do Sol. Conhecidos como "parélios", são os primeiros elementos a aparecer a partir de um halo de gelo – um fino círculo de arco-íris ao redor do Sol. Provocados pela passagem da luz através de cristais de gelo, na parte mais elevada da atmosfera, os parélios aparecem a 22,5° à esquerda e à direita do Sol, logo depois do halo brilhante que fica a 22°. Algumas vezes, um segundo halo maior aparece a 46° do Sol, com um inconfundível arco em cima, e todo o arranjo parece estranhamente semelhante ao antigo glifo para Mercúrio.

Surpreendentemente, esses dois halos de gelo correspondem, de forma bela, às órbitas médias dos dois planetas internos, Mercúrio e Vênus, vistos da superfície da Terra. Isso significa que, quando você olha para um halo de gelo duplo, realmente está vendo as esferas das órbitas médias de Mercúrio e Vênus penduradas no céu. Lá estão elas! Os mesmos dois halos de gelo também funcionam como um diagrama das órbitas relativas de Vênus e Marte.

Essa é uma coincidência extraordinária. O que está acontecendo? Cada círculo se encaixa. A luz solar e os cristais de gelo pintam arco-íris para órbitas. O Sol e a Lua parecem do mesmo tamanho no céu. Nosso vizinho mais próximo, Vênus, dança cinco vezes ao nosso redor, durante oito anos ou treze de seus anos, enquanto, abaixo, na Terra, as plantas também dançam em combinações de 5, 8 e 13. Essas coincidências estão centradas em nós, aqui e agora, um planeta de observadores conscientes. Talvez as leis de Newton e de Einstein sejam apenas parte da resposta. A consciência também é parte da equação? Será que os observadores percebem a realidade, de algum modo, através de uma lente?

Platão escreve que as coisas são organizadas de forma mais perfeita do que podemos imaginar. *Como* você equilibra um Sol e uma Lua? Poderíamos estar vivendo, de fato, em um universo holográfico e quântico consciente?



Os dois círculos que geralmente vemos em torno do Sol descrevem as órbitas médias dos dois únicos planetas entre a Terra e o Sol. Essa coincidência incrível só funciona para os observadores na Terra, e sugere que o fato de esses halos serem observados da Terra pode ter desempenhado algum papel na ressonância holográfica quântica total do sistema solar. De acordo com Flammarion, 1885.

A ASSINATURA ESTRELADA

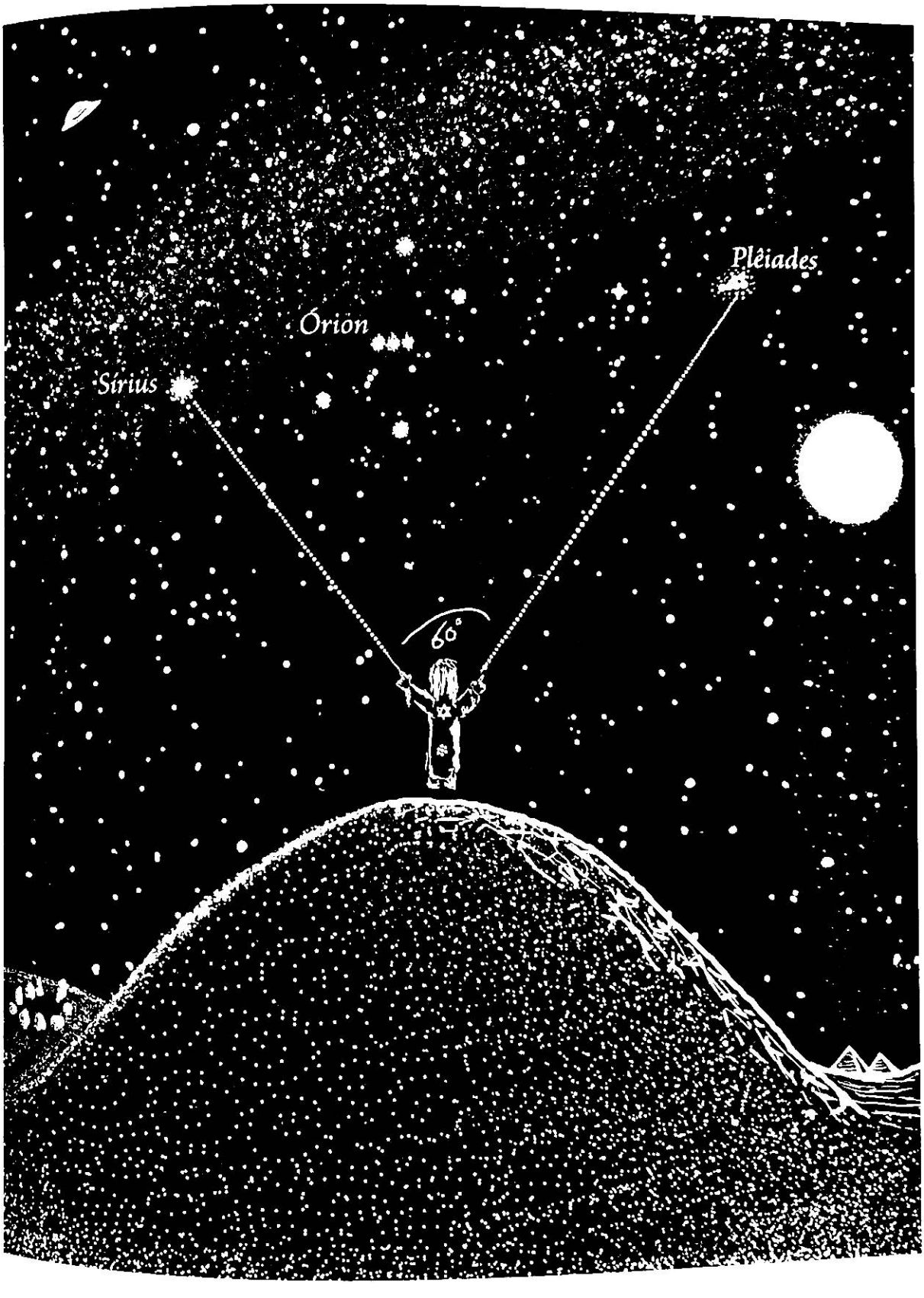
Evidência circunstancial da vida na Terra

Apesar de todas as descobertas científicas dos últimos séculos, possivelmente ainda estamos tão longe de compreender o que fazemos aqui quanto estavam os antigos de construir uma calculadora de bolso. Todavia, eles refletiram profundamente sobre a consciência e sustentaram que a alma é particularmente alimentada pelas artes aplicadas da geometria e da música. Através dessas artes, investigaram cuidadosamente a relação entre o "Uno" e os "escolhidos", pois na música há somente certo número de notas em sintonia, e na geometria há apenas algumas formas que se encaixam.

Este livro mostrou exemplos simples e belos de harmonia e geometria no sistema solar. A proporção áurea, há muito associada com a vida, e visivelmente ausente das equações modernas, brinca graciosamente em torno da Terra. Será que, de alguma forma, isso tem algo que ver com o "porquê de estarmos aqui"? E, se assim for, essas técnicas podem ser usadas para localizar vida inteligente em outros sistemas solares?

Espero que tenham gostado de ler o *Quadrivium*, e que o cosmos tenha sido embelezado ou transmutado, de alguma maneira, como resultado do que aprenderam. Se alguma vez precisarem recordar que pode haver um pouco mais de magia em nossas origens do que a cosmologia moderna ofereceu até o momento, lembrem-se do beijo de Vênus e das palavras de John Donne:

> *Man hath weav'd out a net, and this net throwne*
> *upon the Heavens, and now they are his owne.*
> *Loth to goe up the Hill, or labour thus*
> *to goe to Heaven, we make Heaven come to us.*[13]


Plêiades
Órion
Sírius
60°

Notas da Tradutora

[1] Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), matemático e astrônomo francês de origem italiana.

[2] Um tipo de *deferente* – círculo ou esfera – utilizado nesses sistemas astronômicos antigos para conduzir um planeta em torno da Terra ou do Sol.

[3] Astrônomo dinamarquês considerado um dos representantes mais prestigiosos da chamada "ciência nova", a ciência renascentista que abrira uma brecha no sólido edifício construído pela Idade Média. Continuando o trabalho iniciado por Copérnico, estudou detalhadamente as fases da Lua e compilou muitos dados, que serviriam mais tarde a Johannes Kepler para descobrir uma harmonia celestial existente no movimento dos planetas – um padrão que ficou conhecido como *Leis de Kepler*. Abandonando a tradição ptolomaica para chegar a novas conclusões pela observação direta, as observações de Tycho sobre a posição das estrelas e dos planetas alcançaram uma precisão impressionante, sem paralelo na época, apesar de ele ter precedido a invenção do telescópio. Ele não defendia a teoria heliocêntrica de Copérnico, mas propôs um sistema em que os planetas giravam em torno do Sol, enquanto este orbitava a Terra. Referência: Arthur Koestler, *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*. Hutchinson, 1959 (reimpresso por Arkana, 1989).

[4] Filósofo e astrônomo grego (século IV a.C.), discípulo de Platão, foi o primeiro a afirmar o movimento de rotação da Terra, idealizando um sistema em que Mercúrio e Vênus giravam ao redor do Sol, e este em torno da Terra. Defendia a ideia de que a Terra, localizada no centro do universo, executava um movimento de rotação em torno de si mesma no período de um dia.

[5] Um *planeta menor* é um asteroide, um pequeno corpo celeste do sistema solar, também chamado *planeta anão*.

[6] Também chamados planetas *telúricos* ou *sólidos* (em inglês, *terrestrial planets*), são os planetas rochosos mais próximos do Sol (e por isso situados no Sistema Solar Interior): Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. São mais densos que os chamados planetas gasosos, mais distantes do Sol – Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

[7] A palavra foi mantida no original porque, embora a tradução literal seja "valsista", o autor refere-se *especificamente* a um brinquedo com esse nome, encontrado em parques de diversão em todo o mundo, composto por certo número de carros que podem rodar livremente em torno do próprio eixo, enquanto giram ao redor de um ponto central, como um carrocel. O piso do brinquedo não é plano, de forma que os carros sobem e descem suavemente, enquanto ele gira; e o peso específico das pessoas que ocupam os carros faz com que cada um deles rode de maneira imprevisível.

[8] Mercúrio não experimenta as estações do ano da mesma maneira que os outros planetas, pois ele gira de forma única no sistema solar. Em relação às estrelas fixas, Mercúrio gira exatamente três vezes, sobre o seu próprio eixo, para cada duas revoluções (anos) em torno do Sol. No entanto, visto do Sol (em um quadro de referência que gira com o movimento orbital), o planeta parece girar apenas uma vez a cada duas revoluções. Assim, um observador que estivesse localizado em Mercúrio experimentaria um único dia a cada dois anos.

[9] No sentido de *habitual, ordinária, vulgar*. O termo usado em inglês é *muggle*, que significa algo ou alguém sem imaginação ou entendiante, e tornou-se popular com a série de livros sobre o mago *Harry Potter*, criada por J. K. Rowling. Nos livros, o termo faz alusão a todas as pessoas que não são magos ou feiticeiros, ou seja, seres humanos comuns, ordinários, que até desconhecem, em sua maioria, a existência de magia. Na versão dos livros de Rowling para o português, o termo *muggle* foi traduzido como "trouxa" (tolo, otário, aquele que é facilmente enganado), o que não soaria bem aqui.

[10] Ou *Luas de Galileu*, assim chamadas por terem sido descobertas por Galileu Galilei.

[11] As luas "pastoras" ou *guias* são pequenas luas que orbitam perto das bordas externas dos anéis ou, ainda, dentro de lacunas nos anéis. A gravidade de uma *lua-guia* serve para manter uma aresta bem definida no anel; e o material que flutua mais próximo de sua órbita é desviado de volta para o corpo do anel, ejetado para fora do sistema ou acrescido à própria lua. Referência: Gunter Faure e Teresa M. Mensing, *Introduction to Planetary Science: The Geological Perspective*. Springer, 2007.

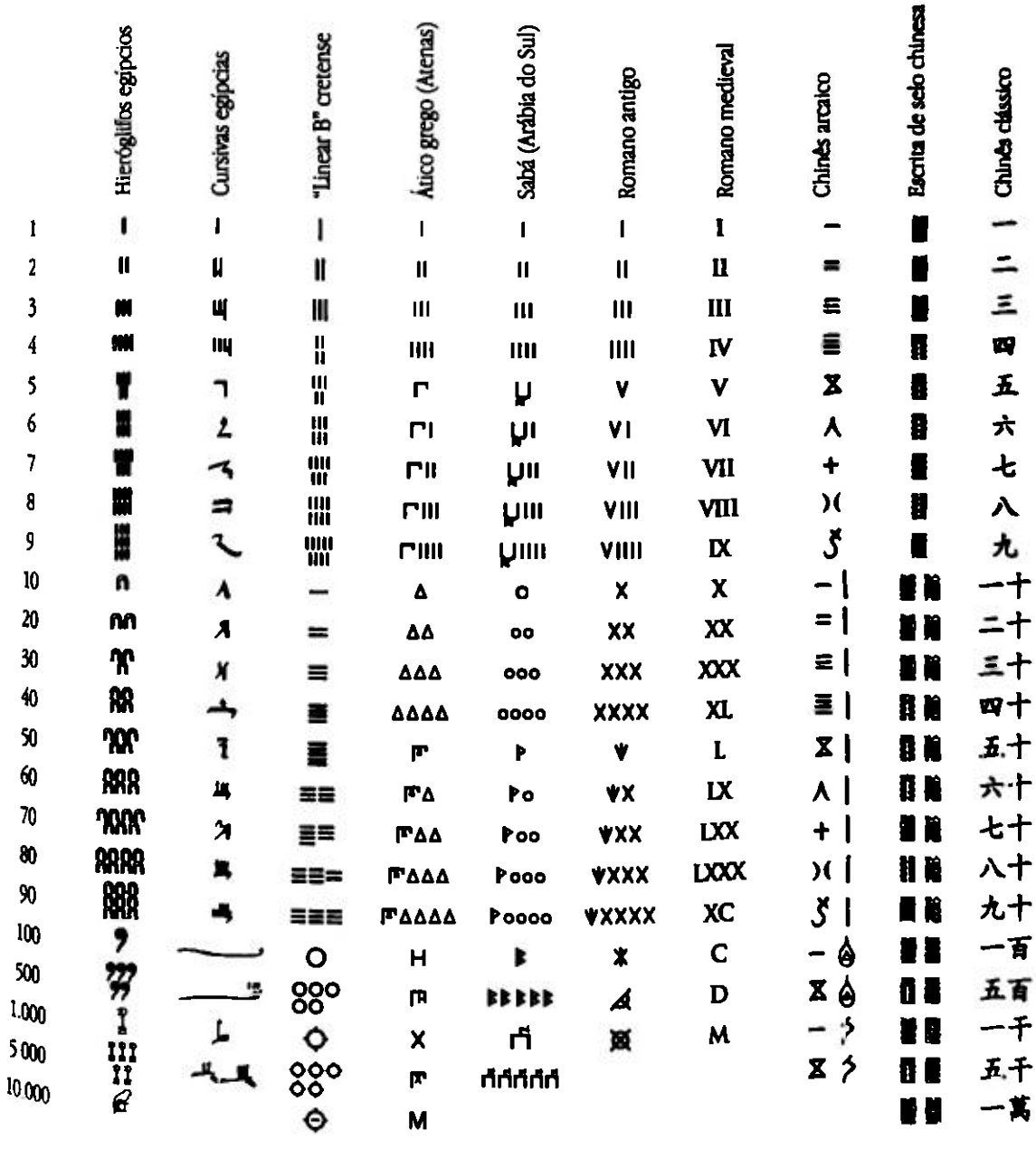
[12] Também chamada *Saturno VI*, é o maior satélite de Saturno, e o segundo maior de todo o sistema solar, depois de Ganímedes.

13 "O homem teceu uma rede, e essa rede lançou
sobre os céus, e agora eles são seus.
Relutantes em subir a colina, ou assim trabalhar
para chegar ao Céu, fazemos o Céu vir até nós."

APÊNDICE
E ÍNDICE

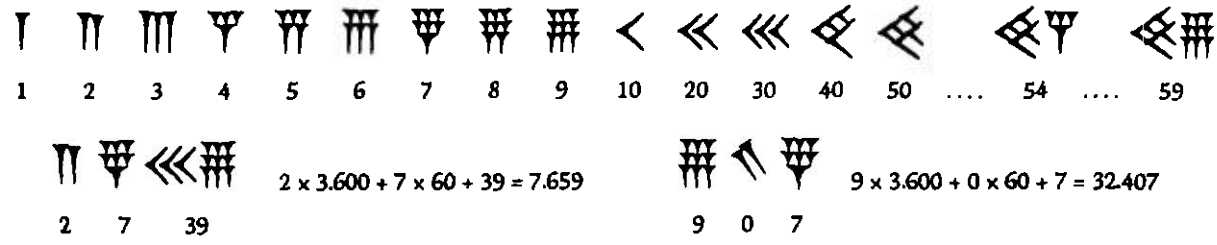
OS PRIMEIROS SISTEMAS NUMÉRICOS

Todos os sistemas antigos apresentados na tabela abaixo utilizam pequenos conjuntos de caracteres para representar uma gama limitada de números. Os sistemas dos antigos povos do Mediterrâneo repetem marcas, como uma talha (vara de cálculo), para representar alguns números, enquanto o sistema chinês combina os caracteres usados para os números de 1 a 9 com os caracteres que representam 10, 100, 1.000 e 10.000. Em todos esses sistemas, um número como 57 seria escrito com o caractere (ou caracteres) utilizado para 50, seguido pelo caractere utilizado para 7, sem notação posicional.

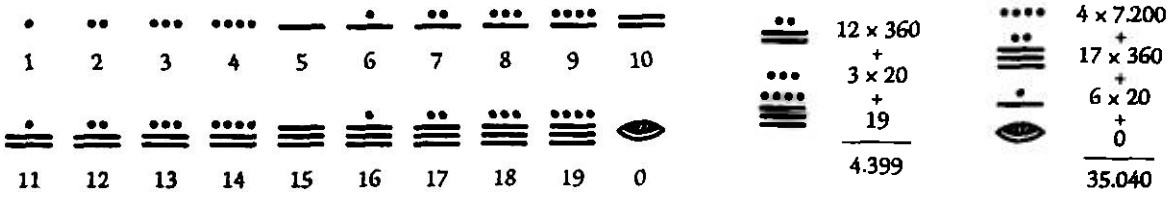


SISTEMA NUMÉRICO DE NOTAÇÃO POSICIONAL

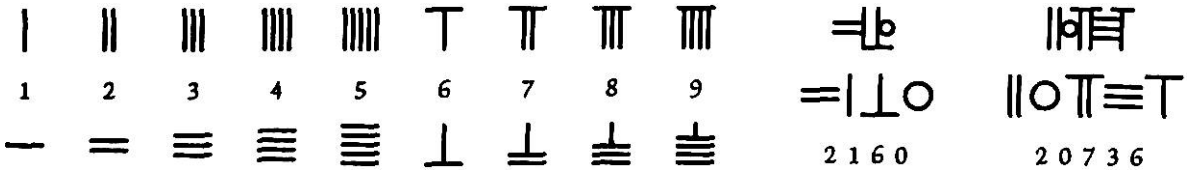
São poucos, e distantes entre si, os sistemas de numerais que utilizam a posição ou "notação posicional" para representar a magnitude de determinado dígito. O mais antigo desses sistemas é o cuneiforme sumério. As marcas feitas com instrumentos pontiagudos na argila são repetidas a fim de criar glifos para os números 1 a 59, com a notação posicional indicando números maiores. Depois, os babilônios introduziram um marcador de "lugar vazio", criando efetivamente o primeiro zero.



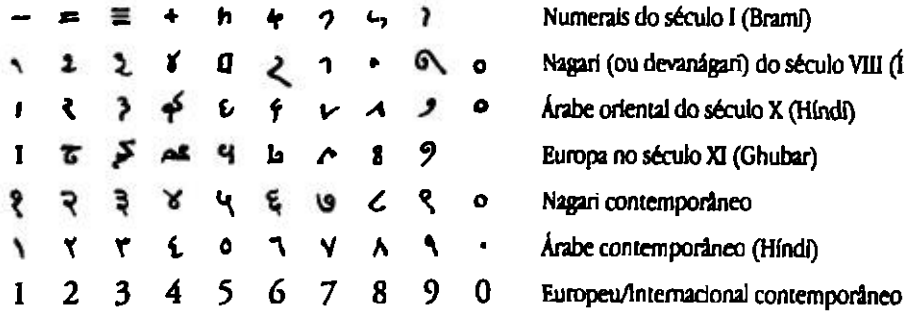
Independentemente, os maias descobriram a notação posicional e a utilização do zero. Seu sistema de base vinte é em geral escrito verticalmente. Os dígitos na terceira posição não são vinte, mas dezoito vezes aqueles da segunda posição, provavelmente por causa do uso temporal de 360 (baseado no calendário).



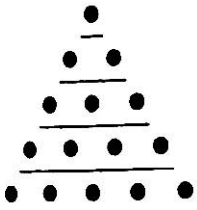
O sistema numérico de varas do Extremo Oriente alterna-se em duas versões de nove glifos. O pequeno zero indiano foi adotado no século XVIII.



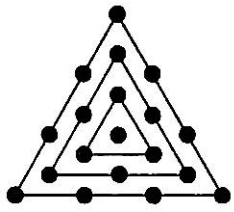
Nosso sistema numérico originou-se nos números indianos Brami. A partir do século VI, foram utilizadas variações dos primeiros nove dígitos Brami com um pequeno zero circular, em um sistema de notação posicional. Esse sistema foi passado à Europa pelos árabes.



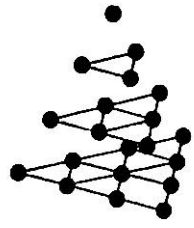
NÚMEROS PITAGÓRICOS



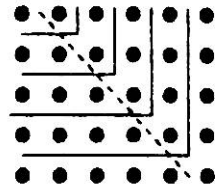
Números triangulares
Soma dos números
1 + 2 + 3 + 4 ...
1, 3, 6, 10, 15, ...



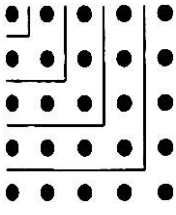
Números triangulares centrados
Triângulos aumentam em 3
1 + 3 + 6 + 9 ...
1, 4, 10, 19, ...



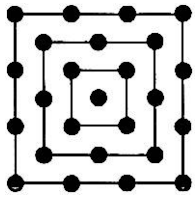
Números tetraédricos
Soma dos números triangulares
1 + 3 + 6 + 10 ..
1, 4, 10, 20, ...



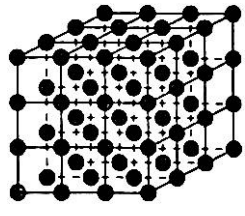
Números retangulares
Duas vezes números triangulares, também
2 + 4 + 6 + 8 ..
2, 6, 12, 20, ...



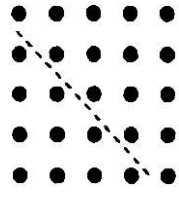
Números quadrados
Soma de números ímpares
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ..
1, 4, 9, 16, 25, ...



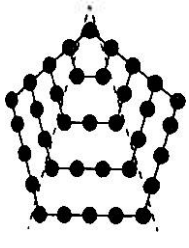
Números quadrados centrados
Quadrados aumentam em 4
1 + 4 + 8 + 12 + ..
1, 5, 13, 25, ...



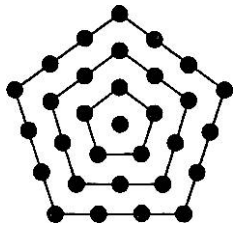
Números cúbicos
1 x 1 x 1, 2 x 2 x2,
3 x 3 x 3, 4 x 4 x 4, ...
1, 8, 27, 64, ...



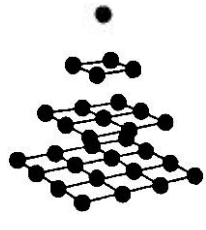
Números quadrados
como a soma de dois números triangulares adjacentes
Aqui 10 + 15 = 25



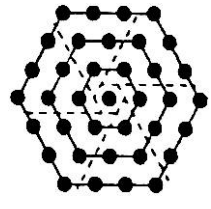
Números pentagonais
Separados em grupos de três
1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ...
1, 5, 12, 22, 35, ...



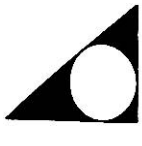
Números pentagonais centrados
Até mais cinco
1 + 5 + 10 + 15 + ...
1, 6, 16, 31, 61 ...



Números piramidais quadrados
Quadrado por quadrado
1 + 4 + 9 + 16 + ...
1, 5, 14, 30, 55 ...



Números hexagonais centrados
Centro e seis triângulos
1 + 6 + 12 + 18 + ...
1, 7, 19, 37, 61 ...



O triângulo 3-4-5
Área 6, Perímetro 12
Diâmetro do círculo incluso = 2

O triângulo 5-12-13
Área 30, Perímetro 30
Diâmetro do círculo incluso = 4

O triângulo 8-15-17
Área 60, Perímetro 40
Diâmetro do círculo incluso = 6

O triângulo 7-24-25
Área 84, Perímetro 56
Diâmetro do círculo incluso = 6

EXEMPLOS DE GEMATRIA

Antiga gematria grega e cristã:

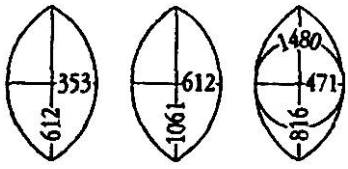
ΙΗΣΟΥΣ (Jesus) 888 + ΧΡΙΣΤΟΣ (Cristo) 1480 = 2368

888 : 1480 : 2368 = 3 : 5 : 8

ΚΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΥΤΟΥ ΧΕΣ = 2368
(E seu número é 666)

ΤΟ ΑΥΙΟΝ ΠΝΕΥΜΑ (O Espírito Santo) 1080 + ΠΑΡΑ ΘΕΟΥ (de Deus) 666 = 1746

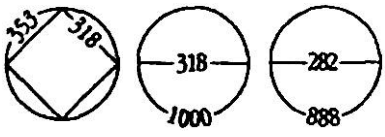
Η ΔΟΞΑ ΤΟΥ ΘΕΟΥ ΙΣΡΑΗΛ = 1746
(Glória do Deus de Israel)



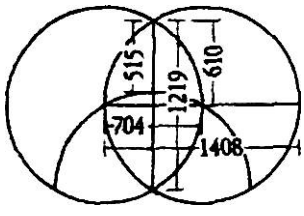
ΕΡΜΗΣ (Hermes) 353 está para ΖΕΥΣ (Zeus) 612

assim como ΖΕΥΣ (Zeus) 612 está para ΑΠΟΛΛΩΝ (Apolo) 1061

assim como ΚΑΡΠΟΣ (Fruto) 471 está para ΖΩΗ (Vida) 815



ΗΛΙΟΣ (Sol) = 318 ΒΙΟΣ (Vida) = 282
1000 como a Unidade ampliada



ΠΑΡΘΕΝΟΣ (Virgem) = 515

ΞΥΛΟΝ (Cruz) = 610

Ο ΘΕΟΣ ΙΣΡΑΗΛ
(O Deus de Israel) = 703

ΙΧΘΟΣ (Peixe) = 1219

ΣΩΤΗΡ (Salvador) = 1408

O nome divino YHWH como *tetraktys*:

י = 10

י ה = 10 + 5 = 15

י ה ו = 10 + 5 + 6 = 21

י ה ו ה = 10 + 5 + 6 + 5 = 26

היה HaYaH (Ele foi) = 25

הוה HoWeH (Ele é) = 16

יהיה YIHYeH (Ele será) = 30

Algumas correspondências em hebraico:

אחד = 13 = אהבה
EKHAD (Um) AHAVAH (Amor)
a sua soma = 26 = YHWH

אדם חוה = 26 = יהוה
ADAM – KHAWAH YHWH

יין = 70 = סוד
YAYIN (vinho) SOD (segredo)

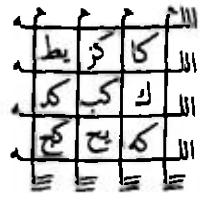
ou *in vino veritas*! (no vinho, a verdade)

Nomes das letras hebraicas e seus totais:

אלף	111	ALEPH	למד	74	LAMED
בית	412	BET	מים	90	MEM
גמל	73	GIMMEL	נון	110	NUN
דלת	434	DALET	סמך	120	SAMEKH
הא	6	HE	עין	130	AYIN
זו	12	VOV	פה	85	PE
זין	67	ZAYIN	צדי	104	TSADE
חית	418	HET	קוף	104	QUF
טית	419	TET	ריש	510	RESH
יוד	20	YOD	שין	360	SHIN
כף	100	KOF	תו	406	TAV

Cada número contém a semente do seguinte, e assim as regras de gematria permitem uma diferença de 1 em comparações. As partes fracionárias, em medidas geométricas e proporções, podem ser arredondadas de qualquer maneira.

Talismã com a soma mágica 66, o total *abjad* para o nome divino Alá:



21	26	19
20	22	24
25	18	23

Alguns nomes de Deus na ordem *abjad*:

الله	66	ALLAH
باقي	113	BAQI (Eterno)
جامع	114	JAMI (Ceifeiro)
ديان	65	DAYAN (Juiz Supremo)
هادي	20	HADI (Guia)
ولي	46	WALI (Amigo)
زكي	37	ZAKI (Purificador)
حق	108	HAQ (Verdade)
طاهر	215	TAHIR (Puro)
يسين	130	YASSIN (Superior)
كافي	111	KAFI (Suficiente)
لطيف	129	LATIF (Sutil)
ملك	90	MALIK (Rei)
نور	256	NUR (Luz)
سميع	180	SAMI (O que tudo ouve)
علي	110	'ALI (Altíssimo)
فتاح	489	FATAH (Revelador)
صمد	134	SAMAD (Eterno)
قادر	305	QADIR (Poderoso)
رب	202	RAB (Senhor)
شفيع	460	SHAFI (Curador)
توب	408	TAWAB (Misericordioso)
ثابت	903	THABIT (Constante)
خالق	731	KHALIQ (Criador)
ذاكر	921	DHAKIR (Aquele que recorda)
ضار	1.001	DAR (Punidor)
ظاهر	1.106	DHAHIR (Manifesto)
غفور	1.285	GHAFUR (Clemente)

MAIS QUADRADOS MÁGICOS

Um quadrado mágico é *normal* se usar números inteiros de 1 até o quadrado de sua ordem; e *simples* se sua única propriedade forem linhas, colunas e diagonais principais que se adicionam à soma mágica. O quadrado mágico normal de ordem 3 é singular, para além das oito reflexões e rotações, ou *aspectos*, possíveis (*quatro exemplos abaixo*).

2	7	6
9	5	1
4	3	8

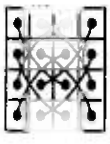
6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

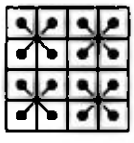
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Se os números em um quadrado mágico se somarem, simetricamente, em torno do centro – por exemplo, 2 + 8, 7 + 3, [...] –, o quadrado está ligado (não simples), e os pares de números são *complementares*.

Há 880 quadrados mágicos normais de ordem 4. Os matemáticos giram ou espelham os quadrados mágicos para contá-los, de modo que a célula superior esquerda é tão pequena quanto possível em relação à célula à sua direita, menor que a célula abaixo. Números complementares em quadrados normais de ordem 4 formam doze *padrões Dudeney* (*quatro exemplos mostrados abaixo*).

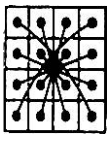


2	11	14	7
13	8	1	12
3	10	15	6
16	5	4	9

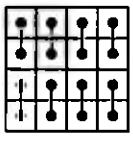


1	4	15	14
13	16	3	2
8	5	10	11
12	9	6	7

grupo I *grupo II*



4	14	5	11
15	1	10	8
9	7	16	2
6	12	3	13

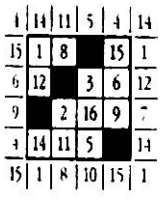


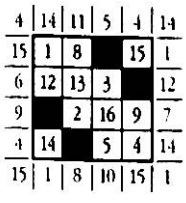
1	10	8	15
16	7	9	2
11	4	14	5
6	13	3	12

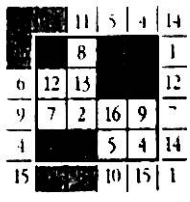
grupo III *grupo IV*

Os 48 quadrados do Grupo I são pandiagonais, e as seis diagonais interrompidas, formadas pelos lados opostos que se envolvem para encontrar uns aos outros, também se somam magicamente (*abaixo à esquerda e ao centro*).

Os quadrados mágicos pandiagonais de ordem 4 também são mais perfeitos,







e qualquer quadrado de 2 por 2, incluindo os com diagonais envolventes, contribui para a soma mágica (*acima, à direita*). Apenas os quadrados normais pandiagonais de ordem duplamente par (4, 8, 12...) podem ser os mais perfeitos.

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Há 275.305.224 quadrados mágicos normais de ordem 5. A ordem 5 é a menor ordem de quadrados mágicos que podem ser simultaneamente pandiagonais e ligados (*um exemplo é apresentado acima*). Há 36 quadrados mágicos pandiagonais de ordem 5 essencialmente diferentes. Cada um produz 99 variações por permutação de suas linhas, colunas e diagonais, para um total de 3.600 quadrados pandiagonais de ordem 5. Não se sabe quantos quadrados mágicos normais de ordem 6 existem. A ordem 6 é a primeira ordem par em número ímpar, divisível por 2, mas não por 4, cujos quadrados são os mais difíceis de construir. É impossível para um quadrado normal de ordem 6 ser pandiagonal ou ligado.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Para construir um quadrado mágico de ordem duplamente par, posicione os números em sequência a partir do canto superior esquerdo, como aparece abaixo (*esquerda*). Utilizando o padrão apresentado, troque cada um dos números em uma diagonal marcada pelo seu complemento e terá um quadrado mágico.

Para criar um quadrado mágico de qualquer ordem ímpar, posicione o número 1 na célula central superior e posicione outros números em sequência, para cima e à direita em uma célula, envolvendo superior/inferior e direita/esquerda, se necessário. Quando uma célula previamente preenchida é alcançada, mova-se uma célula para baixo como alternativa. A célula central conterá o número médio da sequência, e as diagonais contribuirão para a soma mágica (*padrão de preenchimento alternativo abaixo à direita*).

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

13	23	40	1	18	35	45
21	31	48	9	26	36	4
22	39	7	17	34	44	12
30	47	8	25	42	3	20
38	6	16	33	43	11	28
46	14	24	41	2	19	29
5	15	32	49	10	27	37

Dois quadrados mágicos são combinados para criar outro quadrado mágico *composto*, com as ordens originais multiplicadas juntas.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

2	7	6
9	5	1
4	3	8

16	96	80
128	64	0
48	32	112

Faça cópias do primeiro quadrado (*esquerda*) como se cada uma dessas cópias fosse uma célula no segundo quadrado (*centro*). Subtraia 1 do valor em cada célula do segundo quadrado e multiplique pelo número de células do primeiro quadrado (*resultado à direita*). Adicione os valores resultantes (*terceiro quadrado à direita*), respectivamente, aos valores de cada uma das células (formadas por quadrados de ordem 4) no quadrado grande abaixo.

17	30	23	28	97	110	103	108	81	94	87	92
31	20	25	22	111	100	105	102	95	84	89	86
26	21	32	19	106	101	112	99	90	85	96	83
24	27	18	29	104	107	98	109	88	91	82	93
129	142	135	140	65	78	71	76	1	14	7	12
143	132	137	134	79	68	73	70	15	4	9	6
138	133	144	131	74	69	80	67	10	5	16	3
136	139	130	141	72	75	66	77	8	11	2	13
49	62	55	60	33	46	39	44	113	126	119	124
63	52	57	54	47	36	41	38	127	116	121	118
58	53	64	51	42	37	48	35	122	117	128	115
56	59	50	61	40	43	34	45	120	123	114	125

Para criar um quadrado mágico *contornado*, adicione o dobro da ordem, mais 2, aos valores das células de um quadrado mágico normal e faça uma borda com os números maiores/menores na nova sequência.

5	4	24	25	7
3				23
18				8
20				6
19	22	2	1	21

Quadrado contornado

14	10	17	6	18
2				24
19				7
22				4
8	16	9	20	12

Quadrado incrustado

2	10		14	20
22		21		8
	25		1	
18		5		4
6	12		16	24

Diamante incrustado

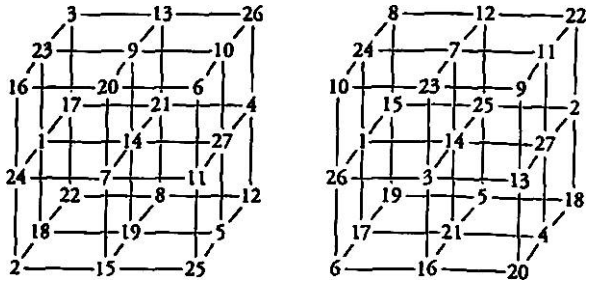
Um quadrado mágico dentro de outro quadrado que não siga a regra do número de contorno maior/menor é um quadrado mágico *incrustado* (ou embutido). *Diamantes mágicos incrustados* e quadrados mágicos *encaixados* (*ordens 3 e 4 em um quadrado de ordem 7, como mostrado abaixo*) também são possíveis.

	1		48		26	
49		23		4		24
	22		11		42	
7		44		43		6
	46		2		27	
19		8		28		45
	31		39		5	

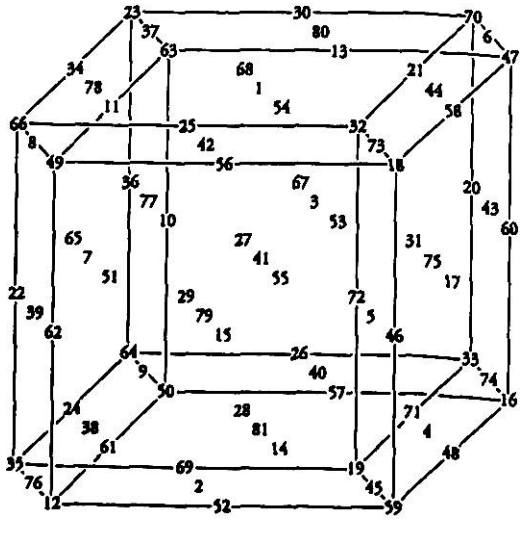
O quadrado *bimágico* ainda será mágico se todos os seus números forem quadrados perfeitos. O quadrado abaixo tem uma soma mágica igual a 369. Cada seção de 3 por 3 também apresenta a mesma soma. A soma mágica "quadrada" é 20.049.

1	23	18	33	52	38	62	75	67
48	40	35	77	72	55	25	11	6
65	60	79	13	8	21	45	28	50
43	29	51	66	58	80	14	9	19
63	73	68	2	24	16	31	53	39
26	12	4	46	41	36	78	70	56
76	71	57	27	10	5	47	42	34
15	7	20	44	30	49	64	59	81
32	54	37	61	74	69	3	22	17

Em três dimensões, encontramos a surpreendente possibilidade dos cubos mágicos. Existem quatro cubos mágicos normais de ordem 3 (*dois são apresentados abaixo*), e cada um deles tem 48 aspectos. Todas as linhas, colunas, pilares e as quatro diagonais longas, a partir de vértices opostos, somam 42.



Outrora consideradas impossíveis, figuras mágicas ainda mais notáveis, em quatro dimensões, foram primeiro descobertas por John R. Hendricks, que esboçou um tesserato mágico – ou cubo 4D – em 1950. Abaixo está um dos 58 tesseratos mágicos normais de ordem 3.



ALGUNS NÚMEROS DAS COISAS

1

Um Um (Universal).

2

Dois Lados: esquerda, direita.
Dois Modos de Conhecimento (religião): esotérico (secreto), exotérico (comum).
Dois Princípios (metafísica): essência, substância.
Dois Regentes (alquimia): rainha, rei.
Dois Tipos Tribais (antropologia): colonizador (colono), nômade.
Duas Forças (taoismo): receptivo (*yin*), ativo (*yang*).
Duas Perspectivas (universal): sujeito, objeto.
Duas Polaridades (física): positivo, negativo.
Duas Polaridades (geografia): norte, sul.
Duas Verdades (lógica): analítica (*a priori*), sintética (*a posteriori*).

3

A Grande Tríade (taoísmo): Céu, Homem, Terra.
A Santíssima Trindade (cristianismo): Pai, Filho, Espírito Santo.
Três Arranjos ou Revestimentos Regulares (geometria): triângulos, quadrados, hexágonos.
Três Aspectos do Conhecimento (Grécia): o conhecedor, o conhecimento, o conhecido.
Três Cores Primárias (luz): vermelho, verde, azul.
Três Destinos ou Moiras (Grécia): fiandeira (Cloto), avaliadora (Láquesis), cortadora (Átropos).
Três Dimensões (física): medial, lateral, vertical.
Três Estágios (hinduísmo): criar (Brama), sustentar (Vixnu), destruir (Xiva).
Três Estágios Alquímicos (alquimia): Operação Negra (*nigredo*), Operação Branca (*albedo*), Operação Vermelha (*rubedo*).[1]
Três Estágios da Alma (jainismo): externo, interno, supremo.
Três Fases Dialéticas: tese, antítese, síntese.
*Três Fúrias ou Erínea*s (Grécia): castigo (Tisífone), ressentimento (Megera), raiva incessante (Alecto ou Inominável).
Três Gerações de **Quarks** (física): *up & down, charm & strange, top & bottom.*[2]
Três Graças ou Cárites (Grécia): esplendor ou claridade (Aglaia), alegria ou jovialidade (Eufrosina), bom ânimo (Tália).
Três Gunas (hinduísmo): fogo (vermelho), água (branco), terra (preto).
Três Modos (astrologia): cardinal, fixo, mutável.
Três Partes de um Silogismo (Aristóteles): premissa, princípio universal, conclusão.
Três Partes do Átomo (séc. XX): próton, elétron, nêutron.
Três Princípios (alquimia): enxofre, mercúrio, sal.
Três Qualidades (cristianismo): fé, esperança, amor.
Três Reinos (medieval): animal, vegetal, mineral.
Três Virtudes Revolucionárias (França): liberdade, igualdade, fraternidade.

4

Quatro Castas (hinduísmo): sagrada (brâmane), heroica (xátria), negócios (vaixá), servos (sudra).[3]
Quatro Causas (Aristóteles): formal, material, eficiente, final.
Quatro Direções (comum): Norte, Sul, Leste, Oeste.
Quatro Elementos (Ocidente): fogo, terra, ar, água.
Quatro Estações (Ocidente): primavera, verão, outono, inverno.
Quatro Forças (moderno): eletromagnética, nuclear forte, nuclear fraca, gravitacional.
Quatro Harmonias Belas (música): uníssono, oitava, quinta, quarta. Todas elas surgem a partir das proporções que envolvem os quatro primeiros números.
Quatro Humores (Ocidente): sanguíneo, colérico, fleumático, melancólico.
Quatro Modos da Psique (Jung): sentimento, pensamento, sensação, intuição.
Quatro Níveis da Psique (Jung): ego, sombra, *animal animus, self.*
Quatro Tipos de Literatura (Ocidente): romance, tragédia, ironia, comédia.
Quatro Verdades Nobres (budismo): a Verdade, a Causa, a Cessação, o Caminho para a cessação do sofrimento.

5

Cinco Cheiros (China): caprino, queimado, perfumado, rançoso, podre.
Cinco Direções ou Cores (China): Leste (verde), Sul (vermelho), Centro (amarelo), Oeste (branco), Norte (preto).
Cinco *Elementos* (budismo): vazio, água, terra, fogo, ar.
Cinco Elementos (China): fogo, terra, metal, água, madeira.
Cinco Notas (China): teclas pretas de um piano.
Cinco Ordens de Arquitetura (Ocidente): toscana, dórica, jônica, coríntia, compósita.
Cinco Partes da Personalidade (Egito): nome, sombra, força vital (*Ka*), caráter (*Ba*), espírito (*Akh* = *Ka* + *Ba*).
Cinco Preceitos (budismo): respeito pela vida, respeito pela prosperidade, castidade, sobriedade, falar a verdade.

---

[1] Não há exatamente consenso a respeito destes estágios. Há textos sobre alquimia que apresentam quatro estágios em vez de três, com uma *Operação Amarela* (*Citrinitas*) entre a Operação Branca e a Vermelha, que seria o quarto estágio, o final, no qual se produz a Pedra Filosofal. (N. T.)

[2] Na Física de Partículas, os nomes dos seis tipos de naturezas dos *quarks* (três pares) não foram traduzidos ao português; são utilizados em inglês mesmo. (N. T.)

[3] As quatro castas também são consideradas como partes do corpo de Brama, respectivamente: cabeça, braços, pernas e pés. Os brâmanes podem ser sacerdotes, filósofos, professores, artistas, todos aqueles ligados às artes, literatura, ciências, enfim, ao conhecimento. Os xátrias são os militares, governantes, em geral aqueles voltados/inclinados às atividades enérgicas, agressivas, à conquista de coisas e pessoas. Os vaixás estão ligados ao comércio, à agricultura, à propriedade de terras. Os sudras são os artesãos, operários, camponeses, destinados à servidão e a ocupações humildes, repetitivas e cansativas. Ainda há os párias, que comporiam a "poeira dos pés de Brama": não fazem, portanto, parte de seu corpo e, por essa razão, não são parte do sistema de castas. São chamados "intocáveis" e são completamente desprezados pelos demais. (N. T.)

Cinco Sabores (China): azedo/ácido, amargo, doce, picante, salgado.
Cinco Sentidos (comum): visão, audição, tato, olfato, paladar.
Cinco Sólidos Platônicos (universal): tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro, dodecaedro.
Cinco Sons (China): chamar, rir, cantar, lamentar, gemer.
Cinco Tipos de Animais (China): escamado, alado, descoberto (nu), peludo, com carapaça (ou concha ou casco).
Cinco Venenos (budismo): confusão, orgulho, inveja, ódio, desejo.
Cinco Virtudes (budismo): gentileza, bondade, respeito, moderação, altruísmo.
Cinco Virtudes (China): benevolência, retidão, boa-fé, integridade, conhecimento.

6

Seis Dias da Criação (religiões abraâmicas): luz, firmamento, terra e vegetação, corpos celestes, peixes e pássaros, animais e seres humanos.
Seis Direções (comum): para cima, para baixo, esquerda, direita, à frente, atrás.
Seis Domínios (hinduísmo e budismo): deuses, infernos, humanos, fantasmas famintos, demônios, animais.
Seis Perfeições (budismo): generosidade (a doação de si), moralidade (virtude, disciplina, conduta apropriada), paciência (tolerância, aceitação, resistência), energia, meditação (contemplação), sabedoria (insight).
Seis Polítopos Regulares (sólidos quadridimensionais): simples, tesserato, 16 células, 24 células, 120 células, 600 células.
Seis Reações (química): síntese (composição ou adição), análise (decomposição), combustão, simples troca (deslocamento), dupla troca, ácido-base.
Seis Reinos (moderno): *archaebacteria* e bactéria (procariontes), protista, fungos, plantas e *animalia* (eucariontes).

7

Sete Artes Liberais (Ocidente): lógica, retórica, gramática (*Trivium*), aritmética, geometria, música, cosmologia (*Quadrivium*).
Sete Chacras (hinduísmo): raiz (*Muladhara*, quatro pétalas), sacral (*Svadhisthana*, seis pétalas), plexo solar (*Manipura*, dez pétalas), cardíaco (*Anahata*, doze pétalas), laríngeo (*Vishuddha*, dezesseis pétalas), frontal/testa (*Ajña*, duas pétalas), coroa (*Sahasrara*, mil pétalas).*
Sete Corpos Celestiais e seus Dias da Semana (antigo): Lua (segunda-feira), Mercúrio (quarta-feira), Vênus (sexta-feira), Sol (domingo), Marte (terça-feira), Júpiter (quinta-feira), Saturno (sábado).
Sete Estágios da Alma (sufismo): compulsão, consciência, inspiração, tranquilidade, submissão, servidão, aperfeiçoamento.
Sete Geometrias de Fronteira (universal): há sete tipos possíveis de simetria de margem ou borda.
Sete Glândulas Endócrinas (médico): pineal, pituitária, tireoide, timo, suprarrenais, pâncreas, gônadas.
Sete Metais (antigo): prata, mercúrio, cobre, ouro, ferro, estanho, chumbo.
Sete Modos (Grécia): jônio, dórico, frígio, lídio, mixolídio, eólio, lócrio: usando apenas as teclas brancas de um piano, estes modos se referem à escala de sete notas, começando com Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, respectivamente.
Sete Níveis do Self (antroposofia): físico, etérico, astral, ego, *manas*, *budhi*, *atma*.

* Nomes dos chacras, entre parênteses, em sânscrito. (N. T.)

Sete Pecados Mortais e suas Sete Virtudes Contrárias (cristianismo): vaidade ou orgulho, inveja, gula, luxúria, ira, avareza, preguiça (pecados); humildade, caridade, temperança, castidade, paciência, generosidade, diligência (virtudes respectivas).
Sete Virtudes (cristianismo): fé, esperança, caridade, coragem, justiça, prudência, temperança.

8

Nobre Caminho Óctuplo (budismo): visão/compreensão correta, intenção/pensamento correto, fala correta, ação correta, meio de vida correto, esforço correto, atenção correta, concentração correta.
Oito Arranjos ou Revestimentos Semirregulares (geometria): no plano.
Oito Imortais (taoísmo): juventude, velhice, pobreza, riqueza, o povo, nobreza, o masculino, o feminino.
Oito Pilares da Ioga (vedismo): moralidade/integridade (*Yama*), observâncias (*Niyama*), posturas (*Asanas*), respiração (*Pranayama*), concentração (*Dharana*), devoção (*Dhyana*), união (*Samadhi*).
Oito Trigramas (I-Ching): *Chi'en* (céu, criativo), *Tui* (atração, realização), *Li* (consciência, beleza), *Chen* (ação, movimento), *Sun* (seguinte, penetração), *K'an* (perigo, risco), *Ken* (parada, repouso), *K'un* (terra, receptivo).

9

Nove Arranjos ou Revestimentos Semirregulares (universal): embora existam oito padrões comuns, um deles tem duas versões, uma em sentido horário (direita) e outra em anti-horário (esquerda), compondo nove revestimentos ao todo.
Nove Musas (Grécia): história (Clio), astronomia (Urânia), tragédia (Melpômene), comédia (Tália), dança (Terpsícore), música dos deuses/cerimonial (Polímnia), poesia épica/eloquência (Calíope), poesia lírica (Erato), música e poesia elegíaca (Euterpe).
Nove Ordens de Anjos (Ocidente): anjos, arcanjos, principados, potestades, virtudes, dominações, tronos, querubins, serafins.
Nove Personalidades (Oriente Médio): perfeccionista, doador, empreendedor, romântico trágico, observador, contraditor, entusiasta, líder, mediador.
Nove Poliedros Regulares (universal): os cinco sólidos platônicos mais os quatro poliedros estrelados: o grande dodecaedro, o dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro estrelado e o grande icosaedro.

10

Dez Mandamentos (judaísmo/cristianismo): Amar a Deus sobre todas as coisas. Não terás outros deuses além d'Ele (não farás para ti nenhum ídolo). Não dirás em vão o nome do Senhor (blasfêmia). Lembra-te do dia de sábado para santificá-lo (domingo para os católicos). Honrarás pai e mãe. Não matarás. Não cometerás adultério. Não furtarás. Não darás falso testemunho contra o teu próximo. Não cobiçarás (nada que pertença a teu próximo).
Dez Níveis (budismo): jubiloso, imaculado, criador de luz, radiante, resiliente, direcionador, persistente, inabalável, boa mente, nuvem de *dharma*.
Dez Opostos (Pitágoras): limitado e ilimitado, ímpar e par, singularidade e pluralidade, direita e esquerda, macho e fêmea, repouso e movimento, reto e curvo, luz e escuridão, bom e mau, quadrado e oblongo.
Dez Sefirot (Cabala): *Kether* (coroa), *Chokmah* (sabedoria), *Binah* (entendimento), *Chesed* (misericórdia), *Geburah* (julgamento), *Tipareth* (beleza), *Netzach* (vitória), *Hod* (esplendor), *Yesod* (fundamento), *Malkuth* (reino).

GLOSSÁRIO ESPECIAL DE NÚMEROS

1 O primeiro número triangular, quadrado, pentagonal, hexagonal, tetraédrico, octaédrico, cúbico, Fibonacci e Lucas.

2 O primeiro número par (feminino). Um dia do planeta Mercúrio é exatamente dois de seus anos. O raio orbital de Urano é duas vezes o de Saturno. O período de Netuno é o dobro do período de Urano.

3 O primeiro número ímpar (masculino) grego. 1 + 2. Existem três arranjos ou revestimentos regulares do plano. Depois de três anos, a Lua repete rigorosamente as suas fases no calendário. Na engenharia, a triangulação cria estabilidade.

4 O segundo número quadrado. $2^2 = 2 \times 2 = 2 + 2$. É o número de vértices e faces de um tetraedro. Cada número inteiro é a soma de, no máximo, quatro quadrados.

5 A soma do primeiro número macho (ímpar) e do primeiro fêmea (par). $1^2 + 2^2$. Há cinco notas na escala pentatônica e cinco sólidos platônicos. É o quinto número Fibonacci e o segundo número pentagonal.

6 É o terceiro número triangular ($6 = 1 + 2 + 3$) e o fatorial de 3, escrito como $3! = 1 \times 2 \times 3$. É a área e o semiperímetro do triângulo 3-4-5. O primeiro número perfeito (soma de seus fatores). O número de arestas em um tetraedro, de faces em um cubo, e de vértices de um octaedro. Há seis polítopos regulares 4D.

7 Existem sete simetrias de friso, sete notas da escala tradicional, sete glândulas endócrinas em seres humanos. É a soma dos pontos em lados opostos de um dado. Há sete tetrominós (Tetris). É o quarto número Lucas.

8 O segundo número cúbico ($2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$). O número de faces de um octaedro e de vértices de um cubo. É o sexto número Fibonacci. Existem oito revestimentos ou arranjos semirregulares no plano. O número (mínimo) de *bits* em um *byte*.

9 O quadrado de três ($3^2 = 3 \times 3 = 1^3 + 2^3$). Há nove poliedros regulares e nove arranjos semirregulares do plano, se você incluir o par quiral. Em base 10, os dígitos de todos os múltiplos de nove somam nove.

10 O quarto número triangular e o terceiro tetraédrico ($1^2 + 3^2$).

11 Onze dimensões unificam as quatro forças da física. Onze é o quinto número Lucas. É o ciclo de manchas solares em anos.

12 Doze notas completam a escala de temperamento igual. É o terceiro número pentagonal. Doze esferas tocam outra esfera central no cuboctaedro. É o número de vértices de um icosaedro, de faces de um dodecaedro, de arestas do cubo e do octaedro. Também é o número de pétalas do chacra do coração.

13 O sétimo número Fibonacci. São treze os poliedros de Arquimedes. Aparece como a oitava (13ª nota) musical, e no triângulo de lados 5-12-13. Os gafanhotos voam em enxames a cada treze anos.

14 O terceiro número piramidal quadrado ($1^2 + 1^2 + 3^2$). O número de linhas em um soneto (oitava, quarteto, dístico).

15 Um número triangular. A soma, em linhas, de um quadrado mágico de 3 x 3. O número de bolas em um triângulo de brilhar.

16 O resultado de 2^4 e 4^2. O perímetro e área de um quadrado de 4 x 4. O número de pétalas do chacra da garganta. Também é o resultado de $5^2 - 3^2$, o que significa que dezesseis moedas podem ser organizadas como um quadrado de 5 por 5.

17 O número de grupos de simetria 2D. É o resultado de $1^4 + 2^4$. O número de sílabas em um haicai japonês (5 + 7 + 5). O número de tons na afinação árabe.

18 O número de anos em um ciclo de eclipse de Saros, antes que se consiga outro eclipse de mesmo tipo próximo do mesmo lugar.

19 O número de anos no ciclo metônico. Depois de dezenove anos, as luas cheias repetem-se nas mesmas datas de calendário. O jogo de Go possui uma grade de tabuleiro de 19 por 19.

20 A soma dos quatro primeiros números triangulares. O número de faces em um icosaedro e de vértices em um dodecaedro. O número de dias em um mês maia. A quantidade de aminoácidos em seres humanos.

21 O sexto número triangular e o oitavo número Fibonacci. É o resultado de 3 x 7. O número de letras no alfabeto italiano.

22 O número máximo de pedaços em que um bolo pode ser cortado com seis facas. O número de caminhos na Cabala e de letras no alfabeto hebraico. O número de arcanos maiores do Tarô e de tons na afinação musical indiana.

23 O número de pares de cromossomos que fazem um ser humano.

24 O número de esferas que podem tocar uma em 4D. O número de letras no alfabeto grego. É o resultado de $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.

25 O resultado de $5^2 = 3^2 + 4^2$. Vinte e cinco elevado a qualquer potência sempre termina em vinte e cinco (dois últimos dígitos do resultado).

26 O único número que se posiciona entre um quadrado e um cubo. O número de letras nos alfabetos latinos e inglês.

27 O resultado de $3^3 = 3 \times 3 \times 3$. Na cosmologia lunar hindu, é o número de *nakshatras* (setores) em que a eclíptica é dividida.

28 É o segundo número perfeito, a soma de seus fatores, e também um número triangular. O número de letras nos alfabetos árabe e espanhol.

29 Um número Lucas, cuja série segue como 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, etc. É o número de letras no alfabeto norueguês.

30 O número de arestas do dodecaedro e do icosaedro. Área e perímetro de um triângulo de Pitágoras de lados 5-12-13. A Lua orbita a Terra a uma distância equivalente a trinta diâmetros da Terra.

31 O número de planos de existência no budismo. Um número primo de Mersenne, da forma $2^n - 1$, onde n é primo.

32 O resultado de 2^5, é a menor quinta potência além de 1. É o número de classes de cristais, e o número de diâmetros da Terra necessários para alcançar a Lua.

33 O resultado de $1! + 2! + 3! + 4!$. Número de vértebras na coluna vertebral humana, com 33 pares de nervos. Há 12.053 nasceres do sol em 33 anos. É o maior número que não pode ser representado como a soma de números triangulares distintos.

34 A soma nas linhas de um quadrado mágico de 4 x 4.

35 A soma da sequência harmônica pitagórica 12:9:8:6. Também é a soma dos primeiros cinco números triangulares.

36 Resultado de $1^3 + 2^3 + 3^3$. O oitavo número triangular e o sexto número quadrado. É o primeiro número simultaneamente quadrado e triangular.

37 O coração da sequência 111, 222, [...] 666, 777, 888. É o número de luas (fases) em três anos. E o número de estágios do *bodisatva* budista.

38 Pode ser escrito como a soma de dois números ímpares, de dez maneiras. Cada par dessa soma contém um número primo. É o maior número com essa propriedade.

39 Há 39 combinações de mão quando um baralho de cartas é dividido entre quatro pessoas, como no *bridge*.

40 A soma do número de dedos das mãos e dos pés de um homem e de uma mulher juntos. Quarenta esferas podem tocar uma central em cinco dimensões.

41 A expressão $x^2 - x + 41$ produz uma sequência de quarenta números primos consecutivos, partindo de 41 até 1.681.

42 A soma das linhas de um quadrado mágico tridimensional de 3 x 3 x 3.

45 Um número triangular, é a soma dos números de 1 a 9. Também é a soma das linhas no *sudoku*.

46 O número total de cromossomos no núcleo de células humanas, 23 da mãe e 23 do pai.

50 O número de letras no alfabeto sânscrito, e de *pétalas* nos chacras, excluindo o chacra da coroa.

52 O número de cartas em um baralho completo, e o número de dentes humanos ao longo de uma vida: (4 x 5) criança + (4 x 8) adulto. A volta do calendário maia era de 52 anos, após os quais o *Tzolkin* de 260 dias e o *Haab* de 365 dias eram reinicializados.

55 O maior número triangular e Fibonacci (outros números: 1, 3, 21). Também é um número piramidal quadrado, resultado de 1 + 4 + 9 + 16 + 25.

56 O número de blocos de pedras em Stonehenge. Útil para a previsão de eclipses. 7 x 8 é o produto de 1 + 2 + 4 (= 7) e 1 x 2 x 4 (= 8), e também um número tetraédrico. O número de arcanos menores em um baralho de Tarô.

58 Há um estrelamento para um pentágono ou hexágono, dois para um heptágono ou octógono, três para um eneágono. Não há estrelamentos para um tetraedro nem para um cubo, apenas um estrelamento para um octaedro, e três para um dodecaedro. Mas há 58 estrelamentos para um icosaedro.

59 Um número primo. Há duas luas cheias a cada 59 dias.

60 O resultado de 3 x 4 x 5. É a base da contagem numérica na Suméria e na Babilônia. É o menor número divisível por 1 até 6.

61 O número de códons que especificam aminoácidos no ARNm humano (ácido ribonucleico mensageiro).

64 O resultado de 8^2, 4^3 e 2^6. É o número de hexagramas do I-Ching e de quadrados em um tabuleiro de xadrez. Também é o número de códons que especificam aminoácidos no DNA humano.

65 A soma das linhas de um quadrado mágico de 5 x 5. O primeiro número que é a soma de dois números ao quadrado, de duas maneiras: $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$.

71 O deus hindu Indra vive por 71 eras.

72 O número de esferas que podem tocar uma esfera central em seis dimensões. Resultado de 360 dividido por 5 (360/5). Na Cabala, há 72 nomes de Deus. Uma vida = um "Grande Dia" precessional ou o 360ª de um Grande Ano = 72 anos. A regra do 72: *Quanto tempo vai demorar para o meu dinheiro duplicar?* Se a taxa de juros é de 6%, então vai demorar 72/3 = 12 anos. Você também pode usar 71 e 70.

73 No calendário maia, 73 *Tzolkin* = 52 *Haab*. É o resultado de 365/5 e aparece em antigos relógios anuais.

76 O número de anos entre as aparições do cometa Halley.

78 O número de cartas em um baralho de Tarô completo: 22 arcanos maiores e 56 menores. É um número triangular e a soma de todos os números de 1 a 12. O número de total de presentes que aparecem na canção "Twelve Days of Christmas".[1]

81 É o quadrado de nove (9^2). Também é igual a 3^4. Existem 81 elementos estáveis (Tabela Periódica).

89 O número Fibonacci comum em girassóis.

91 Equivalente a um quarto de um ano e igual a 7 x 13. É um número piramidal quadrado e a soma dos seis primeiros quadrados ($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$).

92 O número de elementos que podem ocorrer na natureza. Todos os outros se mostram transitórios sob condições de laboratório.

97 O número de anos bissextos a cada quatrocentos anos, no calendário gregoriano. O número de cartas no baralho Minchiate, que é similar ao Tarô, mas com um conjunto maior de trunfos: 78 cartas (*ver 78 no glossário*) mais quatro virtudes, quatro elementos e doze signos do zodíaco.

99 O número de nomes de Alá no islamismo. O número de luas cheias que ocorrem durante oito anos.

100 Equivalente a 10 x 10 em qualquer base.

107 A distância entre o Sol e a Terra é equivalente a 107 diâmetros solares (*ver número 109*).

108 O resultado de $1^1 \times 2^2 \times 3^3$. O número de contas nos cordões de oração (rosários) hindu e budista.

109 O diâmetro do Sol é 109 vezes maior do que o diâmetro da Terra.

111 A soma nas linhas de um quadrado mágico de 6 x 6. O número de diâmetros da Lua que equivale à distância entre a Lua e a Terra.

120 O resultado de 1 x 2 x 3 x 4 x 5. É um número triangular e tetraédrico.

121 Equivalente a onze ao quadrado (11^2).

125 Equivalente a cinco ao cubo (5^3).

128 O resultado de 2^7. O maior número que não é igual à soma de quadrados distintos.

144 Equivalente a doze ao quadrado (12^2). É o único quadrado composto que aparece na sequência Fibonacci.

---

[1] Em português, "*Doze Dias de Natal*". É uma canção natalina em inglês que enumera uma série de presentes em quantidade cada vez maior, conforme a música avança, e que são dados em cada um dos doze dias de Natal (os dias de festa que começam em 25 de dezembro e terminam em 5 de janeiro, ou 6 de janeiro dependendo da tradição). Acredita-se que sua origem seja francesa, apesar de ter sido publicada pela primeira vez na Inglaterra, em 1780, sem a música, apenas como um canto ou rima (segundo informação disponível no *The Oxford Dictionary of Nursery Rhymes*. Oxford University Press, 1951). (N. T.)

153 É o número de peixes que aparecem na rede dos apóstolos de Jesus, na chamada "segunda pesca milagrosa" que acontece depois da ressurreição de Jesus, segundo o último capítulo do Evangelho de João (João 21,1-14). Também é o resultado de $(1^3 + 3^3 + 5^3) = (1! + 2! + 3! + 4! + 5!)$ = o quadrado do número de luas cheias em um ano. A aproximação de Arquimedes para $\sqrt{3}$ era 256/153.

169 Equivalente a treze ao quadrado (13^2).

175 A soma nas linhas de um quadrado mágico de 7 x 7.

206 Número de ossos no corpo de um ser humano adulto.

216 É o *número nupcial* de Platão (descrito no Livro VIII de *A República*, em uma passagem considerada extremamente enigmática, é também chamado *número geométrico*). O menor cubo que é soma de três outros cubos: $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$. O dobro de 108.

219 Há 219 grupos de simetria tridimensional.

220 Um membro do menor par amigável com 284, com os fatores de cada um somando-se ao outro.

235 O número de luas cheias em um Ciclo Metônico de dezenove anos.

243 Equivalente a 3^5. Aparece no *lemma*, o semitom pitagórico 256:243 entre a terceira e a quarta notas.

256 Equivalente a 2^8. Nos computadores, o número máximo de valores diferentes em um *byte* (representados por pelo menos oito *bits*).

260 O número de dias (20 x 13 = 260) no calendário maia *Tzolkin*. A soma mágica de um quadrado mágico de 8 x 8.

284 Amigável com 220, com sua soma resultando em 504.

300 Os bebês nascem com 300 ossos.

343 O cubo de sete (7^3).

354 O número de dias em doze luas cheias, e em um ano lunar ou islâmico.

360 O resultado de 3 x 4 x 5 x 6. O número de graus em um círculo. No calendário maia, corresponde ao número de dias em um *tun* (1 *tun* = 18 *winals*, sendo que 1 *winal* = 20 *kins* ou dias; ou seja, 1 *tun* = 18 x 20 dias = 360 dias).

361 É o quadrado de dezenove (19^2). O tabuleiro do jogo chinês Go é composto por uma grade de 19 x 19 linhas.

364 O número de pontos em um maço de cartas de baralho, contando que J (valete) = 11, Q (dama) = 12, K (rei) = 13. Também é o resultado de 4 x 7 x 13.

365 O calendário maia *Haab* consistia de dezoito meses de vinte dias cada, mais cinco dias adicionados (*Wayeb*) para completar 365 dias.

369 A soma mágica de um quadrado mágico de 9 x 9.

384 O número raiz para a escala musical pitagórica.

400 O Sol é 400 vezes maior do que a Lua, e 400 vezes mais distante.

432 O resultado de 72 x 6 e de 108 x 4. A segunda nota na escala pitagórica, 9/8 para cima a partir de 384.

486 A terça maior pitagórica, dois tons acima de 384.

496 O terceiro número perfeito, é a soma de seus fatores.

504 O resultado de 7 x 8 x 9.

512 A nona potência de dois (2^9) e o cubo de oito (8^3). A quarta da escala pitagórica, 4:3 (ou 9/8 x 9/8 x 256/243) para cima a partir de 384.

540 É a metade de 1.080. Na mitologia nórdica, há 540 portas duplas no caminho para Valhala (o majestoso e enorme salão situado em Asgard, o reino dos deuses, dominado por Odin).

576 O quadrado de 24 (24^2). A quinta perfeita, 3:2 para cima a partir de 384.

584 É o período sinódico de Vênus em dias. O resultado de 8 x 73.

648 A sexta pitagórica, 3:2 para cima a partir da segunda (432).

666 A soma dos números 1 a 36. O princípio *yang* (masculino) em gematria. A soma dos seis primeiros numerais romanos (I V X L C D).

720 O resultado de 6! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 8 x 9 x 10. Também é o dobro de 360 (2 x 360).

729 O cubo de nove (9^3). É a sétima pitagórica, 3:2 para cima a partir da terça (486). Aparece em *A República* de Platão.

780 É o período sinódico de Marte em dias. O resultado de 13 x 60.

873 O resultado de 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!.

880 O número de quadrados mágicos de 4 x 4 que são substancialmente diferentes.

1.000 O cubo de 10 em qualquer base.

1.080 O resultado de $2^3 \times 3^3 \times 5$. Um número canônico. O princípio *yin* (feminino) em gematria. O raio da Lua em milhas.

1.225 O segundo número triangular e quadrado. É o quadrado de 35 (35^2).

1.331 O cubo de onze (11^3).

1.461 O número de dias em quatro anos.

1.540 É um dos únicos cinco números que são simultaneamente triangulares *e* tetraédricos.

1.728 O cubo de doze (12^3). É a quantidade de polegadas cúbicas em um pé cúbico.

1.746 Um número canônico. A soma de 666 (*yang*) e 1.080 (*yin*).

2.160 O resultado de 720 x 3. Um número canônico. Equivalente ao diâmetro da Lua em milhas. O número de anos em um "grande mês" de precessão ou era astrológica.

2.187 A sétima potência de três (3^7).

2.392 O resultado de 8 x 13 x 23. Os maias descobriram, com precisão surpreendente, que $3^4 = 81$ é o número de luas cheias que ocorrem a cada 2.392 dias.

2.920 O resultado de 584 x 5 = 365 x 8. O número de dias que Vênus leva para desenhar seu padrão pentagonal em torno da Terra.

3.168 O resultado de $2^5 \times 3^3 \times 11$. Um número canônico cuja soma dos fatores resulta em 6.660.

3.600 O quadrado de 60. O número de segundos em uma hora ou um grau.

5.040 O resultado de 7! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 = 7 x 8 x 9 x 10. É o valor aproximado dos raios da Terra e da Lua somados (em milhas).

5.913 O resultado de 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7!.

7.140 O maior número triangular e tetraédrico.

7.200 O número de dias de um ciclo *katun* (unidade de tempo) do calendário maia que corresponde a 20 *tuns* (ou 18 ciclos *winal*) de 360 dias.

7.920 O diâmetro da Terra em milhas. O resultado de 720 x 11.

8.128 O quarto número perfeito, é a soma de seus fatores.

10.000 Uma miríade.

20.736 A quarta potência de doze (12^4 = 12 x 12 x 12 x 12).

25.770 O valor atual para precessão (parece estar diminuindo, sugerindo que o Sol forma um sistema binário com Sírius).

25.920 O resultado de 12 x 2.160. O número de anos na antiga contagem ocidental para o ciclo de precessão de eras astrológicas.

26.000 O número da precessão maia.

31.680 O perímetro, em milhas, de um quadrado desenhado em torno da Terra.

40.320 O resultado de 8! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8.

45.045 O primeiro número que é simultaneamente triangular, pentagonal e hexagonal.

86.400 O número de segundos em um dia.

108.000 O número de anos em uma temporada de *Kali Yuga* (a última das quatro etapas que o mundo atravessa, como parte do ciclo de *yugas* ou eras do universo descritas nas escrituras indianas, segundo a cosmologia hindu).

142.857 A parte que se repete de todas as divisões por sete.

144.000 O número de dias em um ciclo *Baktun* no antigo calendário maia, que equivale a 20 *katuns* (20 x 7.200 dias).

248.832 A quinta potência de doze (12^5).

362.880 Equivalente a 9! e também o resultado de 2! x 3! x 3! x 7!.

365.242 O número de dias em mil anos. A quantidade de pés em um grau equatorial.

432.000 O número de anos do período final e corrupto do *Kali Yuga* hindu.

864.000 O número de anos da terceira fase da criação no hinduísmo, o semicorrupto *Dwapara Yuga*.

1.296.000 O número de anos do período *Treta Yuga* secundário no hinduísmo. O resultado de 3 x 432.000.

1.728.000 O número de anos do período hindu iniciático e altamente espiritual *Satya Yuga*. O resultado de 4 x 432.000.

1.872.000 O número de anos na longa contagem maia (termina em dezembro de 2012).

3.628.800 Equivalente a 10! e também o resultado de 6! x 7! ou 3! x 5! x 7!

4.320.000 O *Mahayuga* (unidade de tempo) hindu, um ciclo completo de *yugas*, um *Kalpa* budista.

39.916.800 Equivalente a 11! e também o resultado de 5.040 x 7.920.

OUTROS NÚMEROS

	Triangular	Quadrado	Pentagonal	Triangular centrado	Quadrado centrado	Pentagonal centrado	Retangular	Tetraédrico	Octaédrico	Cúbico	Cúbico centrado	Piramidal quadrado	Fibonacci	Lucas
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	4	5	5	2	4	6	8	9	5	1	3
3	6	9	12	10	13	13	6	10	19	27	35	14	2	4
4	10	16	22	19	25	25	12	20	44	64	91	30	3	7
5	15	25	35	31	41	41	20	35	85	125	189	55	5	11
6	21	36	51	46	61	61	30	56	146	216	341	91	8	18
7	28	49	70	64	85	85	42	84	231	343	559	140	13	29
8	36	64	92	85	113	113	56	120	344	512	855	204	21	47
9	45	81	117	109	145	145	72	165	489	729	1241	285	34	76
10	55	100	145	136	181	181	90	220	670	1000	1729	385	55	123
11	66	121	176	166	221	221	110	286	891	1331	2331	506	89	199
12	78	144	210	199	265	265	132	364	1156	1728	3059	650	144	322
13	91	169	247	235	313	313	156	455	1469	2197	3925	819	233	521
14	105	196	287	274	365	365	182	560	1834	2744	4941	1015	377	843
15	120	225	330	316	421	421	210	680	2255	3375	6119	1240	610	1364
16	136	256	376	361	481	481	240	816	2736	4096	7471	1496	987	2207
17	153	289	425	409	545	545	272	969	3281	4913	9009	1785	1597	3571
18	171	324	477	460	613	613	306	1140	3894	5832	10745	2109	2584	5778
19	190	361	532	514	685	685	342	1330	4579	6859	12691	2470	4181	9349
20	210	400	590	571	761	761	380	1540	5340	8000	14859	2870	6765	15127
21	231	441	651	631	841	841	420	1771	6181	9261	17261	3311	10946	24476
22	253	484	715	694	925	925	462	2024	7106	10648	19909	3795	17711	39603
23	276	529	782	760	1013	1013	506	2300	8119	12167	22815	4324	28657	64079
24	300	576	852	829	1105	1105	552	2600	9224	13824	25991	4900	46368	103682
25	325	625	925	901	1201	1201	600	2925	10425	15625	29449	5525	75025	167761
26	351	676	1001	976	1301	1301	650	3276	11726	17576	33201	6201	121393	271443
27	378	729	1080	1054	1405	1405	702	3654	13131	19683	37259	6930	196418	439204
28	406	784	1162	1135	1513	1513	756	4060	14644	21952	41635	7714	317811	710647
29	435	841	1247	1219	1625	1625	812	4495	16269	24389	46341	8555	514229	1149851
30	465	900	1335	1306	1741	1741	870	4960	18010	27000	51389	9455	832040	1860498
21	496	961	1426	1396	1861	1861	930	5456	19871	29791	56791	10416	1346269	3010349
32	528	1024	1520	1489	1985	1985	992	5984	21856	32768	62559	11440	2178309	4870847
33	561	1089	1617	1585	2113	2113	1056	6545	23969	35937	68705	12529	3524578	7881196
34	595	1156	1717	1684	2245	2245	1122	7140	26214	39304	75241	13685	5702887	12752043
35	630	1225	1820	1786	2381	2381	1190	7770	28595	42875	82179	14910	9227465	20633239
36	666	1296	1926	1891	2521	2521	1260	8436	31116	46656	89531	16206	14930352	33385282

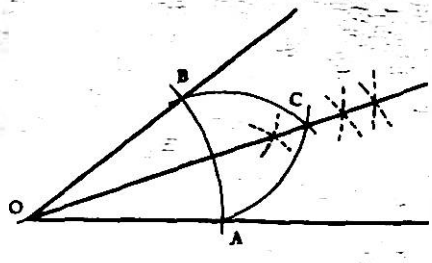
Números PRIMOS

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179
181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367
373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 559 571
577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773
787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009

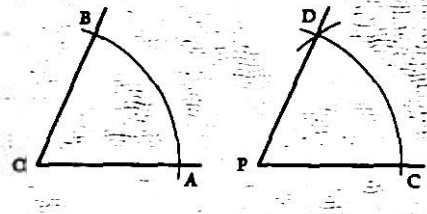
CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

A pequena seleção de construções apresentadas aqui, retiradas de *Ruler & Compass*, de Andrew Sutton, são oferecidas para ajudar o estudioso da Geometria Sagrada. Elas utilizam um código simples: **linha AB** significa *trace uma linha reta que passa por A e B*. O termo **segmento** é usado no lugar de **linha** para a seção de uma linha reta definida por dois pontos, um em cada extremidade. **Círculo O-A** significa *desenhe um círculo com centro em O e passando por A* (circunferência).

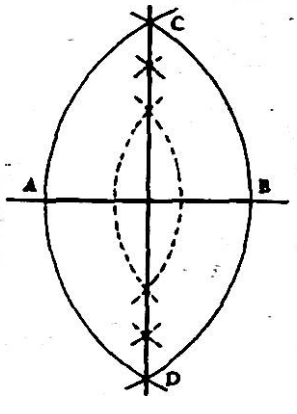
Círculo de raio AB e centro O significa *desenhe um círculo com o compasso aberto no comprimento AB e centrado em O*. O termo **arco** é usado no lugar de **círculo** para desenhar apenas uma parte do círculo. Algumas vezes, pontos extras são fornecidos para ajudar a melhorar a precisão quando se desenha, como, por exemplo, a *linha ACB* ou o *círculo O-AB*. Pontos recém-descobertos são anotados em colchetes. Ocasionalmente, uma linha possibilitada por novos pontos é considerada como se já tivesse sido desenhada e, assim, apenas mencionada.



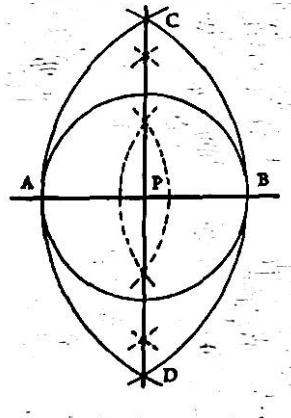
Dividindo um ângulo:
1. Centro do arco O (A, B);
2. Arcos A-B, B-A (C), alternativas aparecem tracejadas; 3. Linha OC;
∠AOC = ∠BOC = 1/2∠AOB



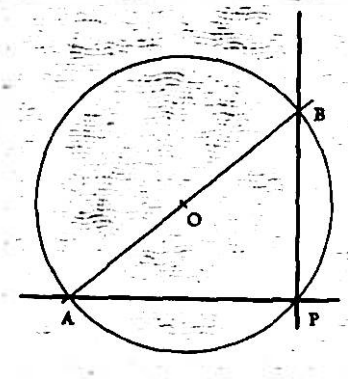
Cópia de um ângulo em uma determinada linha:
1. Centro do arco O (A, B);
2. Raio do arco OA, centro P (C);
3. Raio do arco AB, centro C (D);
4. Linha PD;
∠CPD = ∠AOB



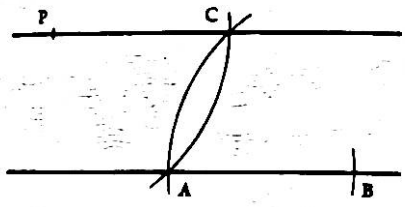
Mediatriz de um dado segmento AB:
1. Arcos de raios iguais, centros em A e B (intersecção em C e D);
2. Linha CD



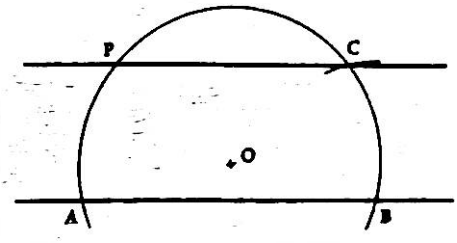
Perpendicular através de um ponto P em uma linha:
1. Círculo com centro P (A, B);
2. Arcos de raios iguais, com centros em A e B (intersecção em C e D);
3. Linha CPD



Perpendicular através de um ponto P em uma linha:
1. Para qualquer ponto O que não esteja na linha, trace um círculo O-P (A);
2. Linha AO (B);
3. A linha PB é perpendicular à linha AP

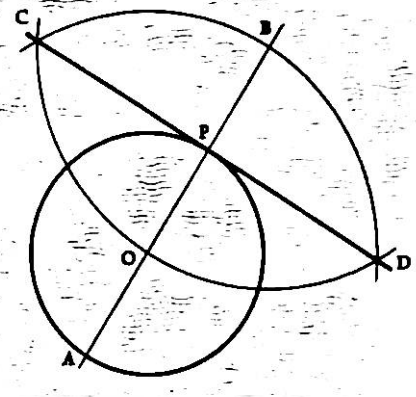


Paralelas através de um ponto P dado:
1. *Arco com qualquer raio adequado e centro em P (A);*
2. *Arco de mesmo raio, centro em A (B);*
3. *Arco de mesmo raio, centro em B (C).*
A linha PC é paralela à linha AB.

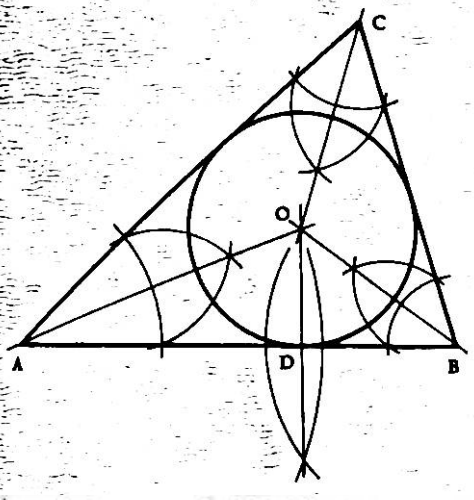


Linha paralela passando por um ponto P dado:
1. *Arco O-P a partir de qualquer centro adequado O (A, B);*
2. *Arco de raio AP com centro em B (C).*
A linha PC é paralela à linha AB.

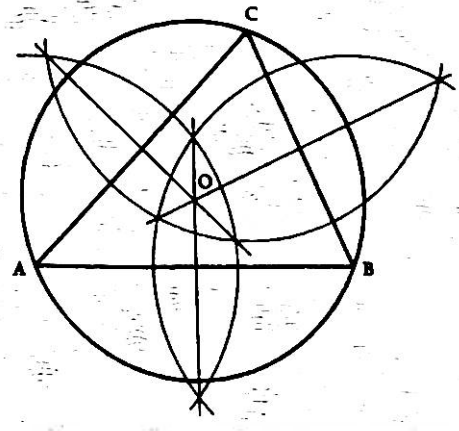
Linha paralela a determinada distância:
1. *Arco com raio igual a uma distância dada, centro em quaisquer dois pontos A e B na linha;*
2. *A linha que toca os arcos (tangente), como mostrado na figura, é paralela à linha AB.*



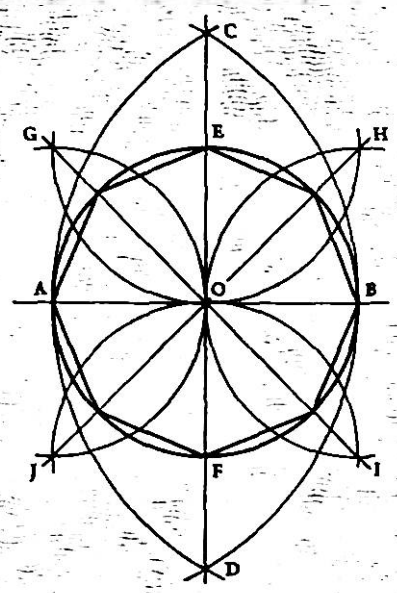
Linha tangente a um círculo:
1. *Linha OP (A);*
2. *Arco de raio PA e centro O (B);*
3. *Arco B-O (linha CPD).*
A linha CPD é tangente ao círculo no ponto P.



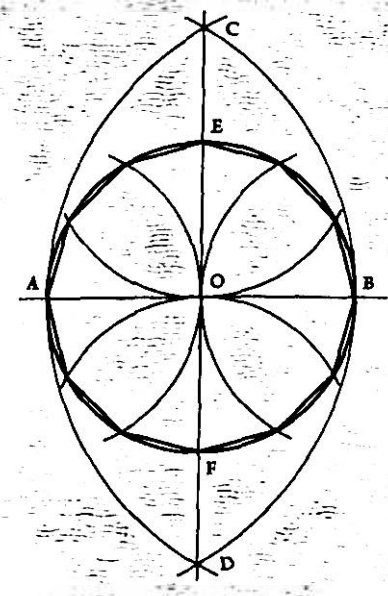
Incentro e circunferência inscrita de um triângulo:
1. *Dividir os ângulos do triângulo:*
∠CAB, ∠ABC, ∠BCA (O);
2. *Perpendicular à aresta AB através de O (D);*
3. *Círculo O-D.*



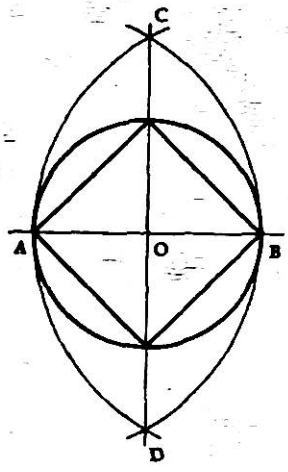
Circuncentro e circunferência circunscrita de um triângulo:
1. *Mediatrizes de AB, BC, CA (O);*
2. *Círculo O-ABC.*



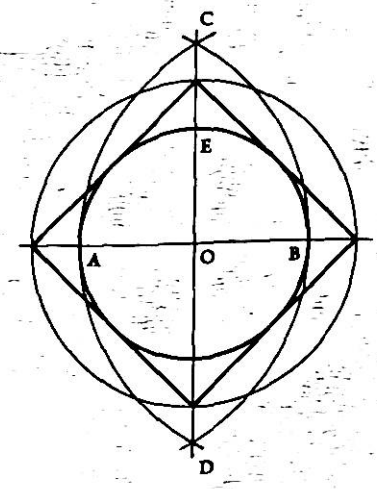
Octógono regular em um círculo:
1. *Linha através do centro O (A, B);*
2. *Arcos A-B, B-A (linha CEFD);*
3. *Arcos A-O, E-O, B-O, F-O (G, H, I, J);*
4. *Linhas GI, HJ e completar a figura (ligando os pontos na circunferência).*



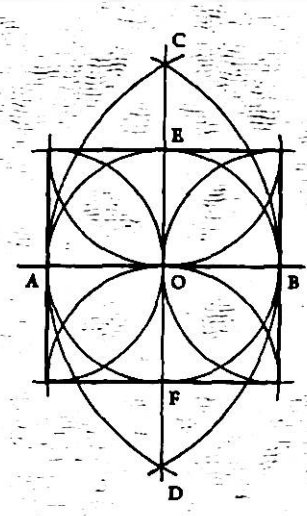
Dodecágono regular em um círculo:
1. *Linha através do centro O (A, B);*
2. *Arcos A-B, B-A (linha CEFD);*
3. *Arcos A-O, E-O, B-O, F-O e completar a figura (ligando os pontos na circunferência).*



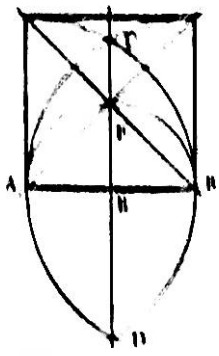
Quadrado em um círculo:
1. *Linha através do centro O (A, B);*
2. *Arcos A-B, B-A;*
3. *Linha CD e completar a figura (ligando os pontos).*



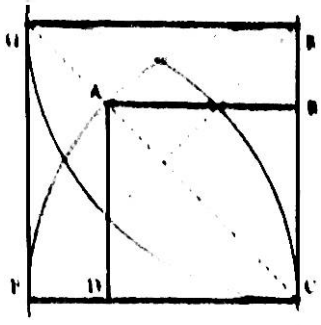
Quadrado em torno de um círculo:
1. *Linha através do centro O (A, B);*
2. *Arcos A-B, B-A (linha CED);*
3. *Círculo com raio AE e centro O e completar desenhando o quadrado.*



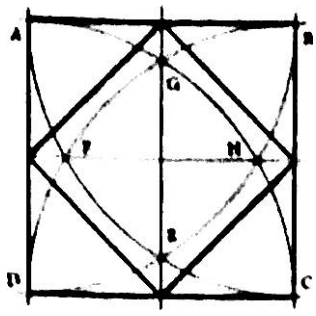
Quadrado definido ortogonalmente em dada linha:
1. *Círculo com centro em O na linha (A, B);*
2. *Arcos A-B, B-A (linha CEFD);*
3. *Arcos A-O, B-O, E-O, F-O e completar a figura (ligando os pontos).*



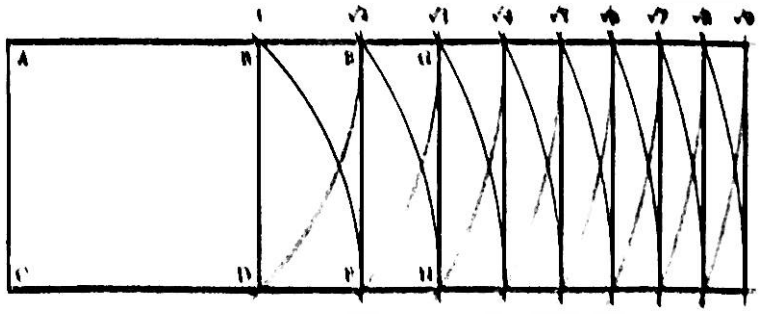
Quadrado em determinado lado:
1. Arco A-B, B-A (linha CBD);
2. Arco B-AB (F);
3. Linhas AF, BF e completar a figura.



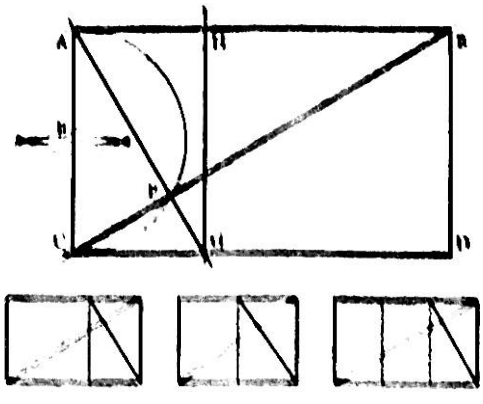
Duplicando um quadrado:
1. Estender as linhas CB e CD;
2. Arco C-A (E, F);
3. Arco F-C, E-C (G) e completar a figura.
Para reduzir o quadrado GBCF pela metade, inclino as linhas pontilhadas.



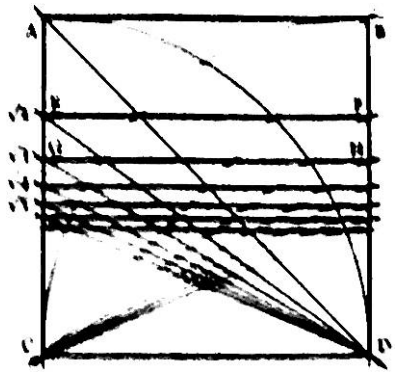
Reduzindo um quadrado pela metade:
1. Arco A-BD, B-AC, C-BD, D-AC (E para H);
2. Linhas EG, FH e completar a figura.



Retângulos originados a partir de um quadrado:
1. Estender as linhas AB e CD;
2. Arco A-D e B-C (E, F e retângulo √2);
3. Arco A-F e B-E (G, H e retângulo √3) ... e assim por diante.



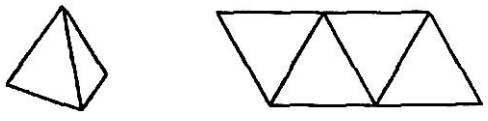
Diagonal e recíproca de um retângulo:
1. Linha BC;
2. Determinar o ponto médio de AC (E);
3. Semicírculo B-AC (F), 4. Linha AF (G);
5. Arco com raio CG e centro A (linha GD).



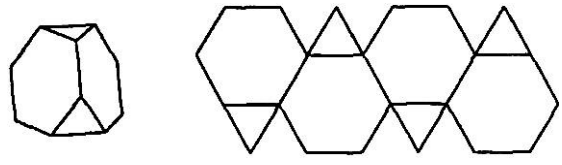
Retângulos traçados dentro de um quadrado:
1. Linhas AD e BC;
2. Arco C-AD e D-BC (linha EF e retângulo √2);
3. Linhas EH e FG (linha GH e retângulo √3) ... e assim por diante.

POLIEDROS PLANIFICADOS

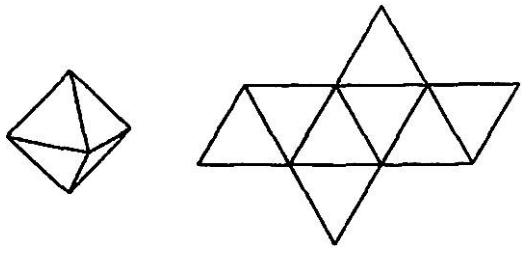
Se um poliedro for "desfeito", ao longo de algumas de suas arestas, e desdobrado no plano (como uma embalagem aberta), o resultado é conhecido como a *rede* desse poliedro. Os primeiros exemplos conhecidos de poliedros apresentados desta forma são encontrados no *Painter's Manual* (Manual do Pintor)[1] de Albrecht Dürer, de 1525. As redes abaixo são dimensionadas de tal forma que, se forem remontadas, todos os poliedros resultantes terão esferas circunscritas de igual tamanho.



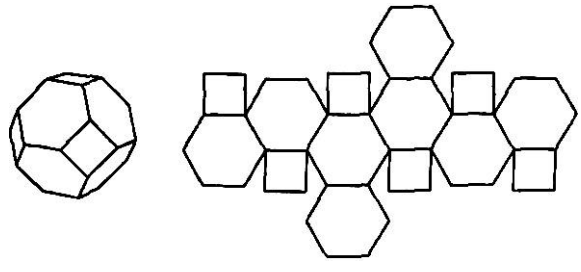
Tetraedro



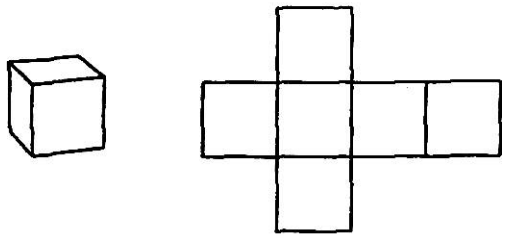
Tetraedro truncado



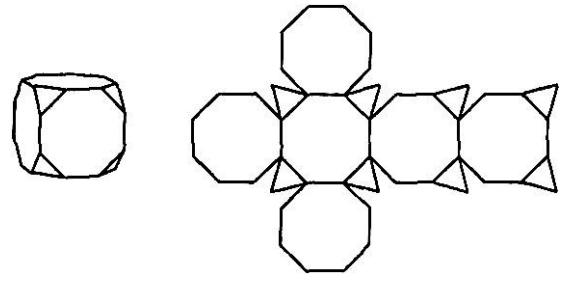
Octaedro



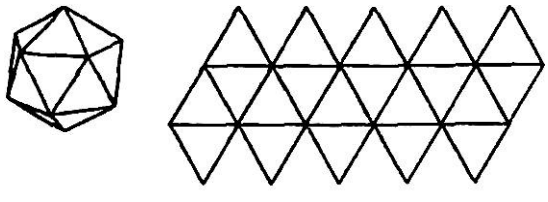
Octaedro truncado



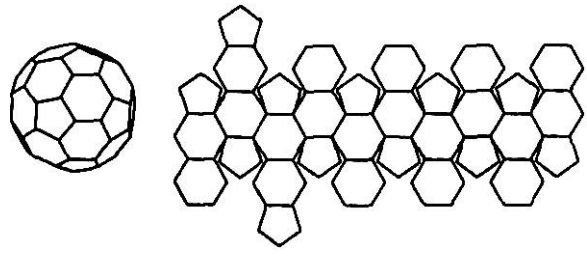
Cubo



Cubo truncado

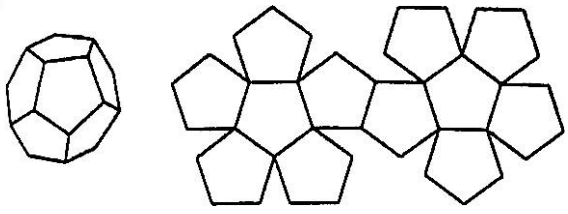


Icosaedro

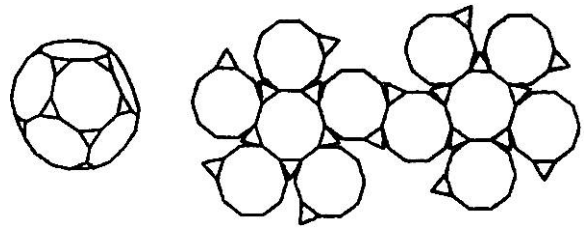


Icosaedro truncado

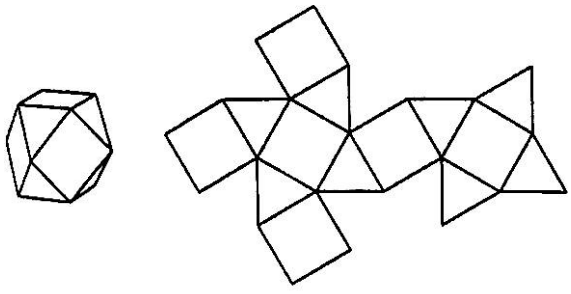
[1] Sem edição em português. (N. T.)



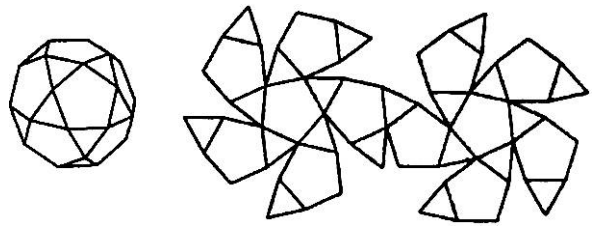
Dodecaedro



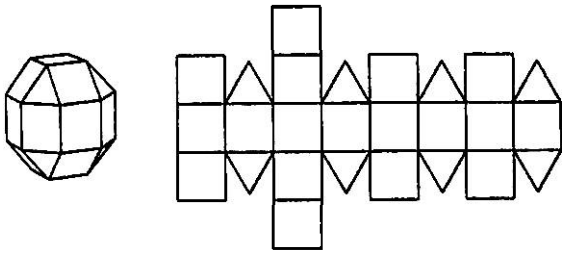
Dodecaedro truncado



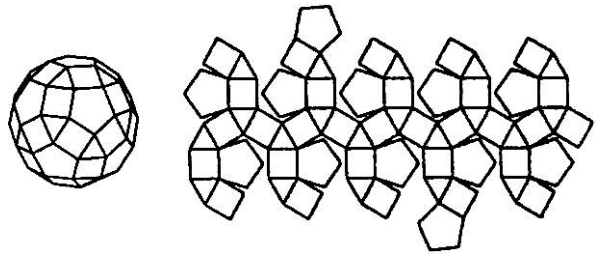
Cuboctaedro



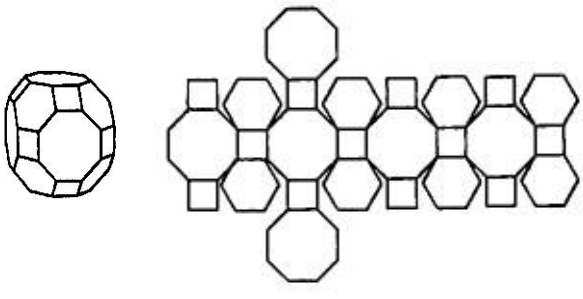
Icosidodecaedro



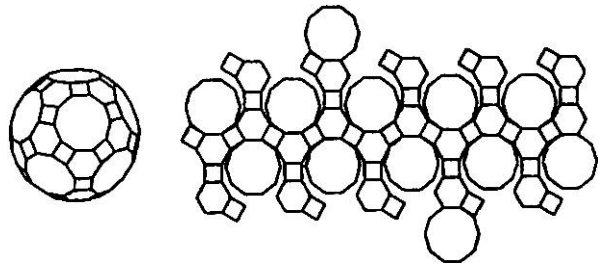
Rombicuboctaedro



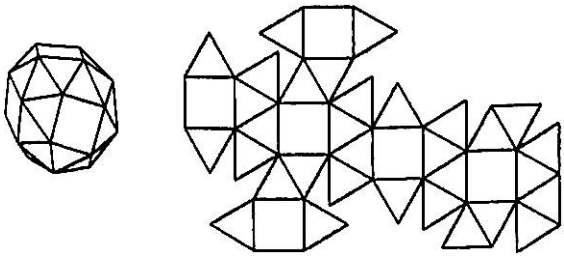
Rombicosidodecaedro



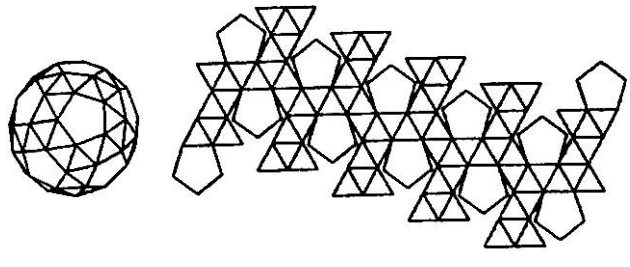
Grande rombicuboctaedro



Grande rombicosidodecaedro



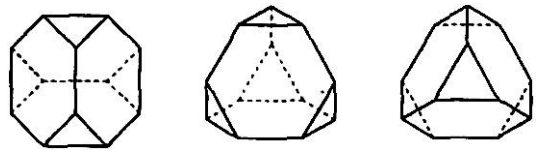
Cubo snub



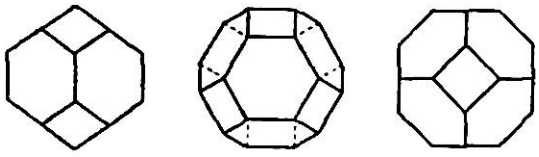
Dodecaedro snub

SIMETRIAS DE ARQUIMEDES

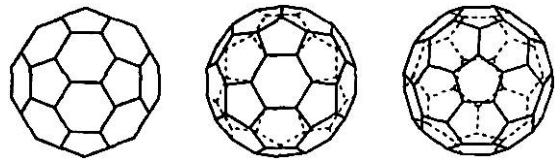
Os diagramas abaixo mostram as simetrias de rotação dos sólidos de Arquimedes e dos dois duais rômbicos de Arquimedes.



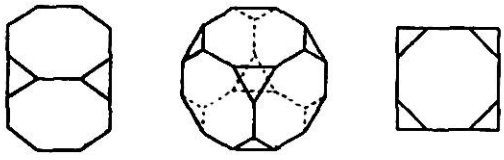
Tetraedro truncado



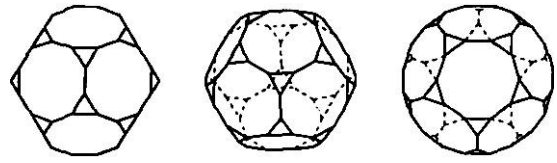
Octaedro truncado



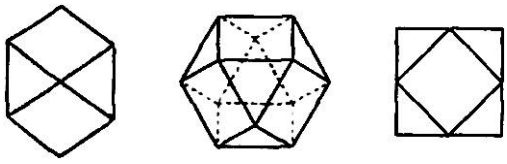
Icosaedro truncado



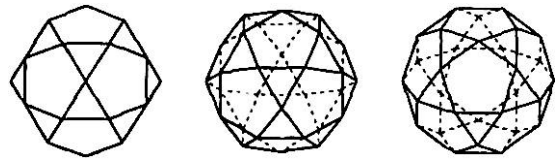
Cubo truncado



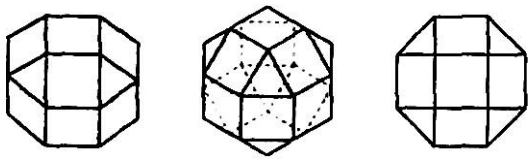
Dodecaedro truncado



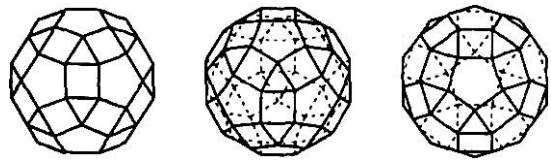
Cuboctaedro



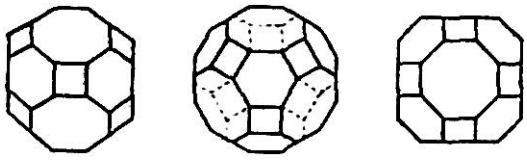
Icosidodecaedro



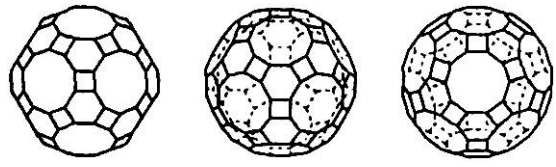
Rombicuboctaedro



Rombicosidodecaedro



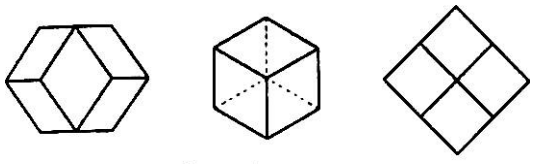
Grande rombicuboctaedro



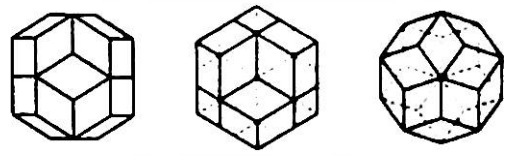
Grande rombicosidodecaedro

Cubo snub

Dodecaedro snub



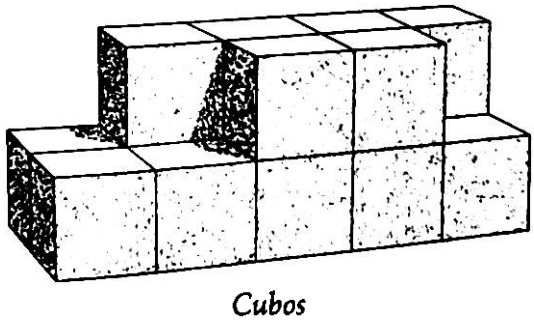
Dodecaedro rômbico



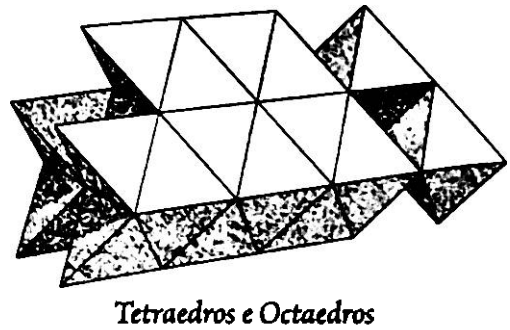
Triacontaedro rômbico

TESSELAÇÕES TRIDIMENSIONAIS

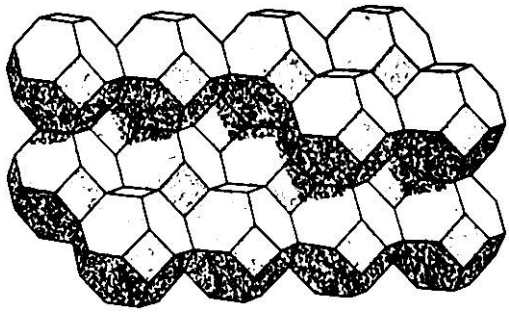
Dos sólidos platônicos, apenas o cubo pode preencher o espaço com cópias de si mesmo sem deixar lacunas. Além deste, o único preenchimento do espaço que é puramente "platônico" combina tetraedros e octaedros. Um dos sólidos de Arquimedes, o octaedro truncado, e o dodecaedro rômbico (que é um dual de Arquimedes), também são poliedros que preenchem o espaço.



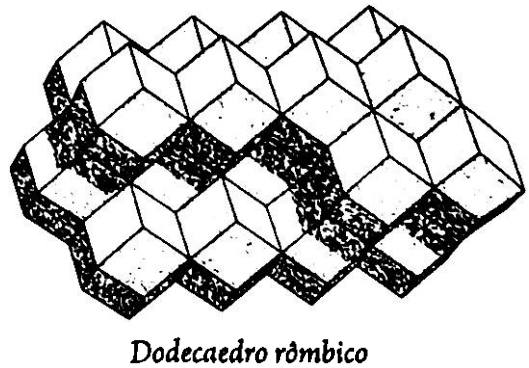
Cubos



Tetraedros e Octaedros

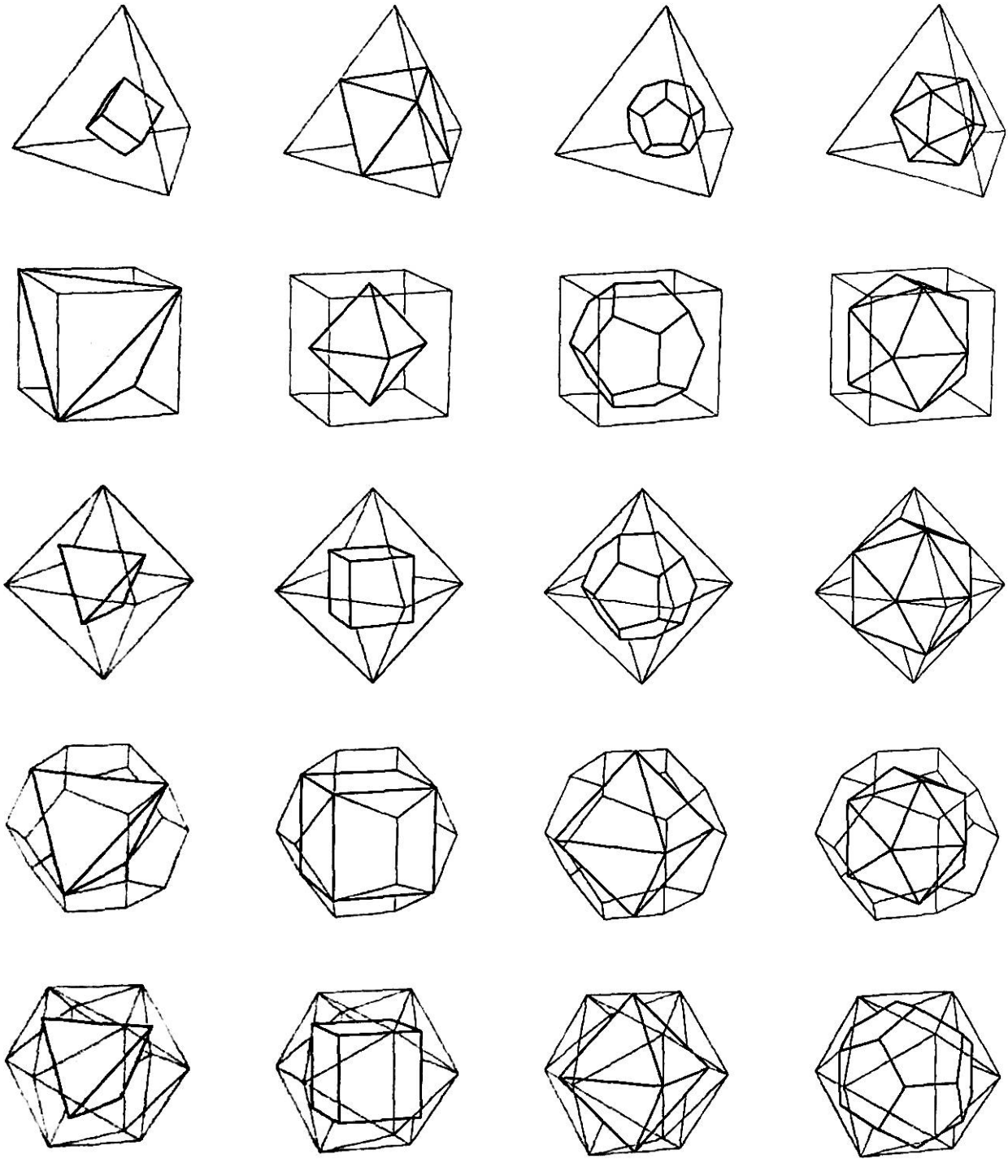


Octaedro truncado



Dodecaedro rômbico

CADA SÓLIDO ENVOLVENDO TODOS OS DEMAIS



FÓRMULAS DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS

Um tema recorrente nas propriedades métricas dos sólidos platônicos é a ocorrência dos números irracionais Φ (a seção áurea) e das raízes quadradas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. Eles são surpreendentemente elegantes quando expressos como frações contínuas.

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}}}} \qquad \sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}}}}} \qquad \sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}}}} \qquad \sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}}}}}}}$$

Suas expansões decimais em doze casas, juntamente com a de π (pi), são:

Φ = 1,618033988750 $\sqrt{2}$ = 1,414213562373 $\sqrt{3}$ = 1,732050807569
$\sqrt{5}$ = 2,236067977500 π = 3,141592653590

A tabela abaixo apresenta os volumes e as áreas de superfície para uma esfera de raio r, e para os sólidos platônicos com comprimento de aresta s. Também estão incluídos os trajetos proporcionais que unem cada vértice a todos os demais, nos sólidos platônicos.

	Volume	*Área de superfície*	*Nº de trajetos, comprimento*
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	não disponível
Tetraedro	$\frac{\sqrt{2}}{12}s^3$	$\sqrt{3}s^2$	6 arestas, s
Octaedro	$\frac{\sqrt{2}}{3}s^3$	$2\sqrt{3}s^2$	12 arestas, s 3 diagonais axiais, $\sqrt{2}s$
Cubo	s^3	$6s^2$	12 arestas, s 12 diagonais de face (tetraedros inscritos), $\sqrt{2}s$ 4 diagonais axiais, $\sqrt{3}s$
Icosaedro	$\frac{5}{6}\Phi^2 s^3$	$5\sqrt{3}s^2$	30 arestas, s 30 diagonais de face, Φs 6 diagonais axiais, $\sqrt{(\Phi^2+1)}s$
Dodecaedro	$\frac{\sqrt{5}}{2}\Phi^4 s^3$	$3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}s^2$	30 arestas, s 60 diagonais de face (cubos inscritos), Φs 60 diagonais interiores (tetraedros inscritos), $\sqrt{2}\Phi s$ 30 diagonais interiores, $\Phi^2 s$ 10 diagonais axiais, $\sqrt{3}\Phi s$

TABELA DE DADOS DOS POLIEDROS

	Simetria[1]	*Vértices*	*Arestas*	*Faces (Total)*	*Faces (Tipos)*
Tetraedro	Tetr.	4	6	4	4 triângulos
Cubo	Oct.	8	12	6	6 quadrados
Octaedro	Oct.	6	12	8	8 triângulos
Dodecaedro	Icos.	20	30	12	12 pentágonos
Icosaedro	Icos.	12	30	20	20 triângulos
Dodecaedro estrelado	Icos.	12	30	12	12 pentagramas
Grande dodecaedro	Icos.	12	30	12	12 pentágonos
Grande dodecaedro estrelado	Icos.	20	30	12	12 pentagramas
Grande icosaedro	Icos.	12	30	20	20 triângulos
Cuboctaedro	Oct.	12	24	14	8 triângulos 6 quadrados
Icosidodecaedro	Icos.	30	60	32	20 triângulos 12 pentágonos
Tetraedro truncado	Tetr.	12	18	8	4 triângulos 4 hexágonos
Cubo truncado	Oct.	24	36	14	8 triângulos 6 octógonos
Octaedro truncado	Oct.	24	36	14	6 quadrados 8 hexágonos
Dodecaedro truncado	Icos.	60	90	32	20 triângulos 12 decágonos
Icosaedro truncado	Icos.	60	90	32	12 pentágonos 20 hexágonos
Rombicuboctaedro	Oct.	24	48	26	8 triângulos 18 quadrados
Grande rombicuboctaedro	Oct.	48	72	26	12 quadrados 8 hexágonos 6 octágonos
Rombicosidodecaedro	Icos.	60	120	62	20 triângulos 30 quadrados 12 pentágonos
Grande rombicosidodecaedro	Icos.	120	180	62	30 quadrados 20 hexágonos 12 decágonos
Cubo snub	Oct.-[2]	24	60	38	32 triângulos 6 quadrados
Dodecaedro snub	Icos.-[2]	60	150	92	80 triângulos 12 pentágonos

[1] *Simetrias*: Tetraédrica: eixos 4 x 3 (triplos), 3 x 2 (duplos), 6 planos espelho; Octaédrica: eixos 3 x 4 (quádruplos), 4 x 3 (triplos), 6 x 2 (duplos), 9 planos espelho; Icosaédrica: eixos 6 x 5 (quíntuplos), 10 x 3 (triplos), 15 x 2 (duplos), 15 planos espelho.

[2] Os sólidos *snub* não possuem planos espelho.

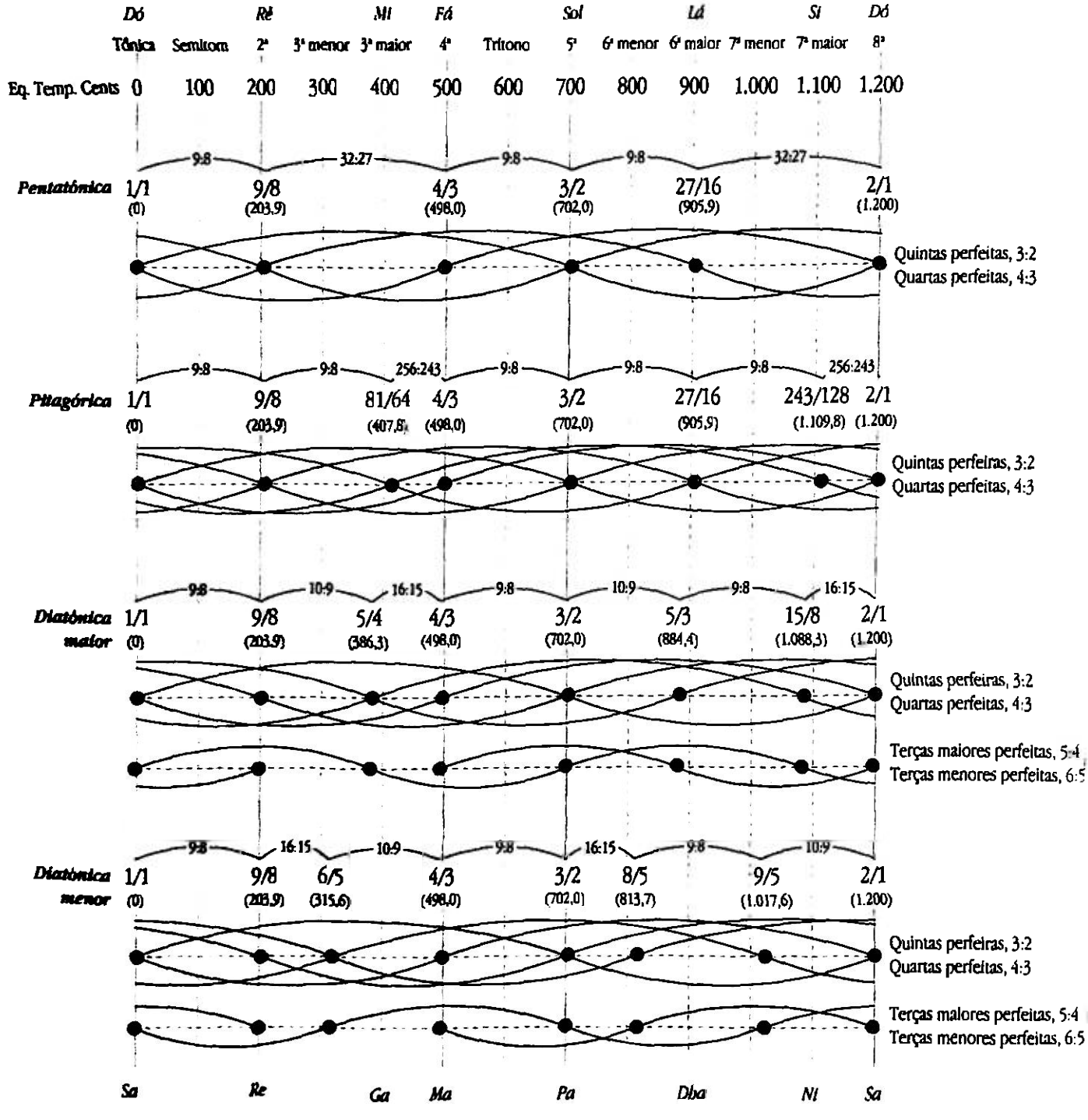
Inraio [3] *Circunraio*	*Raio da interesfera* [3] *Circunraio*	*Comprimento de aresta* [3] *Circunraio*	*Ângulos diedros* [4]	*Ângulo central* [5]
0,3333333333	0,5773502692	1,6329931619	70°31'44"	109°28'16"
0,5773502692	0,8164965809	1,1547005384	90°00'00"	70°31'44"
0,5773502692	0,7071067812	1,4142135624	109°28'16"	90°00'00"
0,7946544723	0,9341723590	0,7136441795	116°33'54"	41°48'37"
0,7946544723	0,8506508084	1,0514622242	138°11'23"	63°26'06"
0,4472135955	0,5257311121	1,7013016167	116°33'54"	116°33'54"
0,4472135955	0,8506508084	1,0514622242	63°26'06"	63°26'06"
0,1875924741	0,3568220898	1,8683447179	63°26'06"	138°11'23"
0,1875924741	0,5257311121	1,7013016167	41°48'37"	116°33'54"
0,8164965809 0,7071067812	0,8660254038	1,0000000000	125°15'52"	60°00'00"
0,9341723590 0,8506508084	0,9510565163	0,6180339887	142°37'21"	36°00'00"
0,8703882798 0,5222329679	0,9045340337	0,8528028654	70°31'44" 109°28'16"	50°28'44"
0,9458621650 0,6785983445	0,9596829823	0,5621692754	90°00'00" 125°15'52"	32°39'00"
0,8944271910 0,7745966692	0,9486832981	0,6324555320	109°28'16" 125°15'52"	36°52'12"
0,9809163757 0,8385051474	0,9857219193	0,3367628118	116°33'54" 142°37'21"	19°23'15"
0,9392336205 0,9149583817	0,9794320855	0,4035482123	138°11'23" 142°37'21"	23°16'53"
0,9108680249 0,8628562095	0,9339488311	0,7148134887	135°00'00" 144°44'08"	41°52'55"
0,9523198087 0,9021230715 0,8259425910	0,9764509762	0,4314788105	125°15'52" 135°00'00" 144°44'08"	24°55'04"
0,9659953695 0,9485360199 0,9245941063	0,9746077624	0,4478379596	148°16'57" 159°05'41"	25°52'43"
0,9825566436 0,9647979663 0,9049441875	0,9913166895	0,2629921751	142°37'21" 148°16'57" 159°05'41"	15°06'44"
0,9029870683 0,8503402074	0,9281913780	0,7442063312	142°59'00" 153°14'05"	43°41'27"
0,9634723304 0,9188614921	0,9727328506	0,4638568806	152°55'48" 164°10'31"	26°49'17"

[3] A partir do centro do poliedro, o inraio é medido até os vários centros das faces; o raio da interesfera é medido até os pontos médios das arestas; e o circunraio é medido até os vértices.

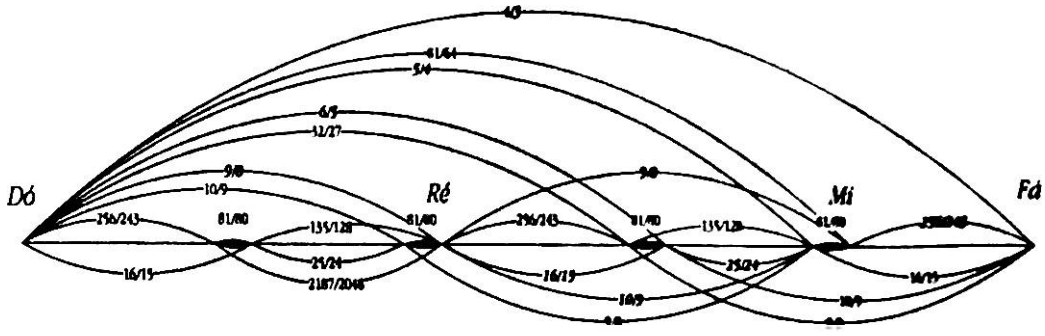
[4] Nos sólidos de Arquimedes, os maiores ângulos diedros são encontrados entre os menores pares de faces.

[5] O ângulo central é o ângulo formado, no centro de um poliedro, quando se unem as extremidades de uma aresta a esse centro.

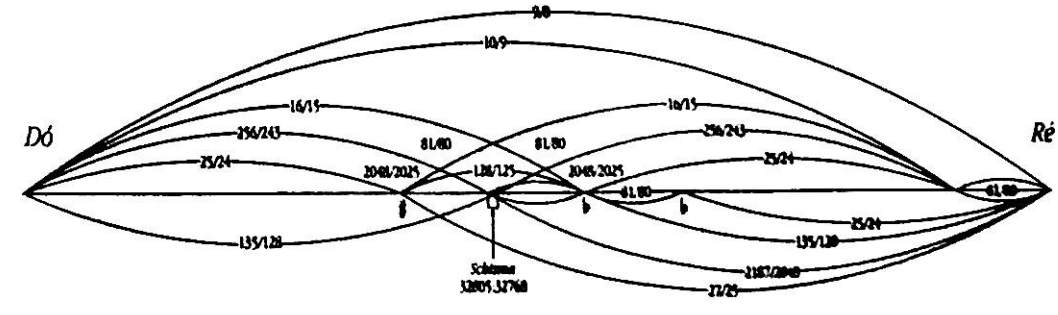
ALGUMAS AFINAÇÕES EM DESTAQUE



INTERVALOS MUSICAIS SELECIONADOS

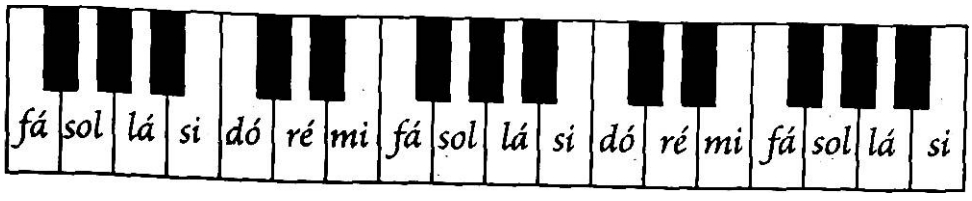


Intervalo	*Cents*	*Nome*	*Intervalo*	*Cents*	*Nome*
1:1	0	*Uníssono*	5:4	386,3	*Terça maior perfeita*
32805:32768	2,0	*Schisma*	81:64	407,8	*Terça maior pitagórica*
2048:2025	19,6	*Diaschisma*	4:3	498,0	*Quarta perfeita*
81:80	21,5	*Coma sintônica*	7:5	582,5	*Sétimo trítono*
531441:524288	23,5	*Coma pitagórica*	45:32	590,2	*Trítono diatônico*
128:125	41,1	*Dièse (sustenido)*	729:512	611,7	*Trítono pitagórico*
25:24	70,7	*Semitom diatônico menor*	3:2	702,0	*Quinta perfeita*
256:243	90,2	*Limma, semitom pitagórico*	128:81	792,2	*Sexta menor pitagórica*
135:128	92,2	*Croma maior*	8:5	813,7	*Sexta menor diatônica*
16:15	111,7	*Semitom diatônico maior*	5:3	884,4	*Sexta maior perfeita*
2187:2048	113,7	*Apótoma*	27:16	905,9	*Sexta maior pitagórica*
27:25	133,2	*Limma ampla*	7:4	968,8	*Sétima harmônica*
10:9	182,4	*Tom menor*	16:9	996,1	*Sétima menor pitagórica*
9:8	203,9	*Tom maior*	9:5	1.017,6	*Sétima menor diatônica*
8:7	231,2	*Sétimo tom*	15:8	1.088,3	*Sétima maior diatônica*
7:6	266,9	*Sétima terça menor*	243:128	1.109,8	*Sétima maior pitagórica*
32:27	294,1	*Terça menor pitagórica*	2:1	1.200	*Oitava*
6:5	315,6	*Terça menor perfeita*			



Assim como a divisão descentralizada da oitava em quintas e quartas, os sustenidos não são bemóis, e dão origem a mais cinco notas, totalizando dezessete (encontradas em afinações do Oriente Médio). De forma mais completa, podemos pensar nas sete notas da escala movendo-se através de doze "regiões" da oitava, o que resulta nas 22 posições da afinação indiana.

OS MODOS GREGOS



Nomes modernos	Os Sete Modos da Antiguidade		Nomes gregos antigos
Jônio *maior*	1 1 ½ 1 1 1 ½ dó ré mi fá sol lá si dó	dó ré mi fá sol lá si dó 1 2 3 4 5 6 7 8	Lídio
Dórico	1 ½ 1 1 1 ½ 1 ré mi fá sol lá si dó ré	ré mi fá sol lá si dó ré 1 2 3♭ 4 5 6 7♭ 8	Frígio
Frígio	½ 1 1 1 ½ 1 1 mi fá sol lá si dó ré mi	mi fá sol lá si dó ré mi 1 2♭ 3♭ 4 5 6♭ 7♭ 8	Dórico
Lídio	1 1 1 ½ 1 1 ½ fá sol lá si dó ré mi fá	fá sol lá si dó ré mi fá 1 2 3 4# 5 6 7 8	Sintolídio
Mixolídio	1 1 ½ 1 1 ½ 1 sol lá si dó ré mi fá sol	sol lá si dó ré mi fá sol 1 2 3 4 5 6 7♭ 8	Jônio
Eólio *menor natural*	1 ½ 1 1 ½ 1 1 lá si dó ré mi fá sol lá	lá si dó ré mi fá sol lá 1 2 3♭ 4 5 6♭ 7♭ 8	Eólio
Lócrio	½ 1 1 ½ 1 1 1 si dó ré mi fá sol lá si	si dó ré mi fá sol lá si 1 2♭ 3♭ 4 5♭ 6♭ 7♭ 8	Mixolídio

As notas brancas de um piano produzem as sete notas dos sete modos da Grécia antiga. Erros de transcrição medievais deixaram-nos com nomes modernos que não se encaixam com os antigos. Cada modo ou escala tem o seu próprio padrão de tons e semitons, com apenas dois deles sobrevivendo como as nossas escalas maior e menor natural.

Outras escalas incluíam pentatônicas modais que não permitem semitons, como a harmônica menor com sua terça menor e sexta, 1 2 3♭ 4 5 6♭ 7 8, e muitas outras.

EQUAÇÕES E CONSTANTES HARMÔNICAS

As relações e os intervalos que aparecem neste livro referem-se a frequências normalmente expressas como *ciclos por segundo*, ou hertz. A afinação clássica define Dó (C) em 256 Hz. A afinação moderna é mais elevada, fixando Lá (A) em 440 Hz. O período T de uma onda é o inverso de sua frequência f: $T = 1/f$.
A velocidade do som no ar seco é aproximadamente $331{,}4 + 0{,}6\ T_c$ m/s, onde T_c é a temperatura em graus Celsius. Seu valor à temperatura ambiente (20 °C) é 343,4 m/s.
A aceleração gravitacional na Terra (g) é 9,807 m/s².

Frequência de um pêndulo

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\textit{aceleração gravitacional}}{\textit{comprimento do pêndulo}}}$$

Frequência fundamental de uma corda tensionada

$$\frac{1}{2 \times \textit{comprimento da corda}}\sqrt{\frac{\textit{tensão da corda}}{\textit{massa da corda} \div \textit{comprimento da corda}}}$$

Frequência ressonante de uma cavidade com uma abertura

$$\frac{\textit{velocidade do som}}{2\pi}\sqrt{\frac{\textit{área de abertura}}{\textit{volume da cavidade} \times \textit{comprimento da abertura}}}$$

Frequência fundamental de um tubo aberto ou cilindro

$$\frac{\textit{velocidade do som}}{2 \times \textit{comprimento do cilindro}}$$

A frequência rítmica entre f_1 e f_2 é equivalente à diferença entre as duas, ou seja, $f_R = f_2 - f_1$.

A relação a:b converte para cents (onde a > b): (log(a)–log(b)) x (1200 / log2). Para converter cents em graus, multiplique por 0,3.

Bater palmas em frente a uma elevação feita de degraus produz uma série de ecos, com uma frequência percebida como igual a $v/2d$, onde v é a velocidade do som e d é a profundidade de cada degrau. Bater palmas em um corredor pequeno, com largura igual a w, produz uma frequência v/w.

A média *aritmética* e a *média harmônica* são fundamentais para a teoria dos números de Pitágoras. A média aritmética de duas frequências, separadas por uma oitava, produz a quinta entre elas (3:2), e a média harmônica produz a quarta (4:3).

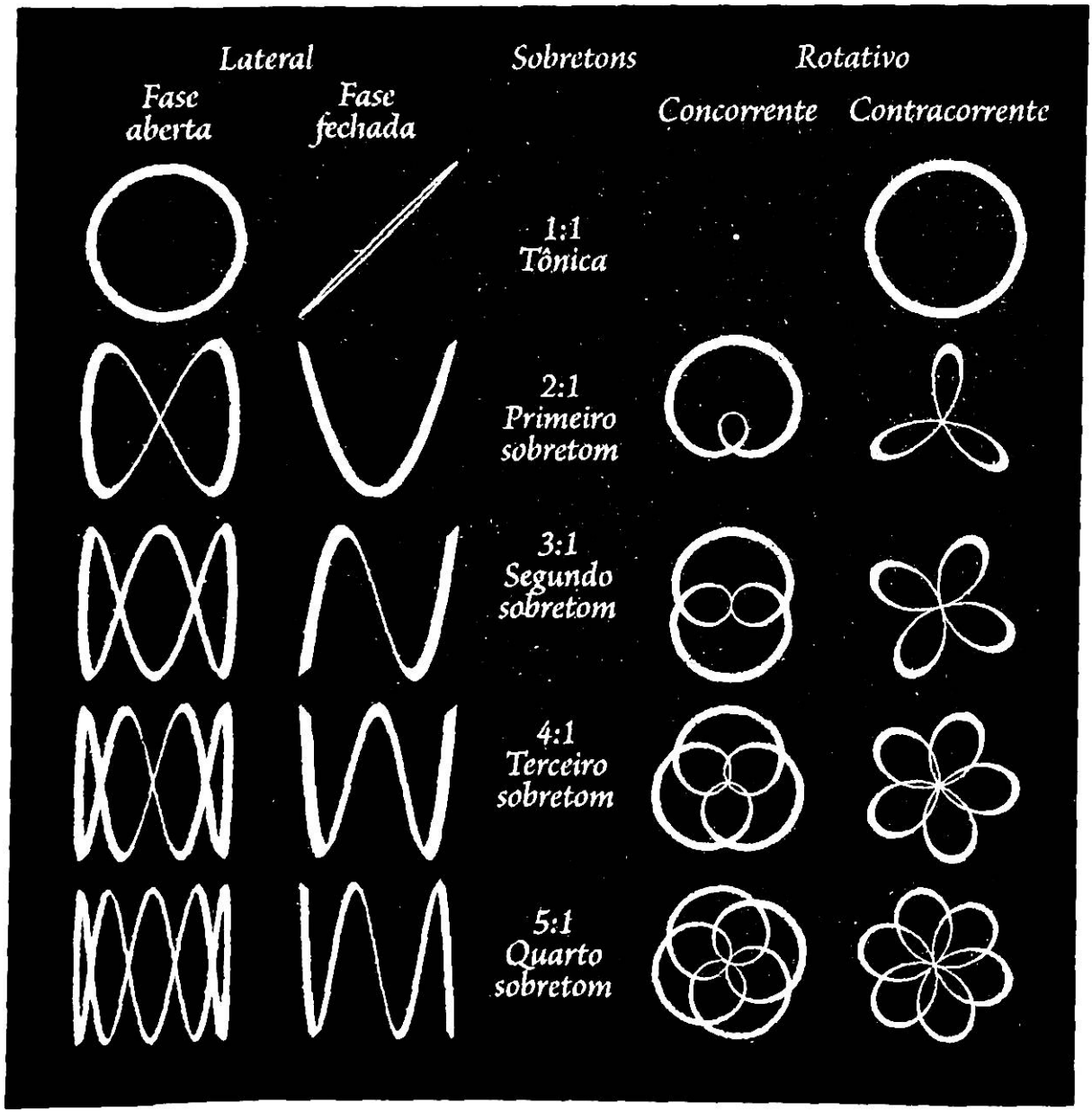
$$6 : 8 :: 9 : 12$$

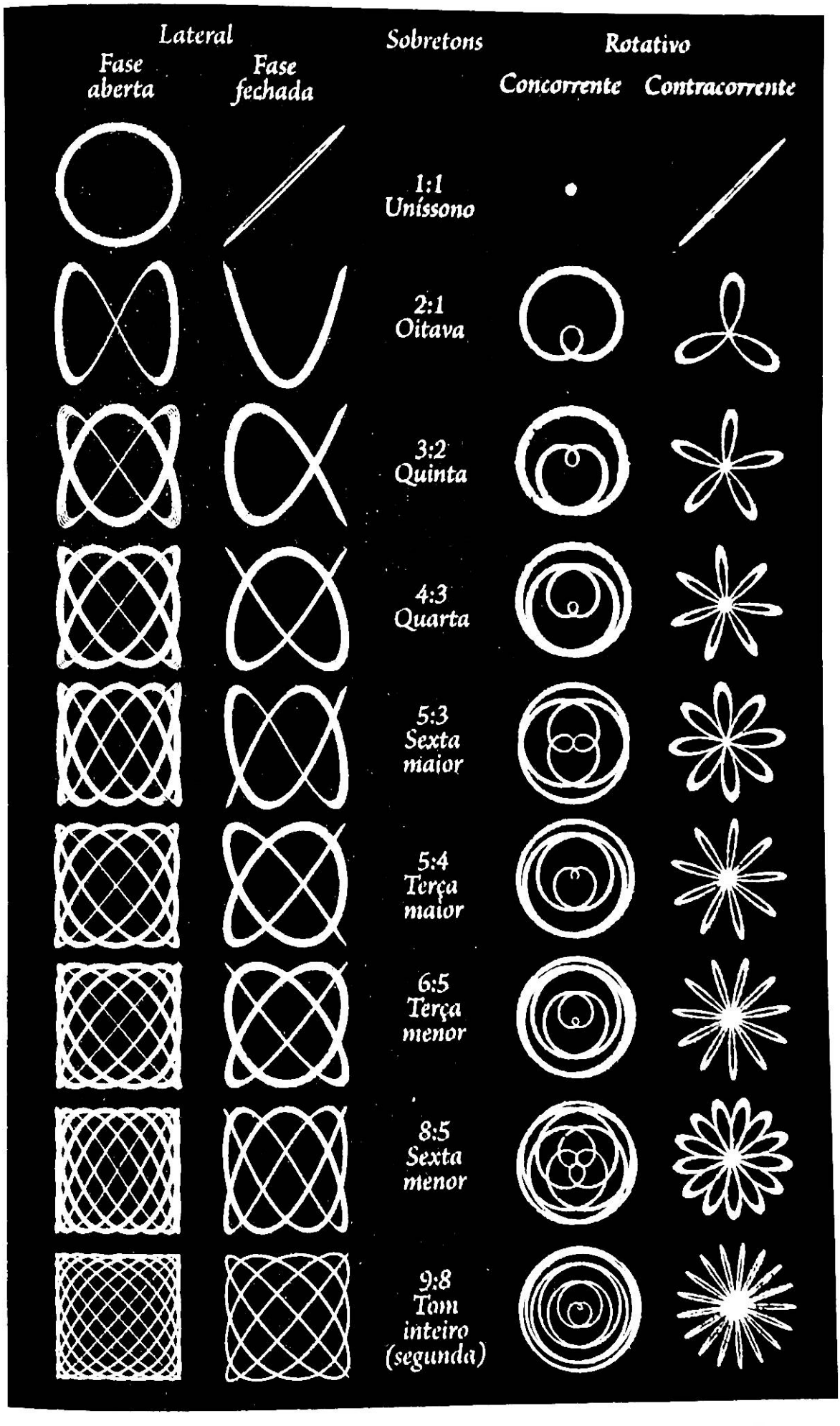
$$A : \frac{2AB}{A+B} :: \frac{A+B}{2} : B$$

$$A : \textit{Média harmônica} :: \textit{Média aritmética} : B$$

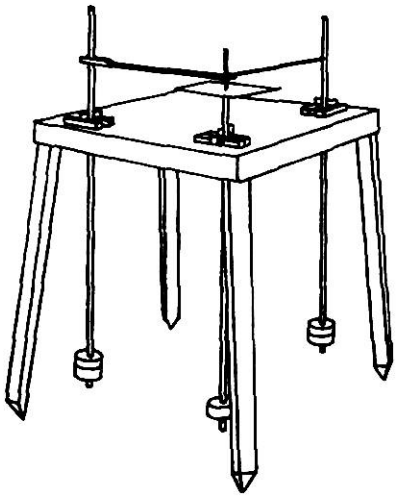
TABELAS DE PADRÕES CRIADOS POR UM HARMONÓGRAFO

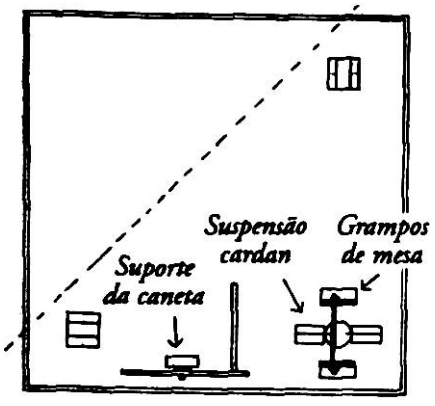
As harmonias de sobretom e proporção simples são apresentadas abaixo e na página a seguir, dispostas em ordem crescente de dissonância. Os desenhos de fase aberta exibem suas proporções como o número de voltas contadas transversalmente e para baixo. Para encontrar a proporção de um desenho rotativo, desenhe ambas as formas, a *concorrente* (ambos os círculos na mesma direção) e a *oposta* (círculos em sentido contrário). Conte as voltas em cada uma delas, adicione os dois números e divida o total por dois. Isso resulta no número da maior proporção. Subtraia esse resultado do total da forma oposta para encontrar o número da menor proporção. As figuras rotativas para a relação a:b terão (b – a) voltas quando ambos os círculos forem concorrentes, e (a + b) voltas quando forem opostos.

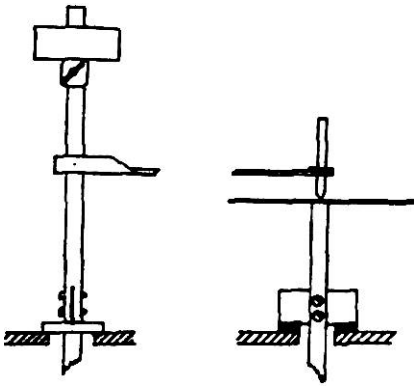


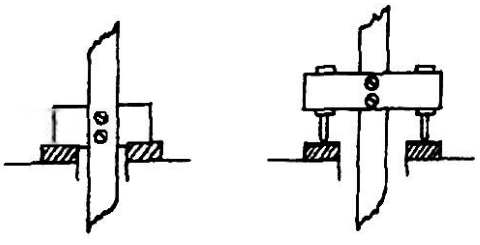

Lateral
Fase aberta
Fase fechada
Sobretons
Rotativo
Concorrente
Contracorrente
1:1 Uníssono
2:1 Oitava
3:2 Quinta
4:3 Quarta
5:3 Sexta maior
5:4 Terça maior
6:5 Terça menor
8:5 Sexta menor
9:8 Tom inteiro (segunda)

CONSTRUINDO UM HARMONÓGRAFO









Qualquer pessoa seriamente interessada em construir um harmonógrafo deve pensar em ir direto para o modelo de três pêndulos.

A mesa deve ser extremamente rígida e firme sobre o chão, caso contrário os movimentos dos pesos serão distorcidos. Sugiro que a mesa esteja cerca de 90 cm acima do chão e tenha dimensões de 60 x 30 cm para um harmonógrafo com dois pêndulos, ou de 60 x 60 cm para um com três, com cerca de 2 cm de espessura e um anteparo ao seu redor com cerca de 8 cm de profundidade.

As pernas devem ser quadradas, com cerca de 6 cm de lado, abertas obliquamente para fora e com pontas na parte mais baixa. Uma maneira de conseguir a abertura é fixar suportes de madeira ou metal nos cantos debaixo da mesa, de cada lado das diagonais, e aferrolhar as pernas entre eles. Depois de ajustar as pernas para conseguir a abertura correta, elas podem ser fixadas nesta posição por meio de parafusos através do anteparo.

Para economizar espaço, corte a mesa ao longo da linha pontilhada (como mostrado na figura ao lado). Três pernas não são tão estáveis, mas funcionam muito bem.

A plataforma que sustenta o papel deve ser leve e rígida, fixada ao pêndulo com um parafuso rebaixado. Um tamanho de 22 x 16 cm servirá convenientemente para segurar metade de uma folha A4, presa por um elástico ou pequeno clipe.

Todos os tamanhos sugeridos são máximos, mas uma versão reduzida funcionará se for construída com cuidado.

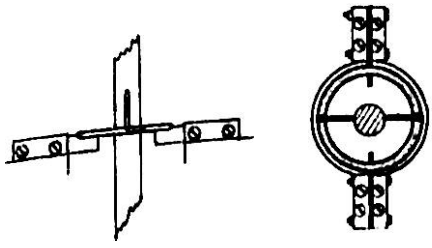
Se você estiver tentado a construir um harmonógrafo, comece com os pesos, pois o instrumento só ficará satisfatório se estes forem realmente pesados e, ainda assim, fáceis de ajustar. É uma boa ideia fazer cerca de dez pesos de, digamos, 2 kg cada um, para que as cargas possam ser variadas. Eles devem ter por volta de 8 cm de diâmetro, com um furo central, ou melhor, com uma abertura ou fenda para um manuseamento mais fácil. Molde-os você mesmo utilizando chumbo ou cimento pré-misturado, ou peça a um revendedor de artefatos de metal ou a um profissional que os faça.

Os eixos devem ser feitos a partir de cavilha de madeira (hastes de metal são suscetíveis a envergar, podendo distorcer os desenhos) com cerca de 1,5 cm de diâmetro, e demarcados em centímetros.

Os grampos podem ser obtidos com fornecedores de equipamento para laboratórios. Para alguns dos desenhos são necessários pesos melhores, mantidos no lugar por esses grampos. Os grampos também podem ser adicionados às partes superiores dos pêndulos para conseguir uma "sintonia fina", com o acréscimo de uma ou mais arruelas.

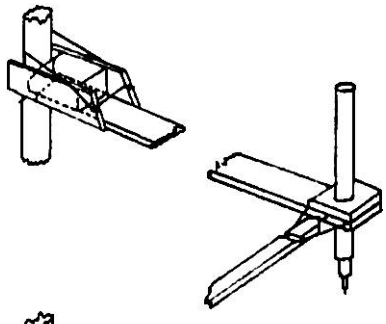
O tipo mais simples de rolamento consiste em tiras de metal (latão) parafusadas a uma fenda no pêndulo, e polidas até as arestas estarem afiadas a fim de repousar em sulcos de cada lado.

Em um rolamento que envolva menos atrito, o pêndulo é revestido, no fulcro, por um bloco horizontal de madeira com cavilhas verticais de cada lado, polidas até que as pontas fiquem finas e possam ser apoiadas em cavidades nas placas de metal. Se a perfuração de um furo grande no bloco for muito difícil, ele pode ser feito em duas metades, cada uma escavada separadamente para receber o eixo, e depois parafusadas juntas.



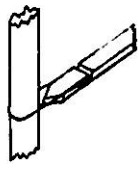
O movimento de rotação precisa de suspensões cardan. Aqui, os sulcos são polidos como o lado superior de um anel (por exemplo, a argola de um chaveiro), enquanto o lado inferior tem sulcos em ângulo reto com os sulcos superiores. Os sulcos inferiores encaixam-se em duas arestas salientes (tiras de latão), cada uma encerrada entre dois pedaços de madeira presos à mesa. Com o rolamento alternativo, uma grande arruela plana deve ser utilizada, com cavidades que recebam as pontas afiadas.

Os braços com caneta devem ser os mais leves possíveis, para minimizar uma "superestrutura".[1] Eles são facilmente montados a partir de tiras de madeira de balsa, vendidas em lojas de modelismo, usando argamassa de balsa e fita adesiva. Para dois pêndulos, o braço pode ser preso ao eixo com agulhas comprimidas, e a caneta pode ser encravada em um orifício na outra extremidade. Para três pêndulos, as peças laterais no braço devem circundar o seu eixo com firmeza, mas não com muita força, e devem ser presas delicadamente com um elástico fino. Um dos braços sustenta a caneta, enquanto o outro é mantido por agulhas salientes empurradas para trás e presas (suavemente), em ambas as extremidades, também por elásticos.

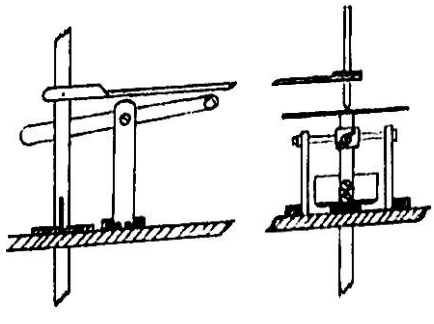


Pode muito bem haver formas melhores e mais sofisticadas de fazer tudo isto. Todas as sugestões são bem-vindas.

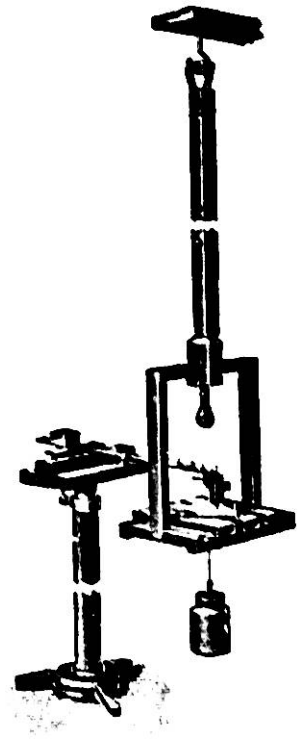
Um ajuste adicional é necessário para bloquear um pêndulo rotativo, de modo que o harmonógrafo possa ser utilizado apenas com os dois pêndulos de eixo único. Isso pode ser feito pela montagem de dois suportes em cima da mesa, perto do pêndulo rotativo, com furos para receber um longo pino horizontal (ligeiramente para um dos lados) ao qual o eixo pode ser preso.



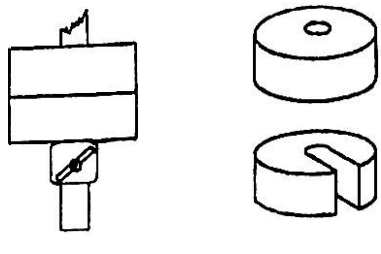
As canetas devem ser finas, leves e soltas. A maioria das papelarias e lojas de materiais para projetistas e artistas oferece uma variedade de tipos (evite esferográficas ou canetas de ponta grossa). Para melhores resultados, utilize um papel brilhante, "artístico" (papel especial tipo cuchê) ou "imitação" (papel velino, sem granulação, ou vegetal, que é translúcido); e, para experimentos preliminares, utilize papel comum como o usado em copiadoras e impressoras a *laser*.



Se a caneta é deixada sobre o papel até o fim do processo, geralmente aparece uma mancha disforme. Para evitar isso, monte uma pequena coluna na mesa, com uma alavanca ajustável que carregue um pedaço de tarugo fino colocado debaixo do braço da caneta. Ao elevar o tarugo suavemente, a caneta é levantada do papel sem deslocá-lo. Este dispositivo também deve ser usado antes de a caneta descer sobre o papel. Ao observar a caneta, você pode ver que padrão está sendo desenhado e empurrá-la de uma forma ou de outra pela pressão sobre os pêndulos.



Para proporções fora da oitava, como 4:1, você pode precisar de outro harmonógrafo, como o pêndulo de dupla elíptica de Goold (à direita).



[1] Referente a um peso incômodo e desnecessário. A palavra em inglês usada neste trecho, *top-bamper*, serve para descrever um material ou peso, como os mastros ou cordame, na parte superior de um navio. (N. T.)

GLOSSÁRIO DE TERMOS MUSICAIS

Acidentes (ou alterações): Qualquer dos cinco símbolos que diminuem ou elevam a altura do som (tom) em um ou dois semitons, normalmente utilizados para modificar ou restaurar uma tonalidade, a saber: (♭ – bemol, 𝄫 – dobrado bemol, ♯ – sustenido, ♮ – bequadro, X dobrado sustenido)

Acorde: Três ou mais tons que soam juntos como uma entidade independente. São frequentemente escritos em terças, sendo o núcleo principal uma tríade.

Adicionado: Um tom intermediário ou não harmônico adicionado a um acorde para temperar ou colorir, geralmente uma segunda, quarta, sexta, nona, décima primeira ou décima terceira.

Anacruse: Uma nota ou sequência de notas executadas no início de uma obra musical, no tempo fraco do compasso (*upbeat*), precedendo um tempo metricamente forte (o primeiro).

Appoggiatura *(apogiatura ou apojatura):* Um tom dissonante que ocorre em um ritmo forte e, depois, progride para uma assonância ou tom de acorde – ele "apoia-se" na assonância e, em seguida, repousa nela.

Armadura de clave: A instrução global que indica quais notas devem ser elevadas ou diminuídas em uma composição, a fim de preservar e expressar uma escala particular. É colocada no início da pauta musical, antes da métrica e depois da clave.

Aumentado: Usado para descrever um intervalo ou acorde. No primeiro caso, indica um intervalo maior ou perfeito que foi elevado em um semitom; no segundo, indica uma tríade maior com uma quinta elevada.

Bemol: Símbolo utilizado para indicar uma diminuição da natural em um semitom. Também usado para descrever um tom que está levemente desafinado.

Bequadro: Um acidente que cancela um sustenido, um bemol, um sustenido duplo ou um bemol duplo, o que corresponde às teclas (notas) brancas do piano.

Binário circular: Uma estrutura musical na forma ABA, na qual o último A é uma versão mais curta e truncada do primeiro A.

Cadência: Um movimento ou conjunto de notas e ritmos que sugerem uma sensação de conclusão, pausa ou fim para uma frase musical ou seção.

Cambiata: Uma fórmula de dissonância que é um grupo vizinho duplo. Refere-se, efetivamente, a um tom e seus dois tons de acompanhamento, acima e abaixo.

Cesura: Uma pausa ou descanso.

Clave: Um símbolo que aparece no início da pauta musical para indicar onde as notas devem ser colocadas, nas linhas e espaços disponíveis. São três os tipos de clave: clave de Sol, clave de Fá e clave de Dó.

Compasso: Uma parcela do tempo musical, segmentada pela métrica, na qual um agrupamento completo está delimitado. Em notação, um compasso é separado por uma linha de cada lado.

Consonância: Diz respeito à estabilidade relativa de um intervalo musical, geralmente não necessitando de resolução, em contraste com a dissonância. Na maioria das vezes, oitavas, quartas, quintas, terças e sextas.

Contraponto: A simultaneidade de linhas independentes que são coerentes horizontal e verticalmente, aderindo a regras estritas sobre assonância e dissonância, com variação histórica.

Crescendo: Indica o gradual aumento no volume e intensidade do som, representado por um pequeno sinal (que lembra um grampo de cabelo) em expansão (abrindo para a direita).

Cromática: O termo é utilizado para indicar uma escala – ou música que adere a essa escala – composta por semitons, acidentes ou a coleção completa dos doze tons, contrastando com a escala diatônica.

Diatônica: Uma escala composta por sete tons diferentes e contíguos, com uma relação específica de tons inteiros e semitons, frequentemente utilizada para descrever maiores e menores. É contrastante com uma escala cromática. O termo também é usado para descrever a música que adere a essa escala.

Diminuendo (decrescendo): Indica a gradual diminuição no volume e intensidade do som, representado por sinal semelhante ao do crescendo, mas invertido, indicando uma contração.

Diminuto (reduzido): Termo utilizado para descrever uma modificação em um intervalo musical ou acorde, seja a redução de um intervalo perfeito em um semitom, ou uma tríade com uma terça menor e uma quinta diminuta.

Dissonância: Diz respeito a um ou mais intervalos musicais que sugerem instabilidade, na maioria das vezes segundas e sétimas, e que tendem a exigir alguma forma de resolução que progrida para uma consonância.

Dominante: O grau da escala que é uma quinta acima de uma fundamental ou da tônica de uma chave. Também é uma estação poderosa da escala que, frequentemente, sugere a sua própria resolução de volta para a tônica. Muitas vezes, está presente em uma cadência.

Dronal: Sem equivalente em português, refere-se à característica de uma música que é essencialmente melódica e rítmica, sem movimento harmônico, com todos os tons da escala relacionados a um *drone*[1] ou ponto imóvel.

Échappée: Um tom de fuga, uma dissonância numa parte fraca do ritmo, que é abordada através de um intervalo, seguido por um salto para uma assonância em direção oposta.[2]

Epigrama: Como usado neste livro, é um motivo musical ou ideia que tem particularidade e individualidade suficientes para constituir uma forma reconhecível, funcionando frequentemente como um bloco de construção básico para a composição inteira.

---

[1] O *drone* é um efeito – ou acompanhamento – harmônico ou monofônico, em que uma nota ou acorde é continuamente tocado durante a maior parte ou a totalidade de uma composição. O termo também é usado para fazer referência a qualquer parte de um instrumento musical usado apenas para produzir tal efeito. (N. T.)

[2] Em outras palavras, um tipo específico de nota melódica (tom vizinho) incompleta e não acentuada, que é abordada gradualmente a partir de um tom de acorde e resolvida por um salto na direção oposta, de volta para a harmonia. (N. T.)

Extensão: Tons acima da oitava que são adicionados a um acorde a fim de enriquecer o timbre global, sem alterar a sua função – sempre uma nona, uma 11ª ou uma 13ª. Também é conhecida como "tensão".

Forma binária: Uma estrutura básica A-B em forma musical, frequentemente estribilhos de seções contrastantes.

Forte: Um símbolo em dinâmica musical utilizado para indicar que uma música deve ser tocada "vigorosamente" ou forte, em contraste com *piano*.

Fricativa: Diz-se de uma consoante cuja reprodução, na língua falada, produz o ruído de um atrito, como F, V, S, e Z.

Fundamental: O tom mais básico de uma tríade ou acorde, que transmite sua função e identidade no contexto de uma progressão harmônica. Isso é sempre detectável ao se organizarem as notas em terças que soam muito próximas.

Harmonia: A relação de um arranjo vertical de tons quando estes soam juntos. Também pode denominar um acorde, bem como a maneira como vários acordes se relacionam e estão organizados através do tempo.

Harmônico: Cada um dos sons componentes da série harmônica que impregnam o tom mais baixo ou fundamental com um timbre. Cada um deles está relacionado matematicamente à fundamental através de proporções de números inteiros (1x, 2x, 3x...), que aumentam gradativamente em frequência. Muitos instrumentos de cordas e sopro podem ser tocados de forma a revelar esses tons mais altos e suaves.

Icto: Uma acentuação métrica ou modulação rítmica forte, frequentemente um *downbeat* ou tempo forte.

Intervalo: A distância entre dois tons.

Inversão: Com intervalos musicais, é a operação que traz a nota de fundo para a frente, de modo que uma segunda produz uma sétima, uma terça produz uma sexta, uma quarta produz uma quinta, e assim por diante. Em harmonia, isso indica que uma nota diferente da fundamental do acorde está no tom mais baixo.

Legato: É a instrução musical para se tocar as notas de uma forma conectada e suave, sem intervalos entre elas.

Maior: Ao descrever intervalos musicais, indica a segunda, a terça, a sexta e a sétima, uma vez que estas ocorrem naturalmente na escala maior. Ao descrever acordes, indica uma tríade composta por uma quinta perfeita e uma terça maior no meio, colocadas acima da fundamental. Contrasta-se com intervalos ou acordes menores. Também descreve uma escala ou tonalidade global, fazendo sempre referência à terça da escala.

Mediante: Também chamado *nota modal*, é o terceiro grau de qualquer escala.

Melismática (melisma): Música vocal que tem dois ou mais tons atribuídos a uma única sílaba.

Melodia: A sucessão de tons no tempo, organizados em um padrão significativo, e que podem ter durações variadas.

Menor: Ao descrever intervalos musicais, indica um intervalo maior reduzido em um semitom. Em harmonia, indica um acorde composto por uma quinta perfeita e uma terça menor no meio, colocadas acima da fundamental. Contrasta-se com intervalos ou acordes maiores. Também descreve uma escala ou tonalidade global. A música ocidental identifica três tipos de menores: harmônica, melódica e natural.

Menor harmônica: Um dos três tipos de escalas menores na qual o sexto grau da escala é reduzido e o sétimo grau é elevado, para permitir que o acorde dominante seja maior. Desse modo, a escala tem o intervalo de uma segunda aumentada entre a sexta e a sétima.

Menor melódica: Uma das três menores, nesta escala o sexto e sétimo graus são alterados para aparecer como na escala maior, a fim de intensificar o movimento ascendente para a tônica. Frequentemente, também existe uma variante descendente como uma versão inalterada da menor natural.

Menor natural: Esta escala (diatônica) é o modo eólio, que não sofre nenhuma alteração em seus graus sexto e sétimo.

Métrica: Um padrão de agrupamentos rítmicos indicado por uma fração em que o numerador indica o número de batidas por compasso, e o denominador indica o tipo de subdivisões para receber a batida (quarta parte, oitava, décima sexta). As duas formas básicas de métrica são binária e tríplice.

Modal: Música que utiliza escalas diferentes da maior e menor, como os modos frígio, dórico, lídio, etc. Frequentemente, esse tipo de música não modula.

Modulação: A mudança de tonalidade ou de escala em que o centro tonal se move e os acidentes necessários para uma escala são introduzidos a fim de alterar a escala anterior. Isso é transmitido mais facilmente por uma fórmula harmônica I-IV-V-I.

Modulação aparente:[3] Um suporte temporário de – e apontando para – um centro tonal diferente da tônica, mas que não é firmemente fortalecido, o que só ocorre em uma modulação.

Nota de passagem: Um tom intermediário entre dois tons de acordes, geralmente uma dissonância, que ocorre em um tempo (pulso) fraco.

Oclusiva (plosiva): Uma consoante de sonoridade explosiva na língua falada, geralmente um B, P, D, G ou Q.

Octatônica: Nome dado a uma escala de oito notas, na maioria das vezes em referência a escalas diminutas.

Pentatônica: Nome dado a uma escala de cinco notas, frequentemente se referindo às primeiras cinco quintas, quando estão dispostas juntas (1-2-3-5-6). Também corresponde às teclas (notas) pretas do piano.

Perfeito: Um intervalo musical de uma oitava, quinta, quarta (e uníssono), que mais se assemelha aos primeiros intervalos acústicos da série harmônica.

Piano: Um símbolo em dinâmica musical utilizado para indicar que uma música deve ser tocada "suavemente" ou sobriamente, em contraste com *forte*.

Polirritmia: A utilização simultânea de dois padrões rítmicos distintos que não se relacionam diretamente um com o outro. Também chamada "ritmos cruzados".

Registro: Uma região específica da tessitura total de um instrumento, voz ou obra musical.

Ritmo: A disposição temporal de movimento, muitas vezes possuindo uma pulsação.

---

[3] Em inglês, o termo utilizado é *tonicization*, para o qual não há tradução direta em português. É um exemplo de cromatismo tonal (técnica de composição que intercala os tons e escalas diatônicas primárias com outros tons da escala cromática). Refere-se ao tratamento dado a um tom que não é a tônica global, de modo a transformá-lo em uma *tônica temporária*. Isso é conseguido através do uso da escala e das harmonias da chave que está sofrendo a modulação. Referência: Justine Shir-Cliff, *Chromatic Harmony*. 7. ed. New York, Free Press, 1995. (N. T.)

Semitom: O menor intervalo na música ocidental tradicional. Duas teclas (notas) adjacentes no piano, brancas ou pretas.

Sensível: O sétimo grau de qualquer escala, na maioria das vezes um semitom abaixo da tônica.

Série harmônica: Um fenômeno acústico natural que ocorre sempre que uma corda ou o ar vibram através de um tubo. A extensão da vibração subdivide-se de modo crescente, produzindo outras vibrações ou frequências de som mais elevadas do que a maior vibração. Essas vibrações organizam-se em conjunto para formar um timbre e comunicar a identidade do som. A série harmônica é igualmente responsável pelas vogais na língua falada.

Sibilante: Um tipo de consoante fricativa na língua falada, em frequências mais altas, que frequentemente se assemelha a um som sibilante, como S e Z.

Silábica: Uma música vocal que tem apenas um tom atribuído a uma sílaba.

Síncope: Um procedimento rítmico pelo qual as batidas fortes são substituídas por batidas fracas, obscurecendo temporariamente o sentido do pulso ou a métrica. O uso de síncope é um dos indicadores mais fortes de estilos musicais ao redor do mundo.

Sonata: Conforme utilizado neste livro, é especificamente um procedimento formal que apresenta dois temas contrastantes, em que o segundo tema se encontra em outra tonalidade que não a tônica (frequentemente, a dominante), seguido por uma seção de desenvolvimento livre e moduladora. Em seguida, ocorre uma recapitulação, em que os dois temas são apresentados novamente, e o segundo é restaurado para a tonalidade tônica.

Staccato: É a instrução musical para tocar as notas de forma "destacada", geralmente indicada por um pequeno ponto acima ou abaixo da nota.[4]

Subdominante: O quarto grau da escala, uma quinta abaixo da tônica, e um tom inteiro ou intervalo completo (composto de dois semitons) abaixo da dominante. Muitas vezes, funciona como um afastamento da tônica e uma preparação para a dominante.

Submediante: O sexto grau de qualquer escala, uma terça abaixo da tônica.

Subtônica: O sétimo grau de qualquer escala, na maioria das vezes um tom inteiro abaixo da tônica (*ver Sensível*).

Supertônica: O segundo grau de qualquer escala, um intervalo acima da tônica.

Suspensão: Um acorde em que a terça é mantida ou suspensa enquanto os demais tons se resolvem, algo que é preparado no acorde anterior.[5] Na música moderna, a suspensão não necessita de nenhuma preparação ou resolução.

Sustenido: Um símbolo usado para indicar uma elevação da natural em um semitom. Também pode descrever um tom que está ligeiramente mais alto (do que deveria).

Tempo (andamento): A taxa de velocidade de uma performance musical através do tempo.

Tenuto: É a instrução musical que indica que uma ou mais notas devem ser sustentadas e tocadas de modo prolongado, geralmente assinalada por um pequeno traço acima ou abaixo das notas.

Ternária: Uma estrutura musical na forma ABA, na qual o último A é geralmente uma repetição completa do primeiro.

Tom-guia: Normalmente, a terça e a sétima de um acorde que atuam como sensíveis (tons principais) e maximizam o movimento de uma progressão harmônica.

Tom inteiro: Também conhecido como *intervalo completo*, é composto por dois semitons.

Tom vizinho: Também chamado *nota melódica* ou *auxiliar*, é um tom que não pertence ao acorde e que existe acima ou abaixo de um tom de acorde, como uma dissonância temporária e uma ornamentação, geralmente em um tempo fraco.

Tonal: Música que utiliza os princípios das relações do tipo tônica-dominante, predominantemente os sistemas maior e menor prevalecentes na música ocidental.

Tonalidade: Uma coleção de tons que reforçam uma nota como tônica. Na música ocidental, há doze tons maiores e doze menores, cada um construído sobre uma das doze notas, com sustenidos e bemóis adicionados adequadamente para preservar tons inteiros e semitons.

Tônica: A origem ou o ponto de repouso de uma escala. O ponto mais forte de gravidade com que todos os outros tons da escala se relacionam. O primeiro grau da escala.

Transposição: Um movimento das notas de uma composição para cima ou para baixo, de uma chave (tonalidade) para outra, enquanto os intervalos relativos são mantidos intactos.

Tríade: Uma estrutura de três notas, dispostas em terças, e resultando em um dos quatro tipos de acorde: maior, menor, diminuto ou aumentado.

Trítono: É a quinta diminuta, ou a quarta aumentada, composta por três tons inteiros ou seis semitons. Sendo o maior intervalo simétrico na escala ocidental, ele divide a oitava perfeitamente ao meio, e é a sua própria inversão. Frequentemente utilizado em um acorde de sétima dominante (representado pelo quarto e sétimo graus de uma escala maior), o trítono é dotado de um poderoso impulso em direção à resolução através de contração ou expansão. De fato, é a força libertadora que desvenda o quebra-cabeça da tonalidade, saindo de uma chave e adentrando outra.

---

[4] O termo italiano *staccato* indica que a nota assim assinalada se destaca das demais por um breve silêncio, o que na prática indica que há uma diminuição no tempo da nota. (N. T.)

[5] Mais especificamente, a suspensão mantém (ou suspende) uma nota do acorde após as outras partes terem se movido para outro acorde. Há uma terminologia especial para as suspensões: [1] *preparação* diz respeito à nota pertencente ao acorde que precede a suspensão; [2] *suspensão* é a nota mantida sobre outro acorde a que não pertence (pode ser ligada ou não), e [3] *resolução* é a nota que segue a suspensão e está uma segunda abaixo dela. (N. T.)

SOLFEJO E MNEMÔNICA

SOLFEJO/SOLMIZAÇÃO

Ut Re Mi Fa Sol La Si Ut
Gamma-Ut = Gamut

Ut queant laxis, Re-sonare fibris, Mi-ra gestorum
Fa-muli tuorum, Sol-ve polluti, La-bii reatum,
Sa-cte Iohannes

(CANTOCHÃO DO SÉCULO VIII PARA JOÃO BATISTA)

No Ocidente, três sistemas evoluíram e estão em uso atualmente:

[1] *Dó fixo:*
Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si Dó
Vantagens: *bom para aqueles com ouvido absoluto; nomes de escala absoluta.*
Desvantagens: *qualquer sílaba pode ter até cinco sons (bb, b, ♮, #, x); tem sete silabificações de tonalidade diferentes.*

[2] *Dó móvel, sílabas cromáticas:*
Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La Li Ti Do – Ascendente
Do Ti Te La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do – Descendente
Vantagens: *ilustra claramente as relações da tônica dominante Do-So através da maior e da menor paralela; tem uma silabificação para todas as escalas.*
Desvantagens: *obscurece as relações de menor relativa; rompe com passagens cromáticas; ou seja, sem terça aumentada e quarta reduzida.*

[3] *Dó móvel, Lá menor, sílabas cromáticas:*
MAIOR:
Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La Li Ti Do – Ascendente
Do Ti Te La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do – Descendente
MENOR:
La Li Ti Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La – Ascendente
La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do Ti Te La – Descendente
Vantagens: *revela a relatividade modal e histórica da maior e menor.*
Desvantagens: *mascara a relação da tônica dominante Do-So; falha em passagens cromáticas menores; ou seja, sem quinta aumentada e terça reduzida; tem sete silabificações de modo diferentes.*

MNEMÔNICA

PARA TERÇAS:

[1] *Clave de Sol, linhas:*
Every Good Boy Does Fine (Todo bom menino se sai bem)
Every Good Boy Deserves Fudge (Todo bom menino merece caramelo)
Elephants Got Big Dirty Feet (Os elefantes têm pés grandes e sujos)
Empty Garbage Before Dad Flips (Esvazie o lixo antes que papai fique bravo)

[2] *Clave de Sol, espaços:*
F=A=C=E, Fun Always Comes Easy (Diversão sempre vem fácil)

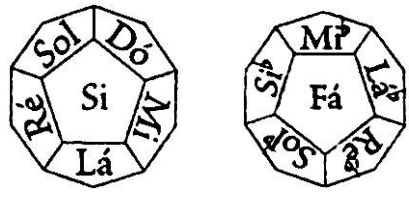
[3] *Clave de Fá, linhas:*
Great Big Dandelions Fly Away (Grandes dentes-de-leão voam para longe)
Good Boys Do Fine Always (Bons meninos sempre se saem bem)
Good Boys Deserve Fudge Always (Bons meninos sempre merecem caramelo)
Great Big Deer From Alaska (Grande cervo do Alasca)
Great Big Dogs From America (Grandes cães da América)
Granny's Boots Don't Fit Aunty (Botas da vovó não cabem na titia)

[4] *Clave de Fá, espaços:*
All Cars Eat Gas (Todos os carros comem gasolina)
All Cows Eat Grass (Todas as vacas comem grama)
All Children Eat Gum (Todas as crianças comem goma/chiclete)

PARA QUINTAS E QUARTAS:

Give Dorothy An Easter Basket For Christmas
For Christmas Give Dorothy An Easter Basket
Flying Birds Enjoy A Delightful Green Countryside
Birds Enjoy A Delightful Green Countryside Flying

Dê a Dorothy uma cesta de Páscoa no Natal
No Natal dê a Dorothy uma cesta de Páscoa
Pássaros voando desfrutam de um delicioso e verde campo
Pássaros desfrutam de um delicioso e verde campo voando



Um mapeamento dodecafônico das doze notas da escala, que preserva as oposições de trítono mostradas no círculo das quintas.

NOTAÇÃO MUSICAL BÁSICA

PAUTA: *grade ou matriz que mantém as notas e as pausas no lugar.*

CLAVE DE SOL: *também conhecida como Sol3.*

CLAVE DE FÁ: *também conhecida como Fá*

CLAVE DE DÓ: *também conhecida como Dó3, onde quer que as voltas se encontrem é o Dó médio.*

CLAVE TENOR: *também conhecida como clave C, aqui o Dó3 é registrado mais alto que na clave de Dó.*

CLAVE DE PERCUSSÃO: *para a notação rítmica e instrumentos de altura de som indefinida.*

LINHAS ADICIONAIS: *linhas desenhadas acima e abaixo da pauta para ampliar o intervalo de alturas.*

CODA: *um sinal que indica um pulo para a frente na música até a passagem final, indicada pelo mesmo sinal.*

SEGNO: *um sinal que indica retorno, frequentemente depois do início. Abreviado como D.S. (do italiano* Dal Segno*).*

REPETIÇÃO (ou Rittornello): *como os parênteses, indica começo e fim de um trecho que deve ser repetido.*

SIMILE: *indica repetição do compasso anterior.*

NOTA PONTUADA: *pontos à direita de uma nota permitem prolongar a sua duração. Um ponto aumenta a duração de uma nota em metade do tempo original.*[1]

PONTUAÇÃO DUPLA: *dois pontos aumentam a duração de uma nota em três quartos do tempo original.*

FERMATA: *colocado sobre uma nota ou pausa, indica uma parada de tempo momentânea.*

TRILO: *um ornamento, oscilando repetidamente com a nota acima ou abaixo; indica a repetição rápida e alternada de duas notas musicais vizinhas.*

MORDENTE: *um ornamento, oscilando uma ou duas vezes com a nota acima ou abaixo.*

SULL'ARCO: *em instrumentos de corda, a nota é produzida pela subida do arco.*

GIÙ ARCO: *em instrumentos de corda; a nota é produzida pela descida do arco.*

MARTELLATO: *(muito marcado) acento ou pontuação forte.*

STACCATO: *uma breve e destacada articulação que separa uma nota das demais por um breve silêncio.*

HARMÔNICO NATURAL: *indica que um sobretom deve ser tocado no lugar da fundamental.*

ACENTO / MARCATO: *uma demarcação geral, não tão forte quanto o martellato, indicando que uma nota deve ser atacada com vigor e suavizada em seguida.*

TENUTO: *uma indicação para maximizar e conectar a duração de uma nota, ou seja, representa uma nota sustentada.*

8va/8vb: *indica que se deve tocar uma oitava mais alto ou mais baixo que a nota assinalada.*

15va/15vb: *indica que se devem tocar duas oitavas mais alto ou mais baixo que a nota assinalada.*

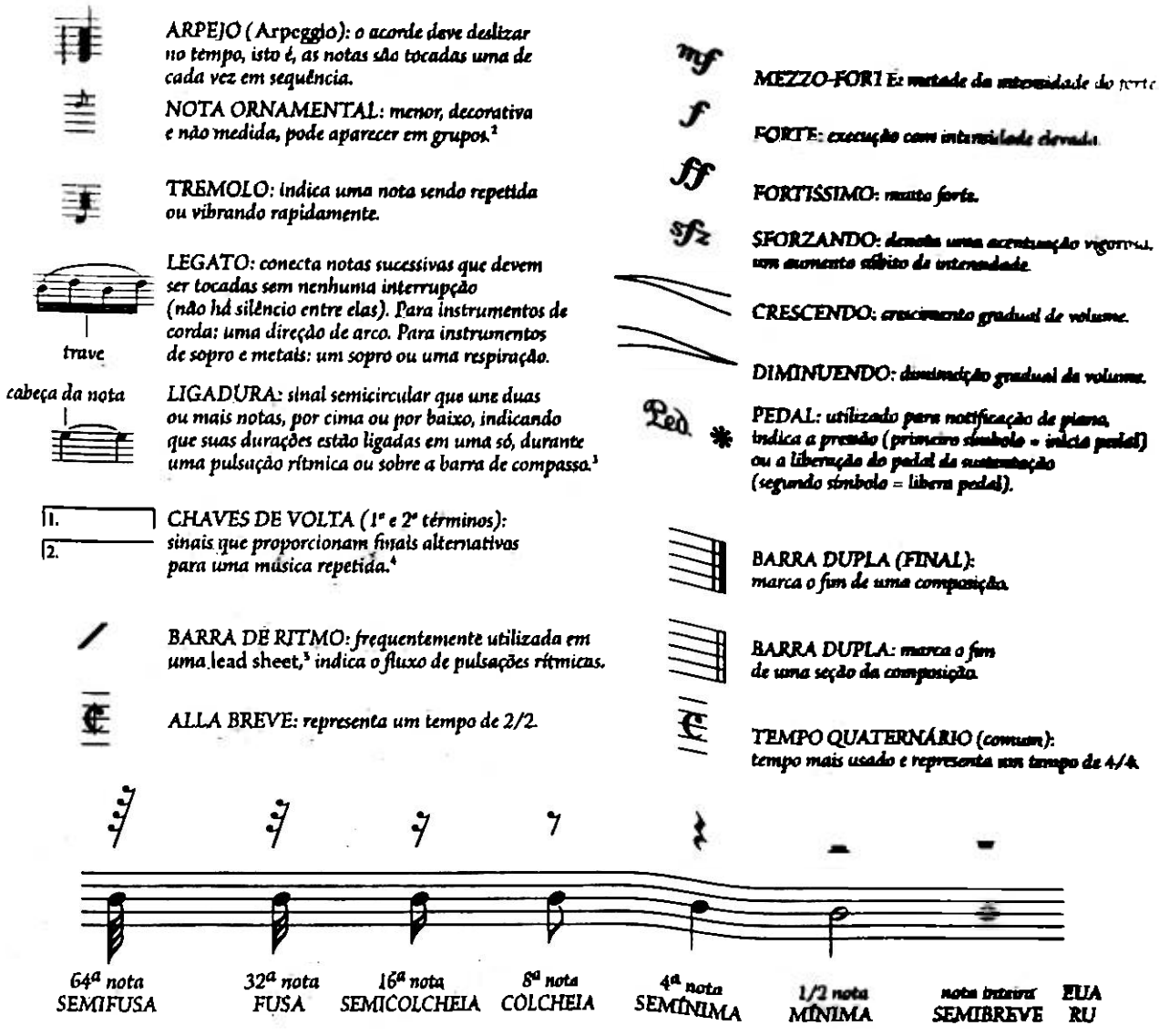
PIANÍSSIMO: *execução muito suave.*

PIANO: *execução suave.*

MEZZO-PIANO: *suave, mas ligeiramente mais forte que o piano.*

---

[1] A pontuação de notas não se restringe a um ou dois pontos. É possível usar três ou mais, onde três pontos aumentam a duração em sete oitavos do tempo original e assim por diante. As pausas também podem ser pontuadas da mesma forma que as notas. (N. T.)



[2] Quando ocorre sozinha, esta nota pode indicar tanto a intenção de uma *appoggiatura* quanto a de uma *acciaccatura*. No primeiro caso, a primeira metade da duração da nota principal é tocada com a altura da nota ornamental. No segundo, a nota ornamental é tocada muito rapidamente e não chega a "roubar" metade do tempo da nota principal. Quando ocorre em grupos, a nota ornamental pode indicar várias classes de ornamentação, dependendo da interpretação. (N. T.)

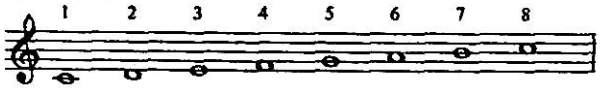
[3] São três os tipos de ligadura: [1] *de valor*: liga duas ou mais notas de mesma altura e nome, indicando que as suas durações são somadas e são tocadas como uma única nota; [2] *de articulação ou expressão*: liga duas notas de nomes diferentes e indica a passagem de uma nota para a outra sem fazer uma pausa entre elas; [3] *de frase ou fraseado*: liga três ou mais notas de nomes diferentes. (N. T.)

[4] A primeira chave deve ser tocada antes da repetição, o trecho anterior é repetido e, quando chega novamente ao mesmo ponto, a execução passa para a segunda chave. Pode haver variações para uma terceira repetição, e assim sucessivamente. (N. T.)

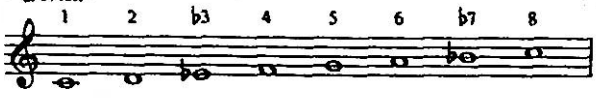
[5] Termo em inglês utilizado para um tipo de partitura, geralmente usada no *jazz*, que especifica elementos essenciais da canção, como melodia, letra e harmonia. A melodia é escrita utilizando-se a notação moderna para a música ocidental, a letra é escrita abaixo da pauta (como texto), e a harmonia é especificada através de cifras que aparecem acima da pauta. Optou-se por manter o termo no original porque, além de não haver tradução específica para o português, este tipo de partitura é geralmente referido dessa forma. (N. T.)

ESCALAS MUSICAIS

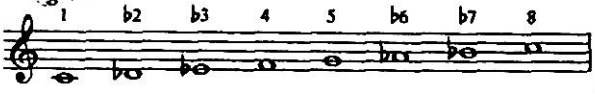
Jônia/Maior



Dórica



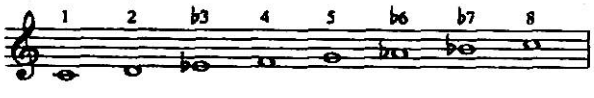
Frígia



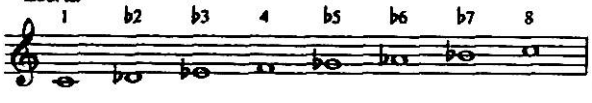
Lídia

Mixolídia

Eólia Menor

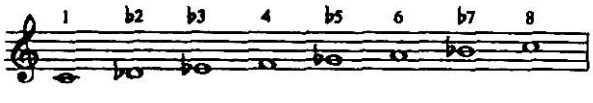


Lócria

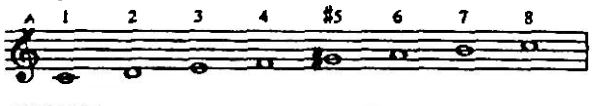


Menor harmônica

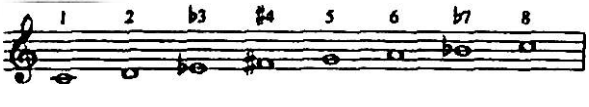
Lócria natural



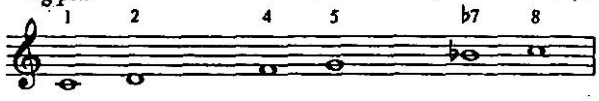
Maior harmônica



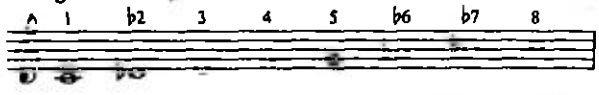
Romena



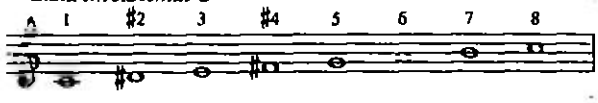
Egípcia



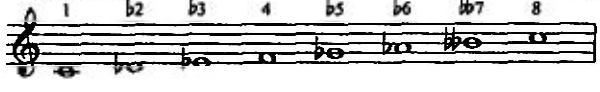
Frígia dominante / Ahavoh Rabboh



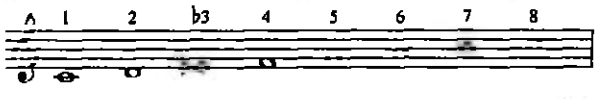
Lídia em sustenido 2



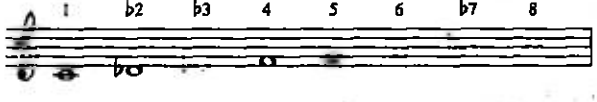
Ultralócria



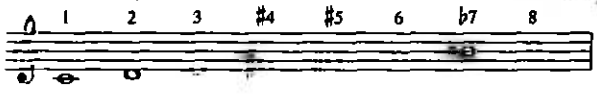
Menor melódica / Jazz menor



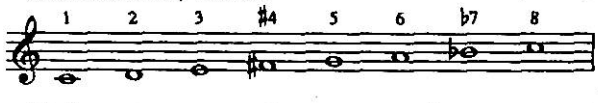
Javanesa



Lídia aumentada

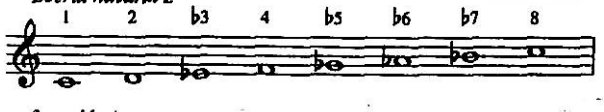


Lídia dominante / Acústica

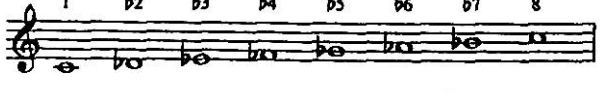


Hindu

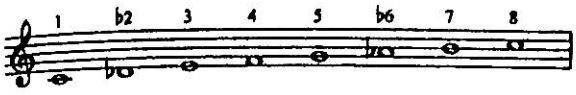
Lócria natural 2



Superlócria



Menor harmônica dupla

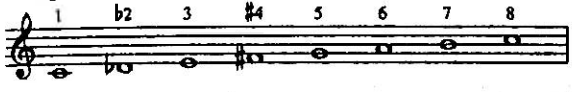


Maior húngara

Menor húngara

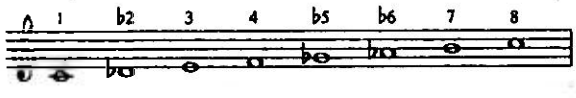
Raga Todi

Raga Marva

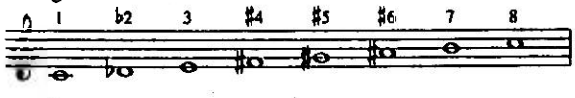


Blues

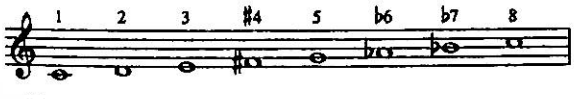
Persa



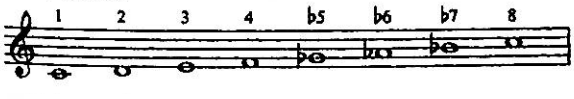
Enigmática



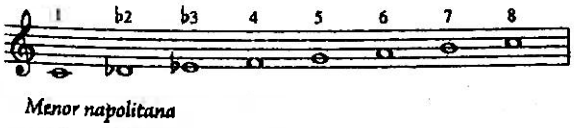
Lídia menor



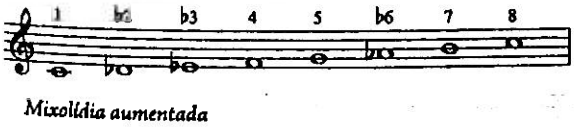
Lócria maior



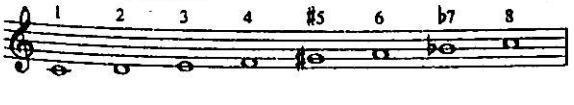
Maior napolitana



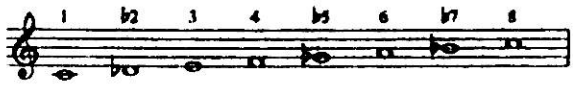
Menor napolitana



Mixolídia aumentada



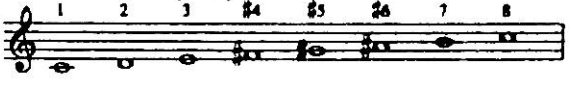
Oriental



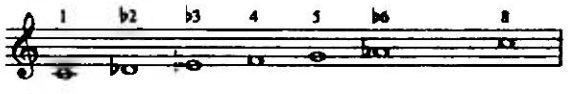
Prometeu

Chinesa

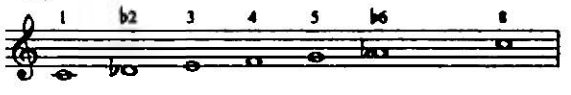
Escala hexafônica principal



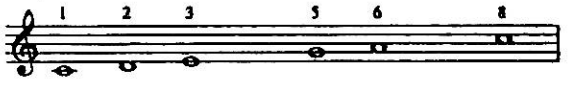
Pelog balinesa



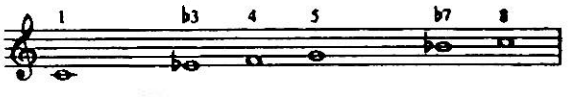
Japonesa



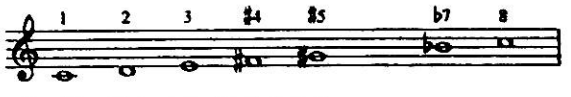
Pentatônica maior



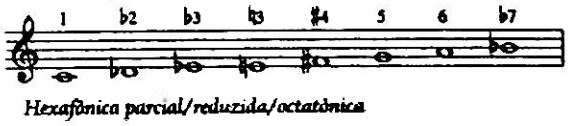
Pentatônica menor



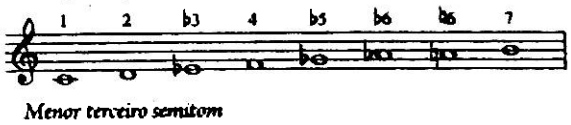
Escala hexafônica



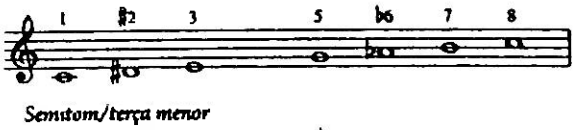
Semi-hexafônica/reduzida/octatonica



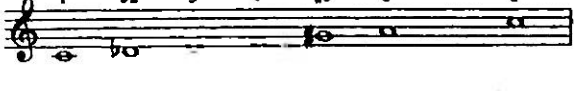
Hexafônica parcial/reduzida/octatônica



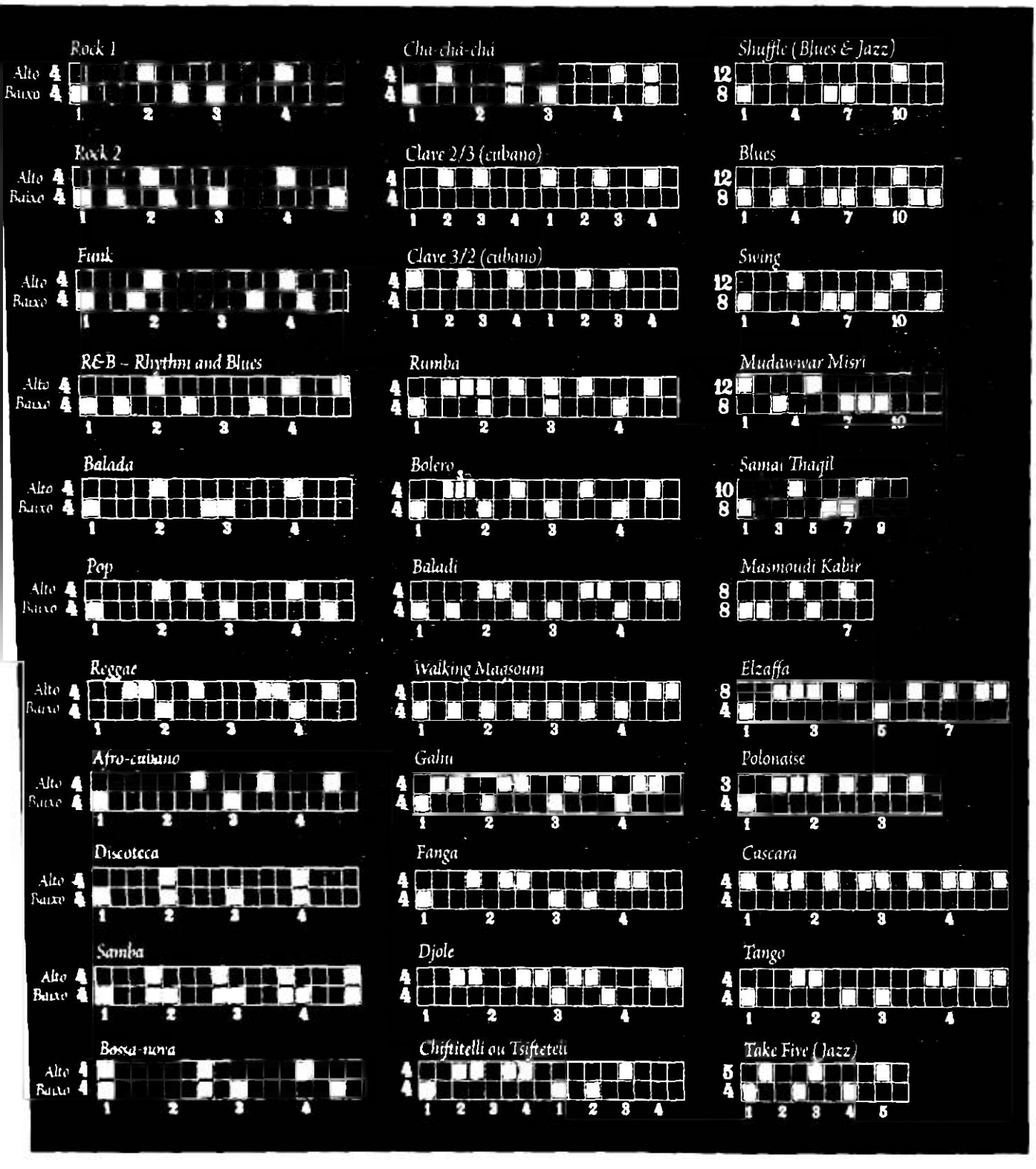
Menor terceiro semitom



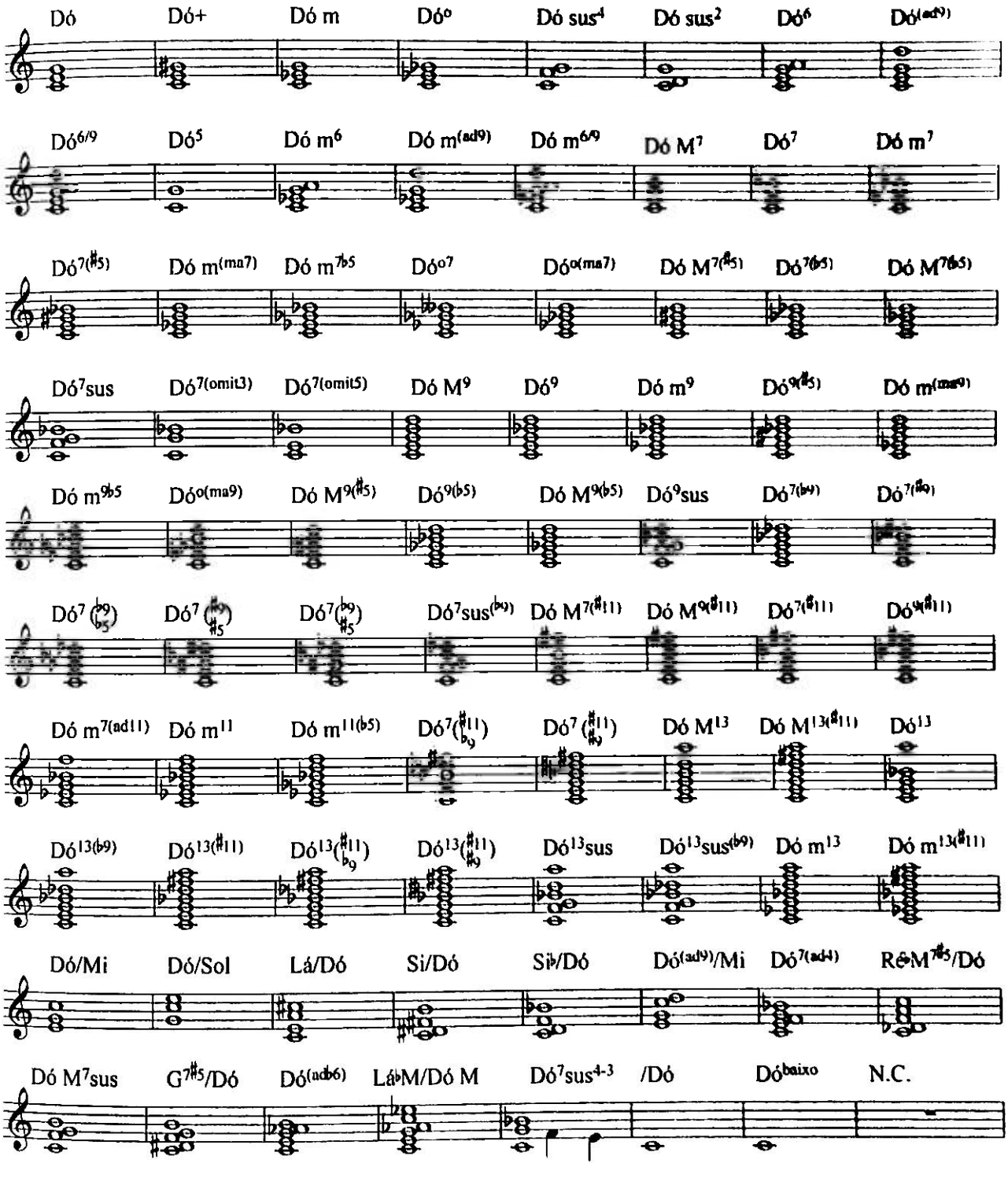
Semitom/terça menor



RITMOS SELECIONADOS



HARMONIAS


Dó
Dó+
Dó m
Dó°
Dó sus4
Dó sus2
Dó6
Dó(ad9)
Dó6/9
Dó5
Dó m6
Dó m(ad9)
Dó m6/9
Dó M7
Dó7
Dó m7
Dó7(#5)
Dó m(ma7)
Dó m7b5
Dó°7
Dó°(ma7)
Dó M7(#5)
Dó7(b5)
Dó M7(b5)
Dó7sus
Dó7(omit3)
Dó7(omit5)
Dó M9
Dó9
Dó m9
Dó9(#5)
Dó m(ma9)
Dó m9b5
Dó°(ma9)
Dó M9(#5)
Dó9(b5)
Dó M9(b5)
Dó9sus
Dó7(b9)
Dó7(#9)
Dó7 (b9 b5)
Dó7 (#9 #5)
Dó7(b9 #5)
Dó7sus(b9)
Dó M7(#11)
Dó M9(#11)
Dó7(#11)
Dó9(#11)
Dó m7(ad11)
Dó m11
Dó m11(b5)
Dó7(#11 b9)
Dó7 (#11 #9)
Dó M13
Dó M13(#11)
Dó13
Dó13(b9)
Dó13(#11)
Dó13(#11 b9)
Dó13(#11 #9)
Dó13sus
Dó13sus(b9)
Dó m13
Dó m13(#11)
Dó/Mi
Dó/Sol
Lá/Dó
Si/Dó
Si♭/Dó
Dó(ad9)/Mi
Dó7(ad4)
Ré♭M7#5/Dó
Dó M7sus
G7#5/Dó
Dó(adb6)
Lá♭M/Dó M
Dó7sus4-3
/Dó
Dóbaixo
N.C.

SOL E PLANETAS

	Periélio (10^6 km)	Órbita média (10^6 km)	Afélio (10^6 km)	Excentricidade	Inclinação de órbita (graus)	Longitude do periélio (graus)	Período orbital (dias)	Ano tropical (dias)
Sol ☉	–	–	–	–	–	–	–	–
Mercúrio ☿	46,00	57,91	69,82	0,205631	7,0049	77,456	87,969	87,968
Vênus ♀	107,48	108,21	108,94	0,006773	3,3947	131,53	224,701	224,695
Terra +	147,09	149,60	152,10	0,016710	0	102,95	365,256	365,242
Marte ♂	206,62	227,92	249,23	0,093412	1,8506	336,04	686,980	686,973
Ceres ⚳	446,60	413,94	381,28	0,0789	10,58	???	1.680,1	1.679,5
Júpiter ♃	740,52	778,57	816,62	0,048393	1,3053	14,753	4.332,6	4.330,6
Saturno ♄	1.352,2	1.433,5	1.514,5	0,054151	2,4845	92,432	10.759,2	10.746,9
Quíron ⚷	1.266,2	2.050,1	2.833,9	0,38316	6,9352	339,58	18.518	18.512
Urano ⛢	2.741,3	2.872,46	3.003,6	0,047168	0,76986	170,96	30.685	30.589
Netuno ♆	4.444,4	4.495,1	4.545,7	0,0085859	1,7692	44,971	60.190	59.800
Plutão ♇	4.435,0	5.869,7	7.304,3	0,24881	17,142	224,07	90.465	90.588

LUAS

(uma seleção)

	Nome do satélite	Raio orbital médio (10^3 km)	Período orbital (dias)	Excentricidade de órbita	Inclinação de órbita (graus)	Diâmetro (média) (km)	Massa (10^{18} kg)
Terra +	Lua	348,8	27,3217	0,0549	5,145	3.475	73.490
Marte ♂	Fobos	9.378	0,31891	0,0151	1,08	22,4	0,0106
	Deimos	23.459	1,26244	0,0005	1,79	12,2	0,0024
Júpiter ♃	Io	421,6	1,7691	0,004	0,04	3.643	89.330
	Europa	670,9	3,5512	0,009	0,47	3.130	47.970
	Ganimedes	1.070	7,1546	0,002	0,21	5.268	148.200
	Calisto	1.883	16,689	0,007	0,51	4.806	107.600
Saturno ♄	Tétis	294,66	1,8878	<0,001	1,86	1.060	622
	Dione	377,40	2,7369	0,0022	0,02	1.120	1.100
	Reia	527,04	4,5175	0,0010	0,35	1.528	2.310
	Titã	1.221,8	15,945	0,33	0,33	5.150	134.550
	Jápeto	3.561,3	79,330	0,0283	14,7	1.436	1.590

Período de rotação (horas)	Duração média do dia (horas)	Diâmetro equatorial (km)	Diâmetro polar (km)	Inclinação axial (graus)	Massa (10^{24} kg)	Volume (10^{12} km³)	Gravidade da superfície (m/s²)	Pressão da superfície (bars)	Temperatura (média) (°C)
600–816	–	1.392.000	1.392.000	7,25	1.898.100	1.412.000	274,0	0,000868	5.505
1407,6	4222,6	4.879,4	4.879,4	0,01	0,3302	0,06083	3,70	negl.	167
-5832,5	280,20	12.103,6	12.103,6	177,36	4,8685	0,92843	8,87	92	464
23,934	24,000	12.756,2	12.713,6	23,45	5,9736	1,08321	9,78	1,014	15
24,623	24,660	6.794	6.750	25,19	0,64185	0,16318	3,69	0,007	-65
9,0744	9,0864	960	932	var.	0,00087	0,000443	negl.	negl.	-90
9,9250	9,9259	142.984	133.708	3,13	1.898,6	1.431,28	23,12	100+	-110
10,656	10,656	120.536	108.728	26,73	568,46	827,13	8,96	100+	-140
5,8992	5,8992	208	148	???	0,000006	0,000024	negl.	negl.	???
-17,239	17,239	51.118	49.946	97,77	86,832	68,33	8,69	100+	-195
16,11	16,11	49.528	48.682	28,32	102,43	62,54	11,00	100+	-215
-153,29	153,28	2.390	2.390	122,53	0,0125	0,00715	0,58	negl.	-223

LUAS

(continuação)

	Nome do satélite	Raio orbital médio (10^3 km)	Período orbital (dias)	Excentricidade de órbita	Inclinação de órbita (graus)	Diâmetro (média) (km)	Massa (10^{18} kg)
Urano ♅	Miranda	129,39	1,4135	0,0027	4,22	235,7	66
	Ariel	191,02	2,5204	0,0034	0,31	578,9	1.340
	Umbriel	266,30	4,1442	0,0050	0,36	584,7	1.170
	Titânia	435,91	8,7059	0,0022	0,14	788,9	3.520
	Oberon	583,52	13,463	0,0008	0,10	761,4	3.010
Netuno ♆	Proteu	117,65	1,1223	0,0004	0,55	193	3
	Tritão	354,76	-5,8769	0,000016	157,35	2.705	21.470
	Nereida	554,13	360,14	0,7512	7,23	340	20
Plutão ♇	Charon	19,6	6,3873	<0,001	<0,01	1.186	1.900

Somente as grandes luas dos gigantes gasosos foram consideradas nas tabelas acima. Em 2001, eram conhecidas 28 luas em torno de Júpiter, 30 em torno de Saturno, 21 em torno de Urano e 8 em torno de Netuno. Provavelmente há muitas mais. Há 29,5306 dias entre as luas cheias na Terra. A cosmologia pode melhorar seriamente a sua saúde.

SINTONIAS PLANETÁRIAS

	Mercúrio	*Vênus*	*Terra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*	*Urano*	*Netuno*	*Plutão*	*Lua*	*Lua*	*Dia*
Período (anos)	0,24085	0,6152	1	1,8809	11,862	29,458	84,013	164,79	247,69	0,08085	0,07480	0,00274
Freq. audível (Hz)	141,27	221,23	136,10	144,72	183,58	147,85	207,36	211,44	140,25	210,42	227,43	194,18
Oitava	30	32	32	33	36	37	39	40	40	29	29	24
Tom audível	Ré	Lá	Dó#	Ré	Fá#	Ré	Sol#	Lá	Dó#	Sol#	Lá#	Sol
Grau de sintonia (Hz)	423,34	442,46	432,10	433,67	436,62	443,04	439,37	422,87	445,26	445,86	429,33	435,92
Freq. visível (10^{14} Hz)	6,213	4,865	5,986	6,365	4,037	6,502	4,559	4,650	6,168	4,627	5,001	4,270
Oitava da luz	72	73	74	75	77	79	80	81	82	70	70	65
Comprimento de onda	0,483	0,616	0,501	0,471	0,743	0,461	0,685	0,645	0,486	0,648	0,599	0,702
Cor	*azul*	*laranja*	*azul-verde*	*azul*	*vermelho*	*azul*	*laranja-vermelho*	*laranja-vermelho*	*azul*	*laranja-vermelho*	*amarelo-laranja*	*laranja-vermelho*

Adaptado a partir de The Cosmic Octave, *de Hans Cousto.*

TABELA DE MEDIDAS ANTIGAS

	Pés	*Assírio*	*Ibérico*	*Romano*	*Egípcio comum*	*Inglês*	*Grego*	*Persa*	*Belga*	*Sumério*	*Inglês arcaico*	*Egípcio real*	*Russo*
Assírio	0,9	1	63/64	15/16		9/10	7/8	6/7					
Ibérico	0,91429	64/63	1	20/21	14/15		8/9			5/6		4/5	
Romano	0,96	16/15	21/20	1	49/50	24/25	14/15			7/8			
Egípcio comum	0,97959		15/14	50/49	1	48/49	20/21					6/7	
Inglês	1	10/9		25/24	49/48	1	35/36	20/21	14/15		9/10	7/8	6/7
Grego	1,02857	8/7	9/8	15/14	21/20	36/35	1	48/49	24/25	15/16		9/10	
Persa	1,05	7/6				21/20	49/48	1	49/50				9/10
Belga	1,07143					15/14	25/24	50/49	1		27/28	15/16	
Sumério	1,09714		16/5	8/7			16/15			1		24/25	
Inglês arcaico	1,11111					10/9			28/27		1	35/36	20/21
Egípcio real	1,14286		5/4		7/6	8/7	10/9		16/15	25/24	36/35	1	48/49
Russo	1,16667					7/6		10/9			21/20	49/48	1

METROLOGIA ANTIGA

Geometria significa "medida da Terra", e as medidas da Antiguidade formam um único sistema global, sintonizado com o tamanho da Terra e da Lua. Os dois estão ligados por frações, tanto internamente, através de divisões e múltiplos de suas medidas (*veja a tabela abaixo*), como externamente, entre os módulos (*veja a tabela de John Neal – tabela inferior da página ao lado*). Por exemplo, as medidas assírias e gregas são comparadas como 24:25, enquanto as assírias e romanas, como 15:16. O pé belga é 6:5 do assírio e 9:8 do romano. Com frequência, os nomes dos vários módulos parecem enganosos, uma vez que mais de um sistema era usado ao mesmo tempo com certa regularidade. Observe o uso de intervalos harmônicos.

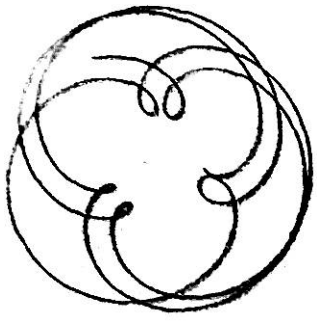
Foi Newton quem reacendeu o interesse moderno pela metrologia antiga. Buscando um valor exato para o tamanho da Terra, ele recorreu à tradição que afirmava que o cúbito "sagrado" judaico era uma fração do raio da Terra (é uma parte em 10 milhões). Nos anos que se seguiram, pesquisas meticulosas em territórios egípcios e gregos, realizadas por John Greaves, Francis Penrose e William Flinders Petrie, revelaram pequenas, mas regulares, variações nos módulos individuais. Petrie, como depois Livio Stechini, observou que as medidas variavam regularmente em torno da 170ª e 450ª partes. Posteriormente, John Michell e John Neal refinaram e explicaram essas variações.

As primeiras variações nos valores resultam da diferença entre os dois valores de *pi* (π) no mundo antigo – 25/8 e 22/7 –, que funcionam como 175/176. Vitrúvio descreve um hodômetro romano como constituído por rodas com 4 pés de diâmetro (cerca de 1,2192 metro), que marcam um comprimento de 12,5 pés a cada revolução (cerca de 3,81 metros). Assim, apesar de a medida ter-se utilizado do pé romano mais curto, uma distância mais correta teria sido encontrada no mesmo número do pé romano mais longo – mais longo em 176/175. Esta fração aparece em outros lugares, como, por exemplo, no *shaku*, o tradicional pé japonês que até hoje se relaciona com o pé inglês como 175:176. A segunda variação pode ser derivada da forma não esférica da Terra. Os antigos estavam cientes de que o *raio equatorial* ultrapassa o *raio polar*, o que significa que os graus de latitude sobre a superfície se encurtam em direção aos polos. A relação entre o valor polar, o médio e o equatorial foi modelada na sondagem antiga como 880:882:883, o que explica a variação de 440:441 frequentemente observada em unidades particulares (algumas vezes chamadas de pé "longo" e "curto"). O raio médio ocorre em torno de 51°, conhecido como o grau *meridiano*.

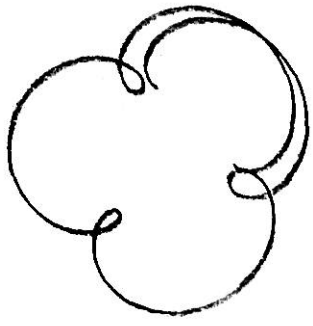
Essas conversões mantiveram a harmonia das medidas lineares em relação às angulares. Por exemplo, um segundo de arco na superfície da Terra, no grau meridiano, equivale a 100 pés gregos. A milha inglesa (e americana) é igualmente geodésica (*ver página 329*).

	Dígito	*Polegada*	*Palmo*	*Mão*	*Palmo (antigo)*	*Pé*	*Cúbito*	*Passo*	*Jarda*	*Passus*	*Braça*
Dígito	1	3/4	1/4	3/16	1/12	1/16	1/24	1/40	1/48	1/80	1/96
Polegada	4/3	1	1/3	1/4	1/9	1/12	1/18	1/30	1/36	1/60	1/72
Palmo	4	3	1	3/4	1/3	1/4	1/6	1/10	1/12	1/20	1/24
Mão	16/3	4	4/3	1	4/9	1/3	2/9	2/15	1/9	1/15	1/18
Palmo (antigo)	12	9	3	9/4	1	3/4	1/2	3/10	1/4	3/20	1/8
Pé	16	12	4	3	4/3	1	2/3	2/5	1/3	1/5	1/6
Cúbito	24	18	6	9/2	2	3/2	1	3/5	1/2	3/10	1/4
Passo	40	30	10	15/2	10/3	5/2	5/3	1	5/6	1/2	5/12
Jarda	48	36	12	9	4	3	2	6/5	1	3/5	1/2
Passus	80	60	20	15	20/3	5	10/3	2	5/3	1	5/6
Braça	96	72	24	18	8	6	4	12/5	2	6/5	1

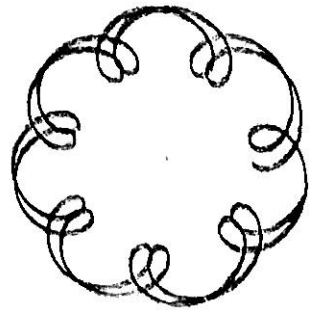
DANÇAS DOS PLANETAS



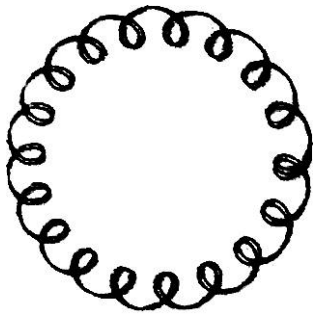
MERCÚRIO - VÊNUS



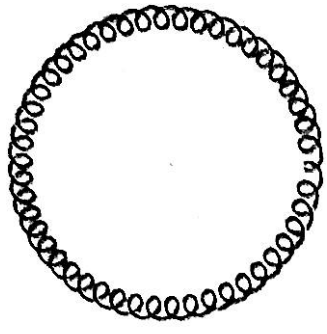
MERCÚRIO - TERRA



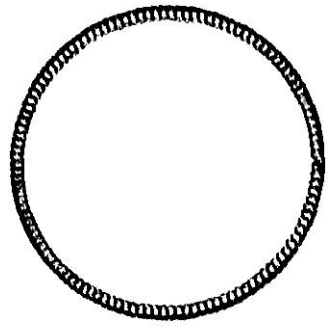
MERCÚRIO - MARTE



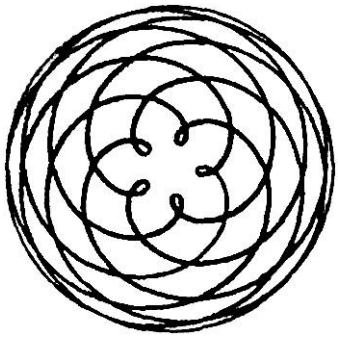
MERCÚRIO - CERES



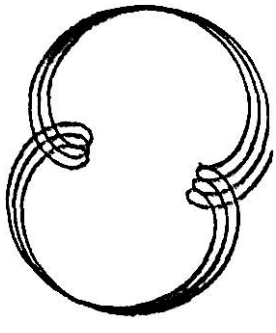
MERCÚRIO - JÚPITER



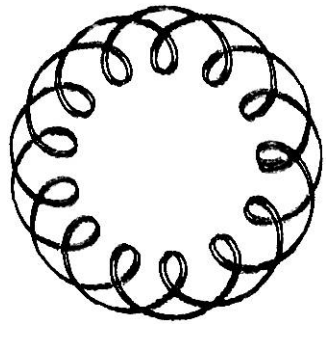
MERCÚRIO - SATURNO



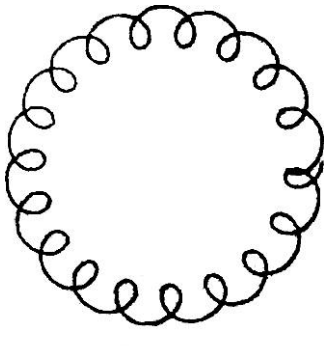
VÊNUS - TERRA



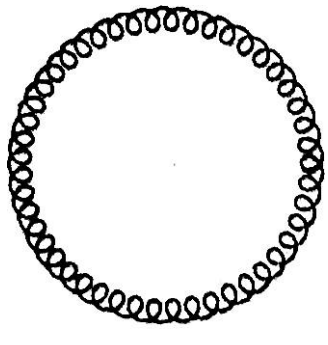
VÊNUS - MARTE



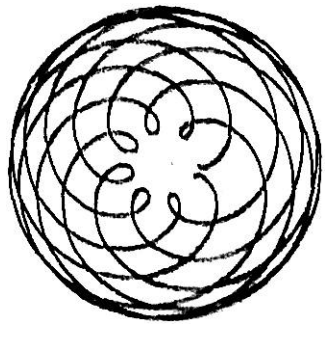
VÊNUS - CERES



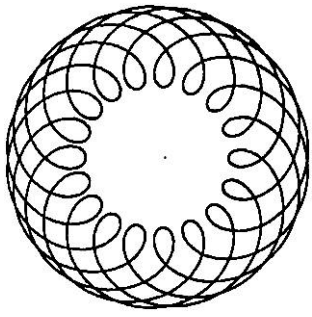
VÊNUS - JÚPITER



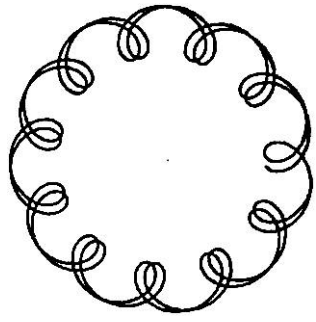
VÊNUS - SATURNO



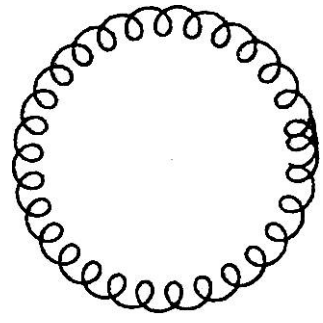
TERRA - MARTE



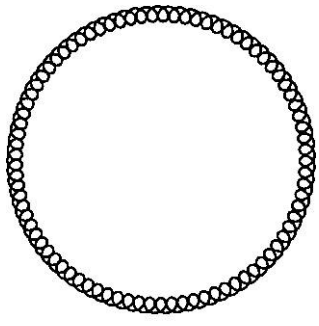
TERRA – CERES



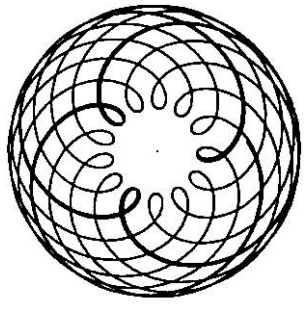
TERRA – JÚPITER



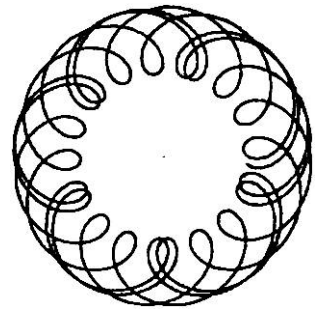
TERRA – SATURNO



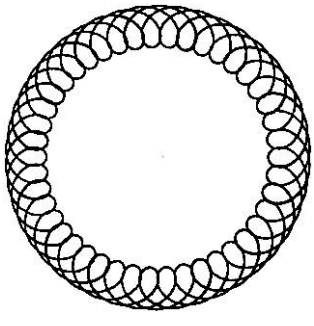
TERRA – URANO



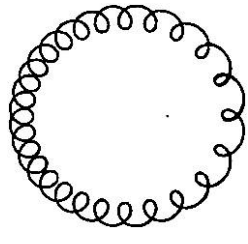
MARTE – CERES



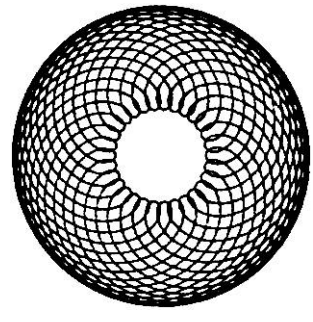
MARTE – JÚPITER



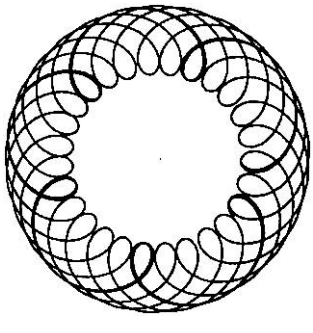
MARTE – SATURNO



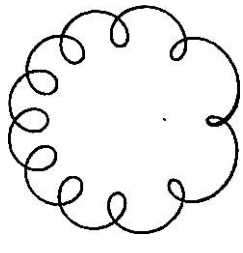
MARTE – QUÍRON



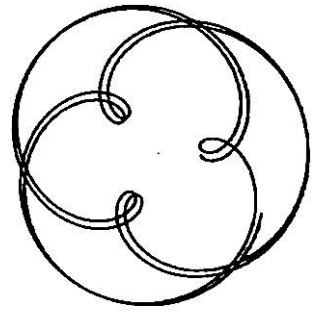
CERES – JÚPITER



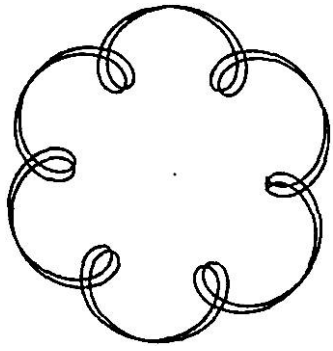
CERES – SATURNO



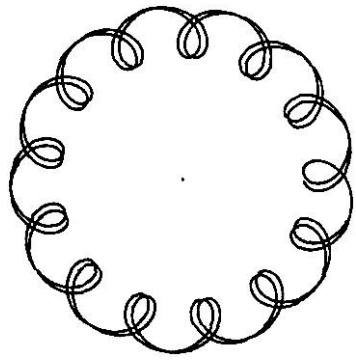
CERES – QUÍRON



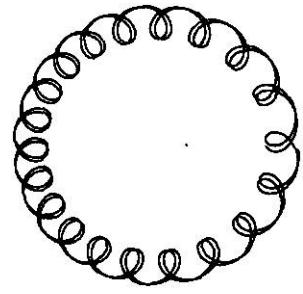
JÚPITER – SATURNO



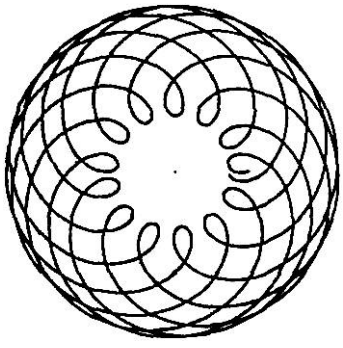
JÚPITER - URANO



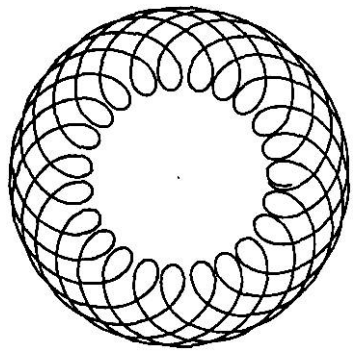
JÚPITER - NETUNO



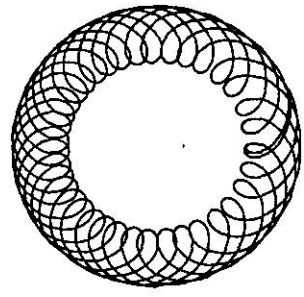
JÚPITER - PLUTÃO



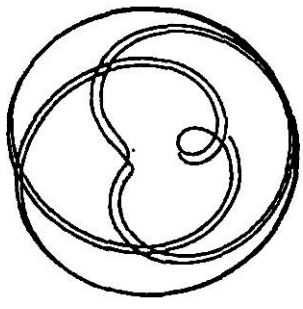
SATURNO - URANO



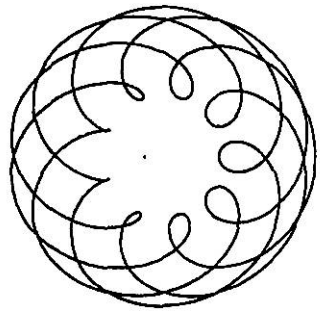
SATURNO - NETUNO



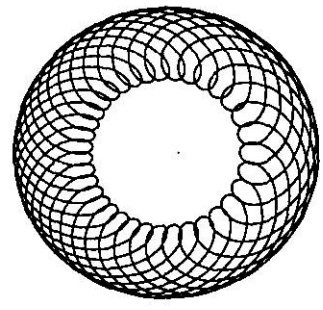
SATURNO - PLUTÃO



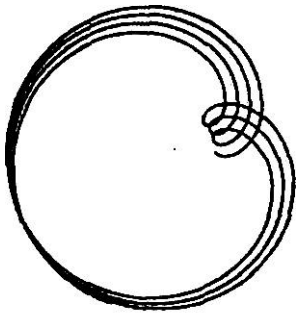
QUÍRON - URANO



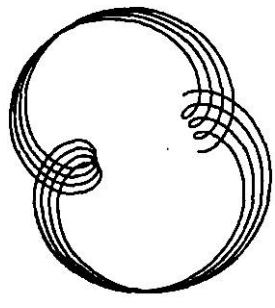
QUÍRON - NETUNO



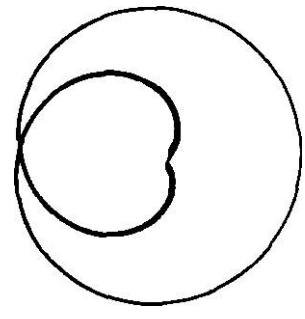
QUÍRON - PLUTÃO



URANO - NETUNO



URANO - PLUTÃO



NETUNO - PLUTÃO

ÍNDICE

As sequências de páginas utilizam "–" e as referências ocasionais ao longo de diversas páginas aparecem com "~".

A

acordes, 230, 250, 256-50; 270-73, 394; dominante, 270-76, 286, 394; inversões de, 258, 271; maior, 198, 230-31, 250, 258, 395; menor, 230-31, 258, 271-86, 395; no desenvolvimento da polifonia, 201, 248, 281; subdominante, 262, 282, 396; tônica, 262, 272-75

acústica, 218

afinação, 18, 36, 196, 228, 252, 386-87, 389; "afinação" (sintonia) de planetas, 406; diatônica, 197, 222, 230, 243, 386; indiana, 198, 230, 284, 369, 387; limite-três, 201; persa, 198, 369; pitagórica, 197, 386; tom médio, 224, 250

Alá, o número de nomes de, 44, 101

alfabetos antigos, tabela de, 51

alquimia, 124, 306, 367; casamento alquímico, 330

altura do som, 16, 28

amplitude, 186, 216, 220, 224, 226, 248, 266, 390

ano, 332; eclíptico, 305; grande, 44; sinódico, 305, 328; solar, 44; venusiano, 322, 324

arco-íris, 34, 80, 330; chacras, 26; parélios, 352

arcos (arquitetura), 116

arcos, 24, 90, 92, 116, 152; na arte celta, 118

Aristóteles, 42, 367

Arquimedes, 18, 168, 371

Arquimedes, sólidos de, 140-41, 164-65, 166-77, 378-81

arquitetura, 28, 32, 92, 320; cinco ordens de, 367

asteroides, 300, 344

asteroides, cinturão de, 300, 314, 316, 336-38, 340 *ver também* Ceres

átomo, 24, 28, 112, 150, 192, 367

B

babilônico, sistema numérico, 46-47, 58, 362, 370

base numérica, *ver* sistemas numéricos, em China

beijo de Vênus, 322; de outros planetas, 302, 314, 318, 346, 408-10; *ver também* sínodo

bemol, em música, *ver* sustenidos e bemóis

binário, sistema de estrelas, 372

Bode, lei de, 314, 336

C

cadência, em música, 209-73, 281, 282, 394

calendário, 304; asteca, 42; chinês, 304; fases da Lua no, 332, 369; islâmico, 44; maia, 44, 304, 362, 370

carbono, 24

cartas; jogando, 54; tarô, 304, 369, 370

catedral; janelas em, 112; Winchester, projeto de, 114

celta, arte, 118, 102

células; divisão no corpo humano, 30; no favo de mel, 178

Ceres, 308, 312, 314, 336

chacras, 26, 95, 369, 370

China, 30, 36, 48; sistemas numéricos, 48, 54, 285, 361

Chladni, padrões, 236-37

circulando o quadrado, 78

círculo, 13-36, 66-75, 84-86; a partir de elipses orbitais, 320; c. de arco-íris ao redor do Sol, 32; c. de semitons, 230, 272; *ver também* quadratura do círculo; c. inferior, 152; de quintas, 198, 252, 262, 273, 274, 279, 282, 397; grande c., 152, 168, 172; movimento do harmonógrafo, 206-10, 216, 220, 226, 390

círculos de pedra, 44, 76, 114, 304

circunferência, 24, 34, 56, 78, 82, 330, 348; c. inscrita, em pentagrama, 328

circunraio, 136, 138, 172; circunraios de poliedros, tabela, 385

circunsfera, 136, 150, 152, 166, 378

coma, sintônica, 196, 224, 387; em intervalos musicais, 252; pitagórica, 228-30, 279

compasso, 255, 291, 364

comprimento de corda, divisões de, 84, 86, 194, 200, 249, 389, 395

comprimento de onda, 348, 406; *ver também* frequência

cone, 18

conjunção, de Sol, Vênus e Terra, 322; de Júpiter e Saturno, 346

consciência, 8, 297, 298, 352, 354

constantes, 298; c. harmônicas, 389; em órbitas planetárias, 310, 336

construções, quadrado, 376; celtas, 111; dodecágono, 75, 376; eneágono, 97; espirais, 91; geométricas, 374-75; heptágono, 95; hexágono, 71-73; islâmicas, 109; malhas de pintura, em rebatimento, 98; octógono, 376; pentágono, 93

contagem, prancha de, 10, 48-49

contraponto, 281, 394

Copérnico, 308

cores, como harmonia de períodos planetários, 406

cristais, 24, 74, 138, 144, 352

cromáticas, notas, 38, 230, 250-51, 253, 274, 277, 279, 283, 286, 394, 397; escala cromática, *ver* escala, doze notas; cromatismo em composição, 248; ilustração, 394

cúbico, 406

cubo, 68-69, 76-77, 134-35, 138, 142-43, 180; números cúbicos; oito, 28, 97, 201, 369; outros, 201, 369-71

cuboctaedro, 168-69

Curwen, sinais manuais de, 257

D

danças dos planetas, 408-410

decágono, 32, 74

deferentes e epiciclos, *ver* epiciclos

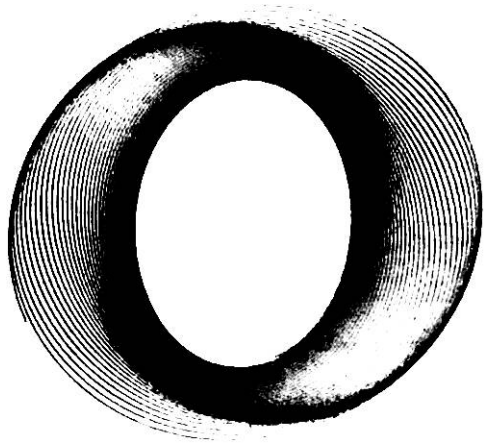
deltaedros, 156
demirregulares, recobrimentos, 102
Descartes, René, 146
diatônica, definição musical, 394
Dídimo, coma de; *ver* coma, sintônica
diminuta, *ver* trítono; *ver também* círculo de quintas
Direções; duas, 56; quatro, cinco, 367; seis, 24, 46, 142, 370
dissonância, 194, 210, 243, 244, 247, 253, 261, 279, 281, 390, 394-95
DNA, 32, 370
dodecaedro, 134-35, 144-45, 334-35, 397
dodecágono, 74-75
dominante, *ver* acordes
domos geodésicos, 170
duais, platônicos, 148-49; de Arquimedes, 178-79
dualidade, 16, 18; opostos em música, 246, 280, 290
duplicação do cubo, 142
E
e, constante matemática, 56
eclipse, 44, 305, 331, 333
eclíptica, 302, 346, 350
Egito; Grande Pirâmide, 34, 82; geometria, 166; número, 36, 80, 367; sistemas numéricos, 46
Einstein, Albert, 68, 298, 300, 310, 320, 354
elementos antigos, 20, 22, 76, 136, 138, 140, 269, 306, 367
elementos químicos (tabela periódica), 316, 370
elétrica, sequência de condutividade, 306
enantiomorfas, 158
enarmônico, equivalentes em música, 259, 279, 282, 287
eneágono, 96-97
epiciclos de Ptolomeu, 302, 308
equador, 94, 351, 372, 407
equinócios, 20; precessão de, *ver* precessão
eras zodiacais, 44
escala(s), tabela de, 400; cinco notas (pentatônica), 22, 24, 228, 250, 274, 369, 386, 388, 395; dezessete notas (arábica), 250, 387; doze notas (cromática), 36, 38, 251, 279, 397; oito notas (octatônica), 278, 395; seis notas (hexacorde), 245; sete notas (diatônica, etc), 26, 28, 36, 196-98, 201, 250, 253-62, 276-77, 284, 370, 386-95, 394; vinte e duas notas (indiana), 198, 230, 250, 284, 387
espiral, 90-91, 118, 154, 228, 279, 300, 326
éter, 76, 334
Euclides, 9; Elementos, 138, 146, 152; geometria euclidiana, 118, 142
Euler, Leonhard, 146
excentricidade, de órbitas, 308, 317, 320, 339
F
faixa (alcance), de instrumentos, 242; da voz humana, 264
fases, da Lua, 26, 369; de padrões do pêndulo, 186, 202, 207-14, 218-22, 390
Fibonacci, série, 34, 38, 40, 42, 88, 98, 318, 322, 326, 369, 370, 373
filotaxia, 106, 326
forças, quatro em física, 367, 369
forma binária, 269, 394, 396
fórmulas, 382
fractais, 56, 106
frequência, 40, 84, 86, 190, 348, 389; da harmonia orbital dos planetas, 406; de oscilação do pêndulo, 204; de tons audíveis, 242; espectro em todo universo, 192; *ver também* sobretons, frequências de batimento
frequências de batimento (ou pulsação), 210, 389; *ver também* ritmo
fundamental, tom, 250, 252, 258, 389, 395; *ver também* tônica
G
galáxia, geometria da, 350
Galileu, 204
gematria, 50, 52, 58, 364, 371
geometria, relações com a música, 86
glifos, numérico, 38, 361-62; para os planetas, 26, 296
gnômons, 42
grande mês, 44, 371
Grande Pirâmide, 34, 82, 140
gravidade, 300; estrutural, 290; na música, rítmica, 254; tonal, 256, 262, 272, 396
Grécia, antiga, 7-9, 42, 50, 56, 90, 136, 138, 200, 308, 318, 344, 367, 368, 369; instrumentos musicais, 265; medidas, 406, 407
gregos, modos; *ver* modos musicais
H
haicai, 38, 54, 369
halos de gelo, 352
harmonia, 7, 9, 106, 190, 194, 226, 236, 244, 261, 270, 282, 322, 342; das esferas, 342; *ver também* música das esferas; definição, 395; tabela de, 403
harmonia, em música; *ver* sobretons; em metrologia, 407; no sistema solar, 312, 314, 332, 342, 346, 350, 406
Harmoniae Mundi, 312; *ver também* música das esferas
Harmonices Mundi, Kepler, 164
harmonógrafo, 86, 190, 206-07; construção de, 392-93; tabela de padrões, 390-91
heliocêntrico, modelo do sistema solar, 308
heptágono, construção de, 94-95
hexacordes, *ver* escalas
hexafônica, escala, 278; *ver também* escala
hexágono, 70-73
I
icosaedro, 76-77, 134-35, 140-41, 334-35
icosidodecaedro, 172-73
igreja, janelas de, 110-112, 340
igreja, modos musicais de; *ver* modos musicais
igrejas, 80, 114
inclinação, do eixo da Terra, 80, 328; das órbitas planetárias, 317, 339, 404-05; do plano galáctico, 350
instrumentos, musicais 190, 264-65, 266, 395; faixas de, 242
intervalos, musicais, 18, 195, 200, 208-225, 220, 252, 394-96; e sobretons, 194, 249; em metrologia, 407; no sistema solar, 310, 312, 406; tabela de, 387
inversões, de acordes, 258, 271
islâmicos, desenhos, 102, 108-109; ano, 333, 371
J
Jesus e discípulos, 38, 74
jogos, 54
Júpiter, 340, 342, 344-49

K
Kepler, Johannes, 10, 120, 160, 162, 164, 174-78, 298, 308; conchas de, 310, 312, 320, 334, 352
Kepler-Poinsot, poliedros de, 30, 158-63, 164
Kirkwood, lacunas de, 336, 350
L
lambda, 6, 245
lambdoma, 6, 42, 200-01, 245
Leonardo Da Vinci, 78, 172, 327
linha, 8, 16, 28, 66, 133
líquidos, estruturas geométricas em, 28, 126
Lua, fases da, 26, 369
luas cheias, 36, 44, 330, 331, 333
luas, de planetas externos, 342; tabela, 404-05
Lucas, sequência, 34, 40, 369, 373
luz, 26, 112, 298; e ondas de som, 202, 236
M
malhas regulares, 40, 100, 102, 104, 108; *ver também* tesselação, recobrimento regular do plano
mancha solar, período de rotação, 330
Marte, 316, 334, 340
menor natural, 276, 388
Mercúrio, 84, 302, 312, 316, 318, 320, 328
metais, 26, 32, 306, 312, 375
metrologia antiga, 407
mnemônica, 397
modos musicais, 26, 196, 198, 251, 277, 284, 368, 388, 395
modulação musical, 256, 272
monocórdio, 192, 198, 200, 232, 245
mosaicos, 100-03
música, 40, 86, 190, 244; m. das esferas, 216, 298, 312, 406; m. modal, 274
N
Newton, Isaac, 298, 320, 352, 354, 407
nós, harmônicos, 194, 196, 224, 232, 234, 254; da Lua, 305, 333
notação musical, 398-99
numéricos, sistemas, 32, 38, 361-62; China, 48; Índia, 58; Maia, 46, 362
número abundante, 36
número de cents em intervalos musicais, 387, 389
número perfeito, 24, 142
números, atômicos de metais, 306; lista de, 367-73; n. imaginários, i, 56; n. pitagóricos, 363
O
octaedro, 24, 28, 76-77, 84-85, 134-35, 138-39
octagrama, 294, 329, 348
octatônica, escala, 278, 395
octógono, 28, 78, 100
oitava, 16-40, 84-86, 156, 190-205, 214-30, 242-59, 286, 298, 320, 348, 367, 369, 387, 389, 393, 394, 396, 406
oposições de Júpiter e Saturno, 346
órbitas, período das, 315; elípticas, 310
P
Parcial; *ver* série harmônica, sobretons
parélios, 352
partículas fundamentais, 20, 36
pedal, ponto (música), 270
pêndulo, 204-05
Penrose, escada, 351; recobrimento do plano, 120
pentágono, 22, 88, 92, 120
pentagrama, 86, 88, 93, 114, 160, 162, 318, 322, 332, 326, 328
pentatônica, *ver* escalas
período, do pêndulo, 204-05; de chacras, 369, 370; de notas musicais, 242; de onda, 389; de planetas, 310, 314, 322-406; pétalas de flores, 13, 105, 326
phi, 22, 88, 120, 154, 318, 328; *ver também* seção áurea
pi, 56, 78, 348, 383; em metrologia antiga, 407; na Grande Pirâmide, 82
pirâmide, 136, 144, 216; números piramidais, 369, 370
Pitágoras, 7, 8, 10, 190, 196, 229, 245, 368; triângulos de, 363
pitagórica, *ver* afinação; escala, 201, 371, 386; números pitagóricos, 363
pitagóricos, 6, 8-9, 16, 32, 144, 200
planetas externos, 338, 342, 346
plano, 8, 20, 66
Platão, 6, 16, 371; cosmologia, 150; crescimento gnomônico, 42; lambda, 245; número, 32, 370
platônicos, sólidos, 22, 30, 76, 134-45, 146-76, 310, 334, 367-69, 381
poesia, forma e ritmo, 38, 54, 246, 255, 369
Poinsot, poliedros de, 162, 164
poliedro, 146, 162, 164, 170, 378-85; quadridimensional, 180; redes, 378-79; tabela de dados, 384-85
polifonia, desenvolvimento de, 201, 248
polos, norte, sul, galático, eclíptico, 351
ponto (um único), 10, 14, 26, 65-70, 133, 146; tônica como "ponto imóvel", 274-75, 394
precessão de equinócios, 44, 370-71
primos, números, 38, 40, 373
prisma e antiprisma, 164
proporção, 10, 42, 84-88, 106, 154, 172, 244
Ptolomeu, sistema de; epiciclos e deferentes, 302, 308
Q
quadrada, raiz, 56, 383
quadrados mágicos, 30, 52-53, 54, 365-66; números q., 360, 373
quadratura do círculo, 34, 78, 82, 330
quantum, 192, 298, 312, 352; incerteza, 228
quarta (musical), 20, 30, 196-200, 222-62, 367, 371, 387; aumentada, *ver* trítono; em órbitas planetárias, 314
quarto, 20, 46, 86, 90, 150, 326, 342, 371; q. de tom, 252
quinta (musical), 18, 20, 30, 40, 84, 86, 189-200, 196, 198, 200-228, 245, 248-49, 250, 252, 256-90, 324, 328, 367, 371, 387-97
quinta, divisão, 150
R
razão, 56, 84, 88, 156, 197, 232
rebatimento, 98; *ver também* seção áurea
recobrimento do plano, regular e semi-regular, 100; a partir de blocos, 104; demirregular, 102; pentagonal, 120; tesselação, 100; tridimensional, 381
reduzidos, intervalos, 253, 271, 273, 278, 282, 394; acordes, 258, 270, 286, 394, 396; quinta, *ver* trítono; escalas, 278

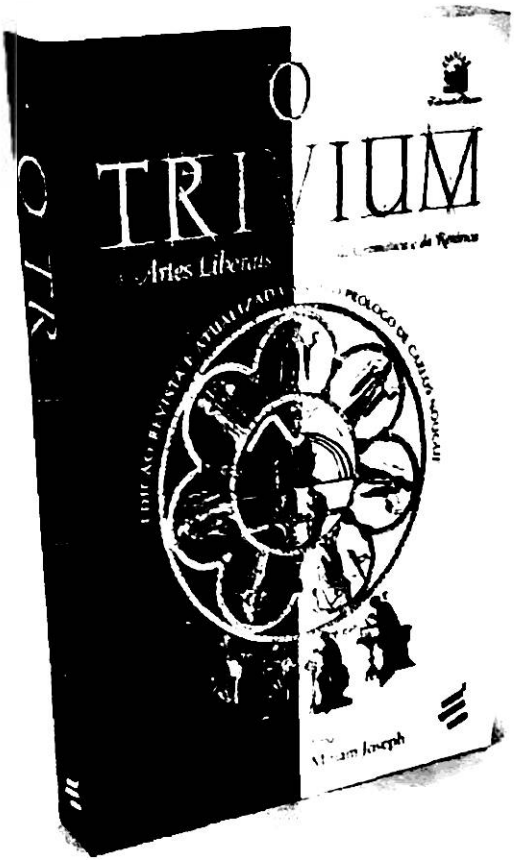
régua e compasso, construções com, 374-77
relógio, "de ouro", de Júpiter e Saturno, 346
resolução, em música, 273, 283, 287, 394, 396
ressonância, 50, 194, 234, 236, 244, 300, 336, 353
retângulo, 22, 42, 43, 80, 88, 90-92, 98-99, 116, 139, 154, 174
retrógrado, movimento dos planetas, 302
ritmo, musical 86, 192, 244, 248, 254, 260, 262, 267, 280-81, 290, 394-95, 396; do pêndulo, 86, 204; no sistema solar, 314, 342; notação de, 245, 255, 266-67, 284, 291; tabela de ritmos, 402; *ver também* tempo
S
Sa (música indiana), 257, 284; *ver também* fundamental, tônica
Sandreckoner, diagrama de, 81
Saturno, 300, 302, 314, 328, 338, 342, 346, 348, 350
seção áurea, 56, 82-83, 88-89, 90-92, 94, 98-99, 120, 140, 154-55, 156, 172, 318-19, 326, 332, 346-47, 354, 383; espiral, 43, 91; retângulo, 90-92, 98-99, 140, 154
segunda (intervalo musical), 197, 252, 257, 276, 371, 395, 396
semana, dias da, 26, 95, 306
semitom, 36, 230, 247, 251, 253, 256, 259, 272-275, 278, 287, 387, 394, 395, 396
série harmônica; *ver* sobretons
sétima (intervalo musical), 127, 197, 222, 252, 276, 371, 387, 394-96; acorde, 270, 282; diminuta, 270
shruti, *ver* coma, sintônica
simetria, 106; grupos, 124; s. de Arquimedes, 380; simetrias aperiódicas, 106, 120; simetrias Li, 122
síncope, 254, 266, 396
sinódico, ano, 305; Terra, Mercúrio, 318, 328
sínodo, 314, 318; Júpiter e Saturno, 347; Terra e Saturno, 346
sobretons, 20, 194, 200, 214-32, 248, 250, 252, 258, 267, 390, 395, 396; série de (definição), 395; *ver também* frequência, harmonia
Sol e Lua, coincidência de tamanhos, 330, 352
solfejo, 257, 277, 397
solstício, alinhamento com a galáxia, 351; s. de inverno, 350
sonoridade (tom), 274
Stonehenge, 44, 58, 304
subdominante, submediante, subtônica; *ver* acordes
substituição de acordes, 262, 282, 283, 287
supertônica, 396; *ver também* segunda (intervalo musical)
suspensão musical (em geral), 260, 270; acordes em suspensão, 270, 280, 396
sustenidos e bemóis, 251, 253, 279, 387, 395-96
T
teclado musical, 22, 26, 36, 192, 242, 251, 367, 368
temperamento igual, 36, 230, 242, 279
tempo, 254, 285, 288, 291, 396; *ver também* ritmo
tensão, e relaxamento (música), 243, 256, 260, 274-90
terça (intervalo musical), 222, 196-201, 222-30, 250-76, 286, 290-91, 371, 387, 394-96; t. menor, 202, 228, 230, 252, 256-58, 270, 387, 394-95
ternária, forma em música, 269, 288, 396
Terra e Lua, tamanhos relativos, 34-35, 331
tesselação, 100-103, 381; *ver também* malhas
tesserato, 180
tetracórdio, 198
tetraedro, 20, 27, 68-69, 76, 84, 134-35, 136-37
tetraktys, 32, 200
timbre, 248, 367, 395
tom, 14, 16, 196, 254, 260, 262, 264, 277, 281, 285, 287, 389, 394, 395, 396; *continuum* de tons, 250; de sintonia entre planetas, 406; faixas de instrumentos, *ver* faixa; *ver também* frequência; maior, menor, 387; tendências, 275, 256; tons da escala, 245
tonal, 396; centro tonal, *ver* tônica
tonalidade (ou clave), musical, 230, 253, 262, 272, 291; armaduras de clave, 253, 277; mudança de tonalidade, 230, 282, 288-89; tonalidades menores, 276
tonalidade, 272, 274, 279, 365, 396
tônica (nota), 194, 196, 247, 272, 291, 395, 396; acorde, 262, 270-75, 282, 291; chave t., 288, 396; *ver também* fundamental
tons inteiros, escala de, 278
tríade, 18, 30, 367; em música, 230, 258-73, 394, 396; menor, 276
triangulares, números, 42, 363, 373
triângulo, 66-70, 84, 86, 110, 258, 320; t. pitagórico 3-4-5, 20, 24, 81, 82, 369, 384; t. pitagórico 5-12-13, 332, 369
trifólios e quadrifólios, 112, 216
trítono, 198, 252-53, 273-87, 387, 396, 397
Trivium, 7, 40, 368
Troianos, asteroides, 344
truncamentos, 166
U
unidades de medida, metrologia, 406-07
uníssono, 40, 86, 184, 205, 208-14, 218, 222, 253, 367, 387, 396; quase uníssono, 210
universo, 14, 32, 68; antrópico, 298; como *design*, 192, 297; estabilidade do, 298; geocêntrico *vs.* heliocêntrico, 308; holográfico quântico, 352
V
Vênus, 44, 312, 316-24, 328-52, 354; beijo de, 322
vesica, 18, 30, 70, 92, 112, 114
Via Láctea, 300, 350
vibração, 202, 204, 232, 234, 244-64, 395; v. harmônica, 236, 264; *ver também* ressonância
vitruviano, homem, 79
vogais, 236, 248, 266, 395
volume, de sólidos, 18, 144, 156; de tom, 226, 234, 266; tabela de, 383
voz humana, 236, 264
X
xadrez, jogo de, 54, 370
Z
zero, 48, 56, 59

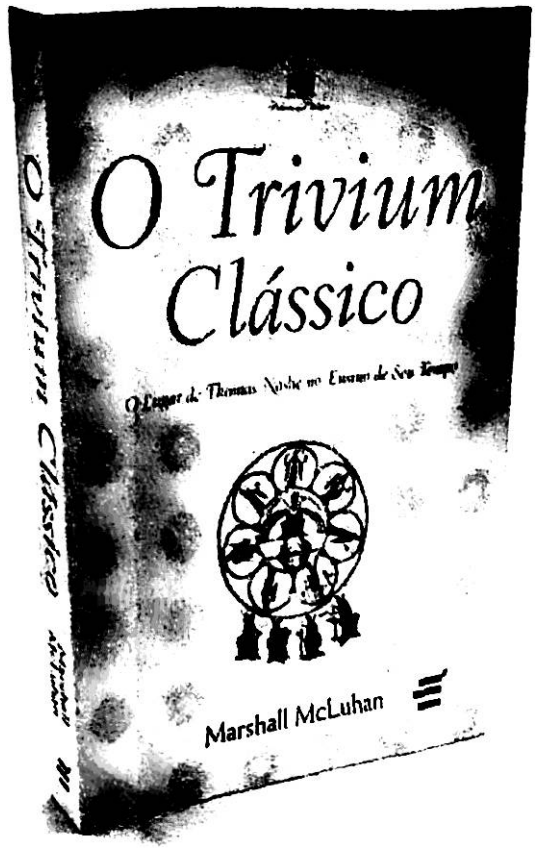
BIBLIOGRAFIA E LEITURAS COMPLEMENTARES

COOKE, Deryck. *The Language of Music.* Oxford, 1959.
COXETER, Harold. *Regular Polytopes.* Dover, 1974.
CRITCHLOW, Keith. *Order in Space.* Thames & Hudson, 1969.
_____. *Time Stands Still.* Floris Book, 2007.
_____. *Islamic Patterns.* Thames & Hudson, 1983.
CROMWELL, Peter. *Polyhedra.* Cambridge, 1999.
CROWE, Michael J. *Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution.* Dover, 1990.
DANIELOU, Alain. *Music and the Power of Sound.* Inner Traditions, 1995.
FIDELER, David. *Jesus Christ, Sun of God.* Quest Books, 1996.
FLEMING, William. *Art, Music and Ideas.* Holt, 1970.
GODWIN, Jocelyn. *Harmonies of Heaven and Earth.* Thames & Hudson, 1995.
_____. *Cosmic Music.* Inner Traditions, 1989.
GOOLD, Joseph; BENHAM, C. E.; KERR, R.; WILBERFORCE, L. R. *Harmonic Vibrations.* Newton & Co., 1909.
GUTHRIE, Kenneth Sylvan e FIDELER, David. *The Pythagorean Sourcebook.* Phanes Press, 1987.
HART, George. "Everything Polyhedral", www.georgehart.com.
HEATH, Richard. *The Matrix of Creation.* Inner Traditions, 2004.
_____. *Sacred Number.* Inner Traditions, 2007.
HEATH, Robin. *Sun, Moon and Earth.* Wooden Books e Walker & Co., 2006.
HELMHOLTZ, Herman. *On the Sensations of Tone as a Pshysiological Basis for the Theory of Music.* Dover, 1954.
HOLDEN, Alan. *Shapes, Space and Symmetry.* Dover, 1992.
IFRAH, Georges. *The Universal History of Numbers.* Harvill Press, 1998.
JAMES, Jamie. *The Music of the Spheres.* Grove Press e Little Brown, 1993.
JEANS, James. *Science and Music.* University Press, 1937.
JENNY, Hans. *Cymatics.* Micromedia Press, 2001.
KANIGEL, Robert. *The Man Who Knew Infinity.* Abacus, 1992.
KHAN, Hazrat Inayat. *The Mysticism of Sound and Music.* Shambhala, 1996.
KOESTLER, Arthur. *The Sleepwalkers.* Penguin, 1989.
LAWLOR, Robert. *Sacred Geometry.* Thames & Hudson, 1982.
MCCLAIN, Ernest. *The Myth of Invariance.* Shambhala, 1978.
MICHELL, John. *The New View Over Atlantis.* Thames & Hudson, 1986.
_____. *The Dimensions of Paradise.* Inner Traditions, 2008.
_____. *How the World is Made* (with Allan Brown). Thames & Hudson, 2009.
MOORE, Angela. *In Love with Venus.* Squeeze Press, 2009.
MURCHIE, Guy. *Music of the Spheres.* Dover Books, 1961.
NEAL, John. *All Done with Mirrors.* Secret Academy, 2000.
OLSEN, Scott. *The Golden Section.* Wooden Books/Walker & Co., 2006.
PLAYFAIR, Guy Lyon e HILL, Scott. *Cycles of Heaven.* Souvenir Press, 1978.
REES, Martin. *Just Six Numbers.* Phoenix, 2000.
SCHNEIDER, Michael. *A Beginner's Guide to Constructing the Universe.* Harper Perennial/Avon, 1995.
SCHOENBERG, Arnold. *Fundamentals of Music Composition.* Faber, 1973.
SCHULTZ, Joachim. *Movements and Rhythms of the Stars.* Floris Books, 1986.
STEWART, Malcom. *Patterns of Eternity.* Floris Books, 2009.
STIRLING, William. *The Canon.* Elkin Matthews, 1897.
STRACHAN, Gordon. *Jesus the Master Builder.* Floris Books, 2000.
SUTTON, David. *Ruler and Compass.* Wooden Books/Walker & Co., 2009.
WADE, David. *Symmetry.* Wooden Books/Walker & Co., 2006.
WENNIGER, Magnus. *Polyhedron Models.* Cambridge, 1974.
_____. *Spherical Models.* Cambridge, 1979.
_____. *Dual Models.* Cambridge, 2003.
Ver também www.woodenbooks.com.



Sobre as artes liberais, leia também:





O *Trivium*, da Irmã Miriam Joseph, resgata a abordagem integrada dos componentes da ciência da linguagem praticada na Idade Média e conduz o leitor por uma esclarecedora exposição da lógica, da gramática e da retórica. Mais importante do que o domínio destes assuntos, este livro pretende fornecer as ferramentas necessárias para o aperfeiçoamento da inteligência.

Marshall McLuhan se mostra neste livro um historiador da cultura clássica e o arquiteto de um projeto educacional para as gerações futuras. Trata das disciplinas do *trivium* (gramática, lógica e retórica) em recortes temporais que vão até S. Agostinho, de S. Agostinho a Abelardo e, depois, de Abelardo a Erasmo. Por fim, dedica uma seção a Thomas Nashe, romancista e dramaturgo britânico contemporâneo de Shakespeare.

facebook.com/erealizacoeseditora twitter.com/erealizacoes instagram.com/erealizacoes youtube.com/editorae
issuu.com/editora_e erealizacoes.com.br atendimento@erealizacoes.com.br

Tudo isso, e muito mais, está presente nesta reunião de seis livros independentes, que expõem por meio de textos e imagens os segredos das quatro ciências abrangidas pelo *quadrivium*. São eles: I – Número Sagrado; II – Geometria Sagrada; III – Os Sólidos Platônicos e Arquimedianos; IV – Harmonógrafo; V – Os Elementos da Música; VI – Um Pequeno Livro da Coincidência no Sistema Solar.

Depois de ler o *Quadrivium*, você nunca mais vai enxergar o mundo à sua volta da mesma maneira.

Outros títulos da Coleção Educação Clássica

- A Arte da Leitura: Diálogos sobre Livros
  Mortimer J. Adler e Charles van Doren
- A Arte do Drama
  Ronald Peacock
- A Vida Intelectual: Seu Espírito, Suas Condições, Seus Métodos
  A.-D. Sertillanges
- Alegoria do Amor – Um Estudo da Tradição Medieval
  C. S. Lewis
- Aristóteles para Todos: Uma Introdução Simples a um Pensamento Complexo
  Mortimer J. Adler
- Como Educar Sua Mente: O Guia para Ler e Entender os Grandes Autores
  Susan Wise Bauer
- Como Escrever um Romance
  Miguel de Unamuno
- Como Falar, Como Ouvir
  Mortimer J. Adler
- Como Ler Livros: O Guia Clássico para a Leitura Inteligente
  Mortimer J. Adler e Charles van Doren
- Como Ouvir e Entender Música
  Aaron Copland
- Como Pensar sobre as Grandes Ideias: A Partir dos Grandes Livros da Civilização Ocidental
  Mortimer J. Adler
- Considerações sobre a Educação seguidas de Pedagogia Infantil
  Alain
- Introdução às Artes do Belo: O que é Filosofar Sobre a Arte?
  Étienne Gilson
- O Trivium – As Artes Liberais da Lógica, da Gramática e da Retórica
  Irmã Miriam Joseph
- O Trivium Clássico: O Lugar de Thomas Nashe no Ensino de Seu Tempo
  Marshall McLuhan

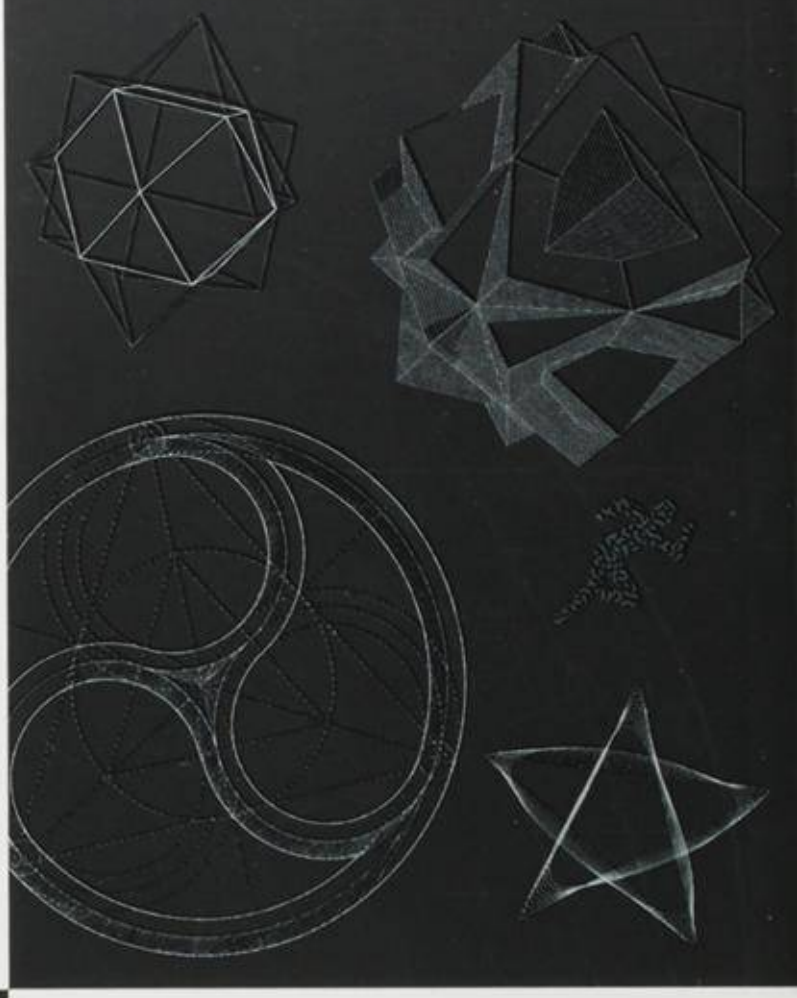
QUADRIVIUM

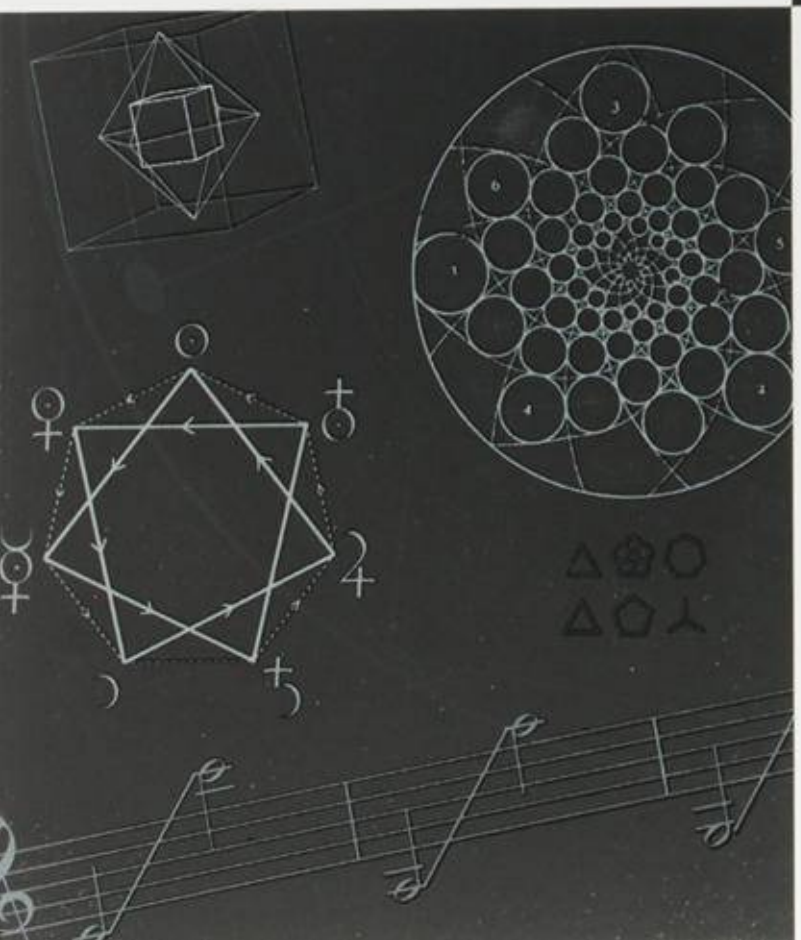
As Quatro Artes Liberais Clássicas da Aritmética, da Geometria, da Música e da Cosmologia

O quadrivium *compreende as quatro artes liberais da aritmética, da geometria, da música e da cosmologia, estudadas da Antiguidade até a Renascença como uma maneira de vislumbrar a natureza da realidade. Elas sintetizam número, espaço e tempo. A geometria é o número no espaço; a música é o número no tempo; e o cosmos expressa o número no espaço e no tempo. Aritmética, música e geometria são verdades metafísicas boas e belas em qualquer lugar, em todos os tempos. A vida no universo comprova isso. Elas são precursoras de todas as ciências físicas.*

COLEÇÃO

Educação Clássica





Este volume reúne seis livros, ricamente ilustrados, que abordam temas pertencentes ao universo das artes do **quadrivium**. *Um raro tesouro de coisas antigas, outrora secretas, e sempre úteis. Um passaporte mágico entre culturas, entre o sagrado e o científico, o provinciano e o estrangeiro, o antigo e o moderno.*